Méthodes classiques pour les EDP
Modélisation

Master Mathématiques et applications M1 4MA384
Notes de cours, en travaux, datées du 28 septembre 2026

Julien Guillod

2026 – 2027



guillod.org/teaching/4ma384

Table des matières

1. Introduction **7**
- 1.1. Qu'est-ce qu'une EDP ? . . . 7
- 1.2. Exemples . . . 9
  - 1.2.1. Équations linéaires . . . 9
  - 1.2.2. Équations semi-linéaires . . . 10
  - 1.2.3. Équations quasi-linéaires . . . 10
  - 1.2.4. Équations complètement non-linéaires . . . 10
- 1.3. Stratégies de résolution . . . 10
  - 1.3.1. Caractère bien posé et solutions classiques . . . 10
  - 1.3.2. Solutions faibles et régularité . . . 11
  - 1.3.3. Difficultés typiques . . . 11
- 1.4. Plan . . . 11

2. Équations de transport **12**
- 2.1. Modèles de transport 1d . . . 12
  - 2.1.1. Trafic routier . . . 12
  - 2.1.2. Dynamique des gaz simplifiée . . . 15
  - 2.1.3. Modèle structuré en âge . . . 16
- 2.2. Modèles de transport dans $\mathbb{R}^n$ . . . 17
  - 2.2.1. Théorème de Liouville . . . 17
  - 2.2.2. Théorème de Reynolds . . . 18
  - 2.2.3. Exemples d'applications pour obtenir des lois de conservation . . . 19
- 2.3. Solutions classiques des équations de transport . . . 20
  - 2.3.1. Solution de l'équation de transport non-conservative . . . 21
  - 2.3.2. Solution avec terme source . . . 24
  - 2.3.3. Solution avec terme de réaction . . . 25
  - 2.3.4. Solution de l'équation de transport semi-linéaire . . . 27
  - 2.3.5. Solution de l'équation de transport quasi-linéaire . . . 28
- 2.4. Solutions faibles des équations de transport . . . 30
  - 2.4.1. Définition des solutions faibles . . . 31
  - 2.4.2. Équivalence fort-faible . . . 31
  - 2.4.3. Existence des solutions faibles . . . 34
  - 2.4.4. Unicité des solutions faibles . . . 35
- 2.5. Problème avec conditions au bord . . . 37
  - 2.5.1. Champ tangent . . . 37
  - 2.5.2. Champ non tangent . . . 38

3. Équations de Laplace **41**
- 3.1. Modèle 1d d'un élastique . . . 41
  - 3.1.1. Élastique attaché . . . 41
  - 3.1.2. Élastique non attaché . . . 44
- 3.2. Modèle d'une membrane . . . 45
- 3.3. Solutions classiques . . . 48
  - 3.3.1. Solution fondamentale . . . 48
  - 3.3.2. Formule de représentation . . . 49
  - 3.3.3. Fonction de Green . . . 51
  - 3.3.4. Propriétés des fonctions harmoniques . . . 53

3.4. Solutions faibles . . . 54
3.4.1. Motivations . . . 54
3.4.2. Espaces de Sobolev . . . 56
3.4.3. Principe général : Théorème de Lax–Milgram . . . 58
3.4.4. Existence de solutions faibles en 1d . . . 60
3.4.5. Existence de solutions faibles en multi-d . . . 61
3.4.6. Existence de solutions faibles pour une EDP elliptique . . . 63

4. Équations de la chaleur **65**
4.1. Modèle de propagation de la chaleur . . . 65
4.1.1. Équation dans le solide . . . 65
4.1.2. Conditions au bord . . . 66
4.1.3. Adimensionnement . . . 67
4.2. Résolution historique . . . 68
4.3. Solution fondamentale . . . 69
4.3.1. Symétries . . . 69
4.3.2. Solution fondamentale . . . 71
4.3.3. Formules de représentation . . . 73
4.4. Propriétés de l'équation de la chaleur . . . 76
4.4.1. Formule de la moyenne . . . 76
4.4.2. Principe du maximum . . . 77
4.4.3. Régularité . . . 82
4.5. Solutions faibles . . . 83
4.5.1. Motivations . . . 83
4.5.2. Espaces de fonctions à valeurs dans un Banach . . . 84
4.5.3. Définition des solutions faibles . . . 85
4.5.4. Existence et unicité des solutions faibles . . . 86

5. Équations des ondes **92**
5.1. Modèle d'une corde vibrante . . . 92
5.2. Modèle d'un tambour ou d'un solide élastique . . . 93
5.3. Méthode des séries de Fourier sur $[0, L]$ . . . 94
5.4. Formule de représentation sur $\mathbb{R}$ . . . 95
5.5. Méthode des moyennes sphériques . . . 98
5.5.1. Cas $n = 3$ . . . 99
5.5.2. Cas $n = 2$ . . . 100
5.5.3. Cas $n \geq 4$ . . . 100
5.6. Méthode de la transformée de Fourier . . . 101
5.7. Méthode d'énergie . . . 102

A. Appendice **103**

Bibliographie **105**

Préface

Ce cours aborde l'analyse d'équations emblématiques et fondamentales des grandes classes d'équations aux dérivées partielles (EDP) par des méthodes classiques. Ces grandes classes d'EDP seront traitées dans des chapitres différents, chacun étant précédé d'une partie de modélisation en une dimension, étendue dans un second temps à plusieurs dimensions.

Le premier chapitre est une introduction sur ce qu'est une EDP, avec beaucoup d'exemples et de stratégies générales de résolution.

Le deuxième chapitre est consacré aux équations de transport avec la résolution par la méthode des caractéristiques, puis l'introduction de la notion de solutions faibles et les problématiques de bord.

Le troisième chapitre est consacré aux équations elliptiques, et principalement à celles de Laplace et de Poisson. Les méthodes abordées incluent la représentation via solutions fondamentales, les principes du maximum et la construction de solutions faibles.

Le quatrième chapitre traite des équations paraboliques, et principalement de l'équation de la chaleur qui sera étudiée par séries de Fourier, avec des techniques de représentation via solutions fondamentales et principes du maximum. Des équations d'advection-diffusion seront analysées avec la construction de solutions faibles par approximation de Galerkin.

Le dernier chapitre est consacré aux équations des ondes linéaires avec des formules de représentation en 1d, 2d et 3d, la discussion des différences entre les dimensions, la construction de solutions par transformée de Fourier et les méthodes d'énergie.

Prérequis Notions de base d'analyse réelle, de calcul différentiel et intégral, ainsi que d'équations différentielles ordinaires.

Thèmes abordés définition d'une équation aux dérivées partielles et des différents types (linéaires, semi-linéaires, quasi-linéaires), modélisation d'exemples fondamentaux d'équations avec interprétation physique, méthode des caractéristiques, solutions fondamentales, méthodes de représentation, méthodes d'énergie, principes du maximum, régularité, unicité, solutions faibles, approximation de Galerkin.

Ressources pédagogiques

Les notes de cours, feuilles de TD, DM, et annales se trouvent sur moodle-sciences.sorbonne-universite.fr. Les ressources externes sur lesquelles ce cours est basé sont essentiellement :

— Franck Boyer (2019-2020). "Equations Différentielles Ordinaires, Equations aux Dérivées Partielles". Polycopié de cours M1, Université de Toulouse. URL : https://www.math.univ-toulouse.fr/~fboyer/_media/enseignements/m1edoedp/poly_edo-edp_m1.pdf

— Lawrence C. Evans (2010). *Partial differential equations*. English. 2nd ed. T. 19. Grad. Stud. Math. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). URL : https://bookstore.ams.org/gsm-19-r

et dans une moindre mesure :

— Isabelle Gallagher (2024-2025). "Analyse des Équations aux Dérivées Partielles". Polycopié de cours M1, ENS Paris. URL : https://webusers.imj-prg.fr/~isabelle.gallagher/ENS-EDP2024-2025.php

Calendrier prévisionnel des cours

— **Cours 1 :** introduction aux EDP, classification et méthodes générales de résolution.

— **Cours 2 :** modélisation de transport 1d, trafic routier et dynamique des gaz.

— **Cours 3 :** modélisation de transport multi-d, théorèmes de Liouville et de Reynolds, et applications.

— **Cours 4 :** méthodes des caractéristiques pour le transport conservatif, non-conservatif, avec terme source, exemples.

— **Cours 5 :** méthodes des caractéristiques pour les équations quasi-linéaires et semi-linéaires, exemples, définition des solutions faibles.

— **Cours 6 :** existence et unicité de solutions faibles.

— **Cours 7 :** problème de transport avec conditions au bord, modélisation 1d d'un élastique attaché.

— **Cours 8 :** modélisation 1d d'un élastique non attaché, modélisation d'une membrane.

— **Cours 9 :** solution fondamentale de l'équation de Laplace, formules de représentation et de Green.

— **Cours 10 :** propriétés des fonctions harmoniques, formules de la moyenne, principes du maximum, motivations solutions faibles.

— **Cours 11 :** espaces de Sobolev, trace, inégalités de Poincaré et Poincaré–Wirtinger, théorème de Lax–Milgram.

— **Cours 12 :** existence et unicité de solutions faibles pour l'élastique et la membrane, modélisation de propagation de la chaleur.

— **Cours 13 :** adimensionnement, résolution par séries de Fourier, symétries, solution fondamentale de la chaleur.

— **Cours 14 :** formules de représentation, propriétés de l'équation de la chaleur, formule de la moyenne.

— **Cours 15 :** principes du maximum, unicité, régularité.

— **Cours 16 :** construction de solutions faibles pour l'advection-réaction-diffusion par Galerkin.

— **Cours 17 :** modélisation d'une corde vibrante et d'un tambour, séries de Fourier, formule de représentation 1d.

— **Cours 18 :** méthode des moyennes sphériques, formules de représentation en 3d et 2d, méthode de la transformée de Fourier, méthodes d'énergie.

Liste des éléments importants

Cette liste indique de façon non-exhaustive les éléments à savoir absolument pour les évaluations. Il n'est pas exclu qu'il soit utile d'en connaître d'autres.

Chapitre 1

— définition d'une EDP, gradient, Laplacien
— classification en équation linéaire, semi-linéaire et quasi-linéaire
— différence conceptuelle entre solutions classiques et solutions faibles

Chapitre 2

— modélisation 1d du trafic routier (§2.1.1)
— applications des théorèmes de Liouville et de Reynolds (§2.2.3)
— résolution explicite d'équation différentielle ordinaire, en particulier linéaire (y compris non-autonome et inhomogène) et à variables séparables
— méthodes des caractéristiques pour obtenir des solutions classiques, plus précisément équation de transport non-conservative (§2.3.1), avec terme source (§2.3.2), forme conservative ou avec terme de réaction (§2.3.3) et équation de transport semi-linéaire (§2.3.4) ; exemples faits en cours et en TD (TD2.8–2.10)

Chapitre 3

— modélisation 1d d'un élastique attaché (§3.1.1)
— lien entre minimisation d'une énergie, formulation faible et forme EDP (proposition 3.2.3, théorème 3.2.4, §3.4.1, TD3.1–3.3)
— intégration par parties sur des domaines $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: théorème de la divergence (proposition 2.2.6), identités de Green (proposition 3.3.3)
— solution fondamentale du Laplacien dans $\mathbb{R}^n$ (§3.3.1)
— formule de représentation dans $\mathbb{R}^n$ (§3.3.2, sans preuve du théorème 3.3.2, TD3.17–3.18)
— formule des moyennes (théorème 3.3.8) et principes du maximum (théorème 3.3.10, sans la preuve)
— idées principales de comment choisir de bons espaces fonctionnels, *i.e.* complétude et coercivité (§3.4.1)
— utilisation des espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ et $H^1_0(\Omega)$ et de l'inégalité de Poincaré (§3.4.2)
— formulation faible associée à un problème donné sous forme d'EDP (§3.4.3)
— application du théorème de Lax–Milgram pour obtenir l'existence et l'unicité des solutions faibles (§3.4.4, §3.4.5, TD3.11–3.13)

Chapitre 4

— résolution par séries de Fourier (§4.2)
— compréhension de ce qu'est la solution fondamentale (§4.3.2, sans forcément le cheminement fait pour l'obtenir)
— formule de représentation dans $\mathbb{R}^n$ (§4.3.3)
— déduction de propriétés d'unicité et de positivité à partir du principe du maximum (corollaire 4.4.4, corollaire 4.4.6)

Chapitre 5

— modélisation d'une corde vibrante (§5.1)
— méthode de résolution par séries de Fourier (§5.3)
— déduction de formules de représentation sur $\mathbb{R}$ (§5.4)

1. Introduction *

1.1. Qu'est-ce qu'une EDP ?

Avant de commencer, introduisons quelques notations permettant de définir ce qu'est une EDP :

Fonction Une fonction $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est notée $u(\boldsymbol{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$.

Dérivées partielles Pour i un entier compris entre 1 et n, la dérivée partielle de u selon x_i est notée

$$\partial_i u(\boldsymbol{x}) = \partial_{x_i} u(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{u(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i) - u(\boldsymbol{x})}{h},$$

et les dérivées d'ordres plus élevées comme $\partial_{x_i x_j} u(\boldsymbol{x}) = \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(\boldsymbol{x})$, etc.

Multi-indice Un multi-indice est un vecteur $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$ et son ordre est $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Cela permet d'écrire les dérivées partielles de manière compacte :

$$\partial^\alpha u(\boldsymbol{x}) := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} u(\boldsymbol{x}) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u(\boldsymbol{x}).$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble des dérivées partielles d'ordre k est noté

$$D^k u(\boldsymbol{x}) := \left\{ \partial^\alpha u(\boldsymbol{x}) \, : \, |\alpha| = k \right\},$$

qui est un point de $\mathbb{R}^{n^k}$. Sa norme est notée

$$|D^k u| := \left(\sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u|^2 \right)^{1/2}.$$

Gradient Le gradient correspond à $k = 1$

$$\nabla u(\boldsymbol{x}) := Du(\boldsymbol{x}) := \big(\partial_1 u(\boldsymbol{x}), \partial_2 u(\boldsymbol{x}), \dots, \partial_n u(\boldsymbol{x}) \big) \in \mathbb{R}^n.$$

Divergence La divergence d'un champ de vecteurs $\boldsymbol{v} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) := D \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^{n} (\partial_i v_i)(\boldsymbol{x}).$$

Matrice Hessienne La matrice Hessienne correspond à $k = 2$

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{x}) := D^2 u(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 u(\boldsymbol{x}) & \cdots & \partial_1 \partial_n u(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \partial_1 u(\boldsymbol{x}) & \cdots & \partial_n \partial_n u(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}),$$

qui est symétrique si u est de classe C^2 (lemme de Schwarz).

∗. Ce chapitre est essentiellement inspiré de EVANS (Chapter 1).

Laplacien Le Laplacien est la trace de la matrice Hessienne

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \partial_i u(\boldsymbol{x}) = \operatorname{tr}(D^2 u(\boldsymbol{x})).$$

Définition 1.1.1 (EDP)**.** Une expression de la forme

$$F(D^k u(\boldsymbol{x}), D^{k-1} u(\boldsymbol{x}), \dots, Du(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

est une équation aux dérivées partielles (EDP) d'ordre k, où $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ est donnée et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est l'inconnue.

Résoudre l'EDP veut dire trouver toutes les solutions u, possiblement seulement parmi les fonctions satisfaisant certaines conditions au bord. Résoudre veut dire idéalement obtenir une forme simple ou explicite, ou si cela n'est pas possible, démontrer l'existence et d'autres propriétés des solutions.

Définition 1.1.2. Une EDP d'ordre k est dite :

1. linéaire lorsqu'elle a la forme
$$\sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(\boldsymbol{x}) D^\alpha u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$$
pour des fonctions a_α et f données. L'EDP est dite homogène lorsque $f = 0$.
2. semi-linéaire lorsqu'elle a la forme
$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(\boldsymbol{x}) D^\alpha u(\boldsymbol{x}) + a_0(D^{k-1} u(\boldsymbol{x}), \dots, Du(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = 0.$$
3. quasi-linéaire lorsque
$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(D^{k-1} u(\boldsymbol{x}), \dots, Du(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) D^\alpha u(\boldsymbol{x}) + a_0(D^{k-1} u(\boldsymbol{x}), \dots, Du(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = 0.$$
4. complètement non-linéaire sinon.

Exercice 1.1.3. Quelles propriétés impliquent quelles autres ? linéaire $\implies$ semi-linéaire $\implies$ quasi-linéaire.

Exemple 1.1.4. Une EDP d'ordre 2 est :

1. linéaire lorsque
$$A(\boldsymbol{x}) : D^2 u(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \cdot Du(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}),$$
où
$$A : B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \qquad \text{pour} A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}),$$
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \qquad \text{pour} \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n.$$
2. semi-linéaire lorsque
$$A(\boldsymbol{x}) : D^2 u(\boldsymbol{x}) + a_0(Du(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = 0.$$
3. quasi-linéaire lorsque
$$A(Du(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) : D^2 u(\boldsymbol{x}) + a_0(Du(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = 0.$$

Un système d'EDP est une collection de plusieurs EDP pour plusieurs fonctions inconnues :

Définition 1.1.5. Une expression de la forme

$$\boldsymbol{F}(D^k \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), D^{k-1} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \dots, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

est un système d'EDP d'ordre k, où $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^{mn^k} \times \mathbb{R}^{mn^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ est donnée et $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de composantes $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m)$ est l'inconnue.

1.2. Exemples

Il n'existe pas de théorie générale pour résoudre des EDP, et une telle théorie n'existera probablement jamais au vu de la trop grande diversité d'EDP. Cette section liste quelques exemples d'équations. La notation utilisée est la suivante : $\boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $Du(\boldsymbol{x}) = (\partial_1 u(\boldsymbol{x}), \dots, \partial_n u(\boldsymbol{x}))$ et la variable t dénote le temps.

1.2.1. Équations linéaires

1. Équation de Laplace (ordre 2, linéaire homogène)
$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u = 0.$$
2. Équation de Poisson (ordre 2, linéaire)
$$\Delta u = f(\boldsymbol{x}).$$
3. Équation de Helmholtz ou aux valeurs propres (ordre 2, linéaire homogène)
$$-\Delta u = \lambda u.$$
4. Équation de transport linéaire (ordre 1, linéaire homogène)
$$\partial_t u + \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}) \cdot \nabla u = 0.$$
5. Équation de Liouville (ordre 1, linéaire homogène)
$$\partial_t u + \nabla \cdot (\boldsymbol{v} u) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \partial_t u + \sum_{i=1}^{n} \partial_i (v_i u) = 0.$$
6. Équation de la chaleur (ordre 2, linéaire homogène)
$$\partial_t u - \Delta u = 0.$$
7. Équation de Schrödinger (ordre 2, linéaire homogène)
$$i\partial_t u + \Delta u = 0.$$
8. Équation de Kolmogorov (ordre 2, linéaire homogène)
$$\partial_t u - A : \nabla^2 u + \boldsymbol{v} \cdot \nabla u = 0 \qquad \text{ou} \qquad \partial_t u - \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_j u + \sum_i v_i \partial_i u = 0.$$
9. Équation de Fokker–Planck (ordre 2, linéaire homogène)
$$\partial_t u - \nabla^2 : (Au) + \nabla \cdot (\boldsymbol{v} u) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \partial_t u - \sum_{i,j} \partial_i \partial_j (a_{ij} u) + \sum_i \partial_i (v_i u) = 0.$$
10. Équation des ondes (ordre 2, linéaire homogène)
$$\partial_{tt} u - \Delta u = 0.$$
11. Équation de Klein–Gordon (ordre 2, linéaire homogène)
$$\partial_{tt} u - \Delta u + m^2 u = 0.$$
12. Équation d'Airy (ordre 3, linéaire homogène)
$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0.$$
13. Équation des poutres (ordre 4, linéaire homogène)
$$\partial_{tt} u + \partial_x^4 u = 0.$$
14. Équation de l'élasticité linéaire (ordre 2, linéaire homogène)
$$\mu \Delta \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = 0.$$

1.2.2. Équations semi-linéaires

1. Équation de Poisson non-linéaire (ordre 2, semi-linéaire)
$$-\Delta u = f(u).$$
2. Équation de réaction-diffusion (ordre 2, semi-linéaire)
$$\partial_t u - \Delta u = f(u).$$
3. Équation de conservation scalaire (ordre 1, quasi-linéaire)
$$\partial_t u + \nabla \cdot (\boldsymbol{F}(u)) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \partial_t u + \boldsymbol{F}'(u) \cdot \nabla u = 0.$$
4. Équations de Navier–Stokes incompressibles (ordre 2, semi-linéaire)
$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = \Delta \boldsymbol{u} - \nabla p \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0. \end{cases}$$

1.2.3. Équations quasi-linéaires

1. Équation de Burgers inviscide (ordre 1, quasi-linéaire)
$$\partial_t u + u \partial_x u = 0.$$
2. Équations d'Euler incompressibles (ordre 1, quasi-linéaire)
$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = -\nabla p, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0. \end{cases}$$

1.2.4. Équations complètement non-linéaires

1. Équation eikonale (ordre 1, complètement non-linéaire)
$$|\nabla u| = 1.$$
2. Équation d'Hamilton–Jacobi (ordre 1, complètement non-linéaire)
$$\partial_t u + H(\nabla u, \boldsymbol{x}) = 0.$$
3. Équation de Monge–Ampère (ordre 2, complètement non-linéaire)
$$\det\left(D^2 u\right) = f(Du, u, \boldsymbol{x}).$$

1.3. Stratégies de résolution

Résoudre une EDP n'est pas facile en général, il y a beaucoup de méthodes différentes. Ce que veut dire résoudre est une question subtile, dépendant de la structure du problème.

1.3.1. Caractère bien posé et solutions classiques

Un problème d'EDP est dit bien posé lorsque :

1. le problème admet au moins une solution
2. cette solution est unique
3. la solution dépend continûment des données du problème.

La dernière condition est importante pour les problèmes physiques : il est raisonnable de penser que la solution doit changer peu lorsque les données changent peu. Mais qu'appelle-t-on une solution exactement ? Il est raisonnable de demander qu'une solution d'une EDP d'ordre k soit C^k (k dérivées continues) ; ainsi toutes les dérivées dans l'EDP sont au moins bien définies et continues : c'est la notion de solutions classiques. Résoudre au sens classique veut dire trouver une solution satisfaisant les trois points précédents, ou au moins montrer qu'une telle solution existe.

1.3.2. Solutions faibles et régularité

Certaines équations ne peuvent pas être résolues au sens classique, et l'idée est de chercher des solutions avec moins de régularité : c'est la notion de solutions faibles. Par exemple pour les lois de conservation les solutions faibles sont incontournables. Même pour des équations résolubles au sens classique, construire d'abord des solutions faibles peut s'avérer plus simple.

Ainsi on sépare le problème en existence de solutions faibles, et régularité de ces solutions. Si la régularité est suffisante alors ce sont des solutions classiques.

1.3.3. Difficultés typiques

1. équations non-linéaires plus compliquées que linéaires.
2. équations d'ordre élevé plus difficiles que ordre bas.
3. systèmes d'équations plus compliqués que équation unique.
4. généralement impossible d'avoir une expression explicite des solutions.

1.4. Plan

1. Introduction
2. Équations de transport
3. Équations de Laplace
4. Équations de la chaleur
5. Équations des ondes

A. Appendice

2. Équations de transport

2.1. Modèles de transport 1d *

2.1.1. Trafic routier

Le but est de modéliser le trafic routier ; il s'agit d'un sujet vaste et complexe, ici seul un modèle très simplifié est considéré.

Hypothèses

— voie rectiligne infinie $\simeq \mathbb{R}$

— une seule file de circulation (pas de dépassements)

— pas d'entrée/sortie de véhicules.

Quantités

— $\rho(t,x)$ densité de véhicules à l'instant t et au point x : le nombre de véhicules entre a et b au temps t est $\int_a^b \rho(t,x)\,\mathrm{d}x$.

— $v(t,x)$ vitesse du véhicule qui passe au point x à l'instant t.

But Établir des équations satisfaites pour ρ et v.

Trajectoire d'un véhicule en particulier

— Supposons connu le champ de vitesse v.

— Considérons un véhicule situé à la position x_0 au temps t_0 et notons $X(t,t_0,x_0)$ sa position à l'instant t. Par définition du champ de vitesse :

$$\partial_t X(t,t_0,x_0) = v(t,X(t,t_0,x_0)) \quad \text{avec} \quad X(t_0,t_0,x_0) = x_0.$$

Donc X est le flot associé au champ de vitesse v !

— Ici on supposera v assez régulier (localement uniformément en temps Lipschitz en espace) pour pouvoir appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz local, voire global et avoir des trajectoires définies de façon globale.

Loi de conservation des véhicules

Par choix de modélisation, aucun véhicule ne peut apparaître, disparaître ou dépasser.

Proposition 2.1.1. *S'ils sont réguliers, les deux champs ρ et v sont reliés par l'EDP :*

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho\, v) = 0. \tag{2.1}$$

Preuve physique. L'idée est de faire le bilan de l'évolution du nombre de véhicules entre $x = a$ et $x = b$ entre les instants t et $t + \delta t$, avec δt petit. On fait ce bilan au premier ordre, c'est-à-dire qu'on néglige tous les termes plus petits que δt.

∗. Provient essentiellement de BOYER (Partie II, §I).

À l'instant t : entrée en $x = a$ de $\delta t \times v(t,a) \times \rho(t,a)$, sortie en $x = b$ de $\delta t \times v(t,b) \times \rho(t,b)$, donc :

$$\int_a^b \rho(t+\delta t, x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \rho(t,x)\,\mathrm{d}x \approx \delta t \times v(t,a) \times \rho(t,a) - \delta t \times v(t,b) \times \rho(t,b)$$
$$= -\delta t \int_a^b \partial_x(\rho\, v)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant que $\rho(t+\delta t, x) = \rho(t,x) + \delta t \partial_t \rho(t,x)$, cela donne :

$$\delta t \int_a^b \partial_t \rho(t,x)\,\mathrm{d}x \approx -\delta t \int_a^b \partial_x(\rho\, v)\,\mathrm{d}x$$

i.e.

$$\int_a^b \left[\partial_t \rho + \partial_x(\rho\, v)\right]\mathrm{d}x \approx 0.$$

Comme cela est vrai pour tout a, b, en dérivant par rapport à b on obtient

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho\, v) = 0.$$

□

La preuve mathématique utilise le lemme suivant :

Lemme 2.1.2. *Pour $f : (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux autres fonctions de classe C^1, alors*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \partial_t f(t,x)\,\mathrm{d}x + \beta'(t) f(t,\beta(t)) - \alpha'(t) f(t,\alpha(t)).$$

Preuve. Posons

$$\Phi : (a,b,t) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

Les théorèmes de dérivation d'une intégrale montrent que Φ admet des dérivées partielles données par

$$\partial_a \Phi(a,b,t) = -f(t,a),$$
$$\partial_b \Phi(a,b,t) = f(t,b),$$
$$\partial_t \Phi(a,b,t) = \int_a^b \partial_t f(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

Ces dérivées partielles sont des fonctions continues des trois variables (a,b,t) et donc la fonction Φ est de classe C^1. Le résultat du lemme provient donc juste de la dérivation de la fonction composée $t \mapsto \Phi(\alpha(t), \beta(t), t)$. □

Preuve mathématique. La relation

$$\int_a^b \rho(t_0,x)\,\mathrm{d}x = \int_{X(t,t_0,a)}^{X(t,t_0,b)} \rho(t,x)\,\mathrm{d}x$$

décrit le fait que le nombre de véhicules compris entre les points a et b à l'instant t_0 est constant. On dérive par rapport à t à l'aide du lemme précédent

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{X(t,t_0,a)}^{X(t,t_0,b)}\rho(t,x)\,\mathrm{d}x\right) &= \int_{X(t,t_0,a)}^{X(t,t_0,b)}\partial_t\rho(t,x)\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X(t,t_0,b))\cdot\rho(t,X(t,t_0,b))\\ &\qquad - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X(t,t_0,a))\cdot\rho(t,X(t,t_0,a))\\ &= \int_{X(t,t_0,a)}^{X(t,t_0,b)}\partial_t\rho(t,x)\,\mathrm{d}x + v(t,X(t,t_0,b))\rho(t,X(t,t_0,b))\\ &\qquad - v(t,X(t,t_0,a))\rho(t,X(t,t_0,a))\\ &= \int_{X(t,t_0,a)}^{X(t,t_0,b)}\big[\partial_t\rho(t,x)+\partial_x(\rho\,v)\big]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Puis en évaluant en $t = t_0$ (donc $X(t_0,t_0,a) = a$ et $X(t_0,t_0,b) = b$) :

$$0 = \int_a^b \big(\partial_t\rho + \partial_x(\rho\,v)\big)(t_0,x)\,\mathrm{d}x.$$

En dérivant par rapport à b, et vu que t_0 est quelconque :

$$\partial_t\rho + \partial_x(\rho\,v) = 0.$$

□

Modélisation du comportement des véhicules

À ce stade, nous avons obtenu une seule équation mais deux fonctions inconnues. Comment les véhicules adaptent leur vitesse au trafic ? Il faut une loi de comportement.

1. **Premier modèle** : tous les véhicules vont à la vitesse maximale autorisée :

   $$v(t,x) = V_{\max} \in \mathbb{R} \text{ donnée.}$$

   Donc ici v n'est plus une inconnue, et il reste l'équation de transport à vitesse constante :

   $$\partial_t\rho + V_{\max}\partial_x\rho = 0.$$

2. **Second modèle** : la vitesse maximale varie le long de la voie selon une loi $V_{\max}(x)$ donnée :

   $$\partial_t\rho + \partial_x(V_{\max}(x)\rho) = 0 \quad \text{(forme conservative)},$$

   ou

   $$\partial_t\rho + V_{\max}(x)\partial_x\rho + V'_{\max}(x)\rho = 0 \quad \text{(forme non-conservative)}.$$

3. **Troisième modèle** : les véhicules adaptent leur vitesse au trafic, plus le trafic est dense, plus la vitesse est réduite, ce qui donne par exemple une loi de la forme :

   $$v = V_{\max}(1-\rho)$$

   et donc

   $$\partial_t\rho + V_{\max}\partial_x((1-\rho)\rho) = 0.$$

   Cette équation peut aussi s'écrire en fonction du champ de vitesse v :

   $$\partial_t v + \partial_x(v(v - V_{\max})) = 0.$$

Solutions

1. On peut vérifier que :
$$\rho(t,x) = \rho_0(x - tV_{\max})$$
vérifie $\partial_t\rho + V_{\max}\partial_x\rho = 0$ avec $\rho(0,x) = \rho_0(x)$.

2. et 3. Plus complexes, attendre de voir la méthode des caractéristiques !

2.1.2. Dynamique des gaz simplifiée

Exemple simple de mécanique des fluides : évolution d'un gaz dans un tube rectiligne hermétique de petite section (un modèle 1d).

Quantités

— densité du gaz $\rho(t,x)$
— vitesse moyenne des particules de gaz $v(t,x)$
— pression du gaz $p(t,x)$

On néglige la gravité et suppose que tout est régulier (en fait c'est un problème intéressant et non-trivial !).

Conservation de la masse

La conservation de la masse donne la même équation que pour le trafic routier :
$$\partial_t\rho + \partial_x(\rho\, v) = 0.$$

Bilan de quantité de mouvement

La quantité de mouvement à l'instant t_0 entre a et b est
$$\int_a^b \rho(t_0,x)v(t_0,x)\,\mathrm{d}x$$
et à l'instant t entre $X(t,t_0,a)$ et $X(t,t_0,b)$:
$$\int_{X(t,t_0,a)}^{X(t,t_0,b)} \rho(t,x)v(t,x)\,\mathrm{d}x.$$
Par la loi de Newton, la variation de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces :
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{X(t,t_0,a)}^{X(t,t_0,b)} \rho(t,x)v(t,x)\,\mathrm{d}x\right) &= \sum F_{\text{ext}} = -p(t,X(t,t_0,b)) + p(t,X(t,t_0,a)) \\ &= -\int_{X(t,t_0,a)}^{X(t,t_0,b)} \partial_x p(t,x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$
Comme précédemment, la dérivation par rapport à t donne :
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{X(t,t_0,a)}^{X(t,t_0,b)} \rho\, v\,\mathrm{d}x\right) &= \int_{X(t,t_0,a)}^{X(t,t_0,b)} \partial_t(\rho\, v)\,\mathrm{d}x + \Big[v(t,X(t,t_0,x)) \cdot \rho(t,X(t,t_0,x)v(t,X(t,t_0,x))\Big]_{x=a}^{b} \\ &= \int_{X(t,t_0,a)}^{X(t,t_0,b)} \left[\partial_t(\rho\, v) + \partial_x(\rho\, v^2)\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$
i.e.
$$\partial_t(\rho\, v) + \partial_x(\rho\, v^2) + \partial_x p = 0.$$
On a obtenu les équations d'Euler compressibles :
$$\begin{cases}\partial_t\rho + \partial_x(\rho\, v) = 0, \\ \partial_t(\rho\, v) + \partial_x(\rho\, v^2 + p) = 0.\end{cases}$$

Loi de comportement

Deux équations, mais trois inconnues : il reste à modéliser le comportement thermodynamique du gaz.

1. Gaz sans pression (ou plutôt pression constante) :

$$\begin{cases}\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0,\\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2) = 0,\end{cases}$$

formellement équivalent (si régularité et $\rho > 0$) à

$$\begin{cases}\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0,\\ \partial_t v + v\partial_x v = 0.\end{cases}$$

2. Gaz isentropique : loi thermodynamique $p = p_0\rho^\gamma$, avec $p_0 > 0$ et $\gamma > 1$:

$$\begin{cases}\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0,\\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p_0\rho^\gamma) = 0.\end{cases}$$

Par exemple $\gamma = \frac{5}{3}$ pour un gaz monoatomique et $\gamma = \frac{7}{5}$ pour un gaz diatomique.

3. Gaz isotherme : loi des gaz parfaits $p = c^2\rho$

$$\begin{cases}\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0,\\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + c^2\rho) = 0.\end{cases}$$

Si $\rho > 0$, en posant $\eta = \log\rho$, cela donne :

$$\begin{cases}\partial_t \eta + v\partial_x \eta + \partial_x v = 0,\\ \partial_t v + v\partial_x v + c^2\partial_x \eta = 0.\end{cases}$$

La linéarisation autour de zéro est :

$$\begin{cases}\partial_t \eta + \partial_x v = 0,\\ \partial_t v + c^2\partial_x \eta = 0.\end{cases}$$

c'est l'équation des ondes :

$$\partial_t^2\eta - c^2\partial_x^2\eta = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t^2 v - c^2\partial_x^2 v = 0.$$

Toutes ces équations sont des systèmes dits hyperboliques : en gros on peut toujours localement trouver un changement de variable pour que le système soit une équation de transport. Voir cours systèmes hyperboliques !

2.1.3. Modèle structuré en âge

Dans un modèle structuré en âge, la variable d'espace correspond à un âge : $\rho(t,a)$ est la densité de personnes d'âge $a \geq 0$ à l'instant t. Si μ est le taux de disparition, alors l'évolution de la densité est donnée par

$$\partial_t \rho + \partial_a \rho = -\mu(t,a)\rho.$$

Et si $\beta(t,a)$ est le taux de fécondité à l'âge a, le nombre de naissances donne une condition de bord

$$\rho(t,0) = \int_0^\infty \beta(t,a)\rho(t,a)\,\mathrm{d}a.$$

C'est une équation de transport non-conservative avec une condition au bord. L'équation de transport est non-conservative lorsque cela représente le transport d'une variable intensive (label, signal, information, etc.), typiquement des variables qui ne se somment pas.

2.2. Modèles de transport dans $\mathbb{R}^n$ *

2.2.1. Théorème de Liouville

Rappels pour $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $\boldsymbol{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$:

$$Du := \nabla u := (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u),$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} := D \cdot \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} F_i = \operatorname{tr}(D\boldsymbol{F}).$$

Dans cette section, on se place dans $\mathbb{R}^n$ et considère un champ de vitesse $\boldsymbol{v} : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ régulier (C^1 au moins) et borné (fonction et premières dérivées bornées au moins).

Définition 2.2.1 (caractéristiques)**.** Dans le contexte EDP de transport, les trajectoires ou le flot d'un champ de vecteur $\boldsymbol{v} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont appelées courbes caractéristiques ou caractéristiques :

$$\partial_t \boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)),$$
$$\boldsymbol{X}(t_0, t_0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0.$$

Par le théorème de Cauchy–Lipschitz global, elles sont définies globalement pour tout t.

Pour tout t, t_0, la fonction $\boldsymbol{X}(t, t_0, \cdot) : \boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ est dérivable en $\boldsymbol{x}_0$, notons son jacobien :

$$J(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) := \det\big(D_{\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)\big).$$

Nous allons déterminer l'équation donnant l'évolution de ce jacobien ; pour cela on rappelle la dérivée du déterminant :

Lemme 2.2.2 (dérivée du déterminant)**.** *En notant* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices* $n \times n$ *inversibles, le déterminant* $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *est dérivable et*

$$(D \det)(A)H = \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}H).$$

Preuve. Calculons d'abord la dérivée en l'identité I_n. Le déterminant étant une forme multilinéaire sur les colonnes de A, $\det A = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ alors

$$\begin{aligned}
\det(I_n + H) &= \det(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{h}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n + \boldsymbol{h}_n) \\
&= \det(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n) + \sum_{i=1}^{n} \det(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{h}_i, \dots, \boldsymbol{e}_n) + O(\|H\|^2) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} h_{ii} + O(\|H\|^2) \\
&= 1 + \operatorname{tr}(H) + O(\|H\|^2).
\end{aligned}$$

Ainsi si A est inversible

$$\det(A + H) = \det(A(I_n + A^{-1}H)) = \det(A) \det(I_n + A^{-1}H) = \det(A)\big(1 + \operatorname{tr}(A^{-1}H) + O(\|H\|^2)\big),$$

ce qui donne le résultat. □

Théorème 2.2.3 (de Liouville)**.** *Le jacobien vérifie l'équation différentielle ordinaire linéaire :*

$$\begin{aligned}
\partial_t J(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) &= \operatorname{tr}\big((D_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v})(t, \boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0))\big) J(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \\
&= (\nabla \cdot \boldsymbol{v})(t, \boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)) J(t, t_0, \boldsymbol{x}_0), \\
J(t_0, t_0, \boldsymbol{x}_0) &= 1.
\end{aligned}$$

En particulier,

$$J(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} (\nabla \cdot \boldsymbol{v})(s, \boldsymbol{X}(s, t_0, \boldsymbol{x}_0))\, \mathrm{d}s\right) > 0.$$

∗. Provient essentiellement de BOYER (Partie II, §II).

Preuve. Il faut d'abord linéariser l'équation en regardant l'équation satisfaite par la dérivée $D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$: formellement

$$\partial_t(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t,t_0,\boldsymbol{x}_0) = (D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v})(t,\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0))\,(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t,t_0,\boldsymbol{x}_0).$$

Par le lemme précédent, on peut calculer la dérivée de $J(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ comme composée de det et $(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$:

$$\begin{aligned}
\partial_t J(t,t_0,\boldsymbol{x}_0) &= \partial_t(\det(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)) \\
&= (D\det)((D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t,t_0,\boldsymbol{x}_0))\underbrace{\partial_t(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)}_{H} \\
&= \det((D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t,t_0,\boldsymbol{x}_0))\,\mathrm{tr}\big([(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)]^{-1}\partial_t(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\big) \\
&= J(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\,\mathrm{tr}\big([(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)]^{-1}(D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v})(t,\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0))\,[(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)]\big) \\
&= J(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\,\mathrm{tr}\big((D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v})(t,\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0))\big) \\
&= J(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)(\nabla\cdot\boldsymbol{v})(t,\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)).
\end{aligned}$$

Comme $\boldsymbol{X}(t_0,t_0,\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$,alors $(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t_0,t_0,\boldsymbol{x}_0) = I_n$ et donc $J(t_0,t_0,\boldsymbol{x}_0) = 1$. Vu qu'il s'agit d'une EDO linéaire la solution est en particulier donnée par l'exponentielle. □

Corollaire 2.2.4. *Si $\boldsymbol{v}$ est à divergence nulle ($\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$), alors le flot associé préserve les volumes.*

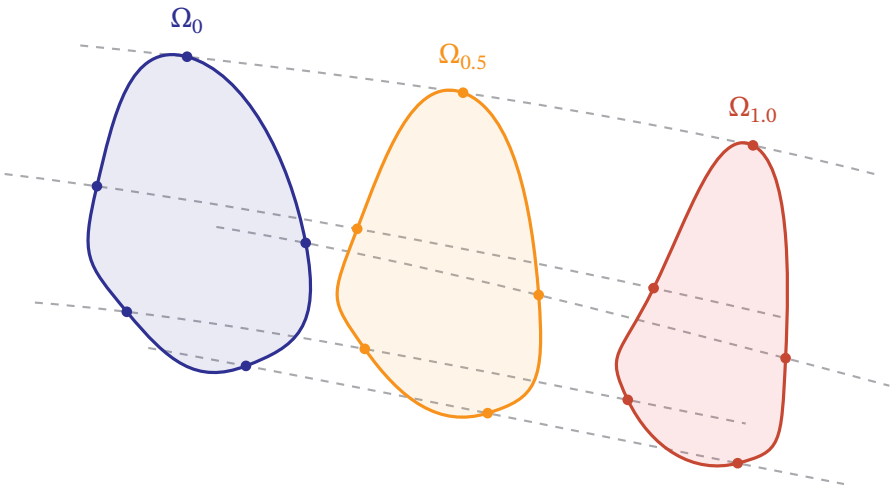
Preuve. Le théorème de Liouville montre que $\partial_t J(t,t_0,\boldsymbol{x}_0) = 0$ or $J(t_0,t_0,\boldsymbol{x}_0) = 1$ donc $J(t,t_0,\boldsymbol{x}_0) = 1$. Le théorème de changement de variable montre que pour tout domaine $A \subset \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$, le domaine $A_t = \boldsymbol{X}(t,t_0,A)$ a le même volume (même mesure) que A à l'instant t_0. □

2.2.2. Théorème de Reynolds

But généraliser le calcul suivant fait pour le trafic routier :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{X(t,t_0,a)}^{X(t,t_0,b)}\rho(t,x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_{X(t,t_0,a)}^{X(t,t_0,b)}\big[\partial_t\rho + \partial_x(\rho v)\big](t,x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout ouvert borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on note $\Omega_t := \boldsymbol{X}(t,t_0,\Omega)$ l'image de Ω par le flot entre t_0 et t.



Théorème 2.2.5 (de Reynolds). *Pour $\rho : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonction scalaire de classe C^1, l'évolution de*

$$t \mapsto \int_{\Omega_t}\rho(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Omega_t}\rho(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right) = \int_{\Omega_t}[\partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})](t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Preuve. Notons $F(t) := \int_{\Omega_t} \rho(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. Par changement de variables,

$$F(t) = \int_\Omega \rho(t,\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}))J(t,t_0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

En dérivant sous l'intégrale, puis en utilisant le théorème 2.2.3 de Liouville :

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_\Omega \Big[\partial_t\rho(t,\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x})) + \partial_t\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x})\cdot(\nabla\rho)(t,\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}))\Big]J(t,t_0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\qquad + \int_\Omega \rho(t,\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}))\,\partial_t J(t,t_0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \int_\Omega \Big[\partial_t\rho(t,\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x})) + \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}))\cdot(\nabla\rho)(t,\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}))\Big]J(t,t_0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\qquad + \int_\Omega \Big[\rho(t,\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}))\,(\nabla\cdot\boldsymbol{v})(t,\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}))\Big]J(t,t_0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Par changement de variables inverse :

$$F'(t) = \int_{\Omega_t} \Big[\partial_t\rho(t,\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})\cdot(\nabla\rho)(t,\boldsymbol{x}) + \rho(t,\boldsymbol{x})\,(\nabla\cdot\boldsymbol{v})(t,\boldsymbol{x})\Big]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

En utilisant que $\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho$, cela donne le résultat. □

En utilisant la formule de la divergence :

Proposition 2.2.6 (Formule de la divergence)**.** *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert régulier et $\boldsymbol{F} \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$, alors*

$$\int_\Omega (\nabla\cdot\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}),$$

où $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ est le vecteur normal unitaire sortant de $\partial\Omega$ et $\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})$ la mesure sur le bord.

on peut aussi écrire le théorème précédent comme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Omega_t}\rho(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right) = \int_{\Omega_t}\partial_t\rho(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega_t}\rho(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})$$

ce qui ressemble beaucoup au lemme 4.5.5 obtenu en une dimension.

Remarque 2.2.7. En prenant $\rho = 1$, on obtient la variation du volume de Ω_t, *i.e.* sa mesure :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Omega_t| = \int_{\Omega_t}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

On a retrouvé le corollaire 2.2.4 du théorème de Liouville quand $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$ mais on voit que si $\nabla\cdot\boldsymbol{v} \geq 0$ le volume augmente (dilatation), respectivement si $\nabla\cdot\boldsymbol{v} \leq 0$ il diminue (compression).

2.2.3. Exemples d'applications pour obtenir des lois de conservation

On considère un système composé d'un grand nombre de particules avec une description macroscopique. Par exemple, un fluide, des piétons dans une foule, etc. Notons $\rho(t,\boldsymbol{x})$ la densité des particules en un point $\boldsymbol{x}$ et à l'instant t, et $\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})$ la vitesse moyenne des particules.

Théorème 2.2.8 (loi de conservation de la masse)**.** *S'il n'y a ni création ni disparition de masse, alors ρ et $\boldsymbol{v}$ sont reliés par l'équation de continuité ou de conservation de la masse ou forme conservative :*

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0.$$

Si on suppose de plus que le système contient deux types de particules (par exemple rouges / bleues), on peut définir la fraction massique $\alpha(t,\boldsymbol{x}) \in [0,1]$ de la première espèce en un point $\boldsymbol{x}$ et à l'instant t.

Théorème 2.2.9 (loi de conservation des espèces)**.** *Si la densité totale ρ est strictement positive, alors α et $\boldsymbol{v}$ sont reliés par l'équation de transport ou de convection, ou forme non-conservative :*

$$\partial_t \alpha + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \alpha = 0.$$

Le lemme suivant est utilisé dans les preuves des deux théorèmes :

Lemme 2.2.10 (de du Bois-Reymond)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ vérifie l'une des deux hypothèses suivantes :*

1. *pour toute boule $B \subset \Omega$*
$$\int_B f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0,$$
2. *pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$*
$$\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0,$$

alors $f = 0$ presque partout.

Preuve. Il s'agit de résultats classiques d'analyse, voir les exercices. □

Preuve du théorème 2.2.8. Pour tout ouvert régulier Ω la quantité de matière dans Ω_t reste constante au cours de l'évolution. On a donc par le théorème 2.2.5 de Reynolds :

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Omega_t} \rho(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right) = \int_{\Omega_t} [\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

et en prenant $t = t_0$

$$\int_\Omega \big[\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\big](t_0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

En utilisant le lemme 2.2.10 de du Bois-Reymond et comme t_0 est quelconque, on obtient le résultat. □

Preuve du théorème 2.2.9. En appliquant le raisonnement à la conservation de la masse de la première espèce :

$$\partial_t(\alpha\rho) + \nabla\cdot(\alpha\rho\boldsymbol{v}) = 0$$

Par dérivation des produits et en utilisant le théorème 2.2.8

$$\alpha\underbrace{(\partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}))}_{=0} + \rho(\partial_t\alpha + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\alpha) = 0$$

et comme $\rho > 0$ on obtient le résultat. □

Ce type de raisonnements est à la base de l'obtention de modèles dans lesquels intervient un phénomène de transport par un champ de vitesse.

2.3. Solutions classiques des équations de transport *

Vocabulaire

— EDP d'évolution : EDP dont l'une des variables est le temps, les autres étant en général des variables d'espace :

$$\partial_t u = F(t,\boldsymbol{x},u,Du,\dots) = \mathcal{F}(t,\boldsymbol{x},u), \tag{2.2}$$

où $F : [0,\infty)\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\dots$ est une fonction et $\mathcal{F} : [0,\infty)\times\Omega\times C^{\cdots}([0,\infty)\times\Omega,\mathbb{R})$ une fonctionnelle (ou opérateur différentiel). Ce n'est pas une équation différentielle ordinaire.

∗. Provient essentiellement de BOYER (Partie II, §III).

— Problème de Cauchy : une EDP d'évolution avec donnée initiale à $t = 0$ donnée.

$$u(0, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}) \tag{2.3}$$

Autres notations : $u(0, \cdot) = u_0$, $u(0) = u_0$, $u|_{t=0} = u_0$.

— Une solution du problème de Cauchy est un $u(t, \boldsymbol{x})$ satisfaisant (2.2)-(2.3). On ne peut pas invoquer directement Cauchy–Lipschitz pour obtenir une solution.

2.3.1. Solution de l'équation de transport non-conservative

On se donne un champ de vitesse $\boldsymbol{v} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 borné. Pour $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$, on cherche à résoudre le problème de Cauchy de l'équation de transport sous forme non-conservative du théorème 2.2.9, *i.e.* déterminer une solution $u \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.3.1. *Pour tout $\boldsymbol{v}$ régulier et borné et $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$, il existe une unique solution $u \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ du problème de Cauchy*

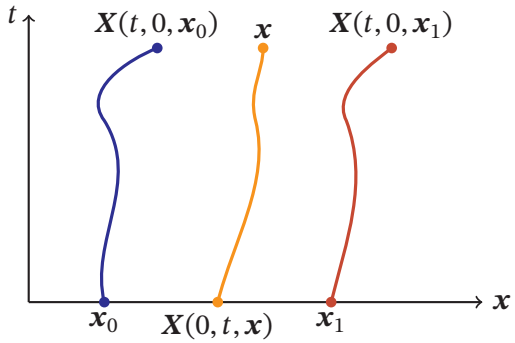
$$\begin{cases} \partial_t u + \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}) \cdot \nabla u = 0, \\ u(t = 0, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \end{cases}$$

qui est donnée par

$$u(t, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{X}(0, t, \boldsymbol{x})), \tag{2.4}$$

où $\boldsymbol{X}$ désigne les caractéristiques associées à $\boldsymbol{v}$.

Preuve. L'idée principale est que les solutions sont constantes le long des caractéristiques ; il suffit donc de chercher le pied de la caractéristique !



Montrons d'abord l'unicité, à savoir si une solution u du problème de Cauchy existe, alors elle satisfait (2.4). Soit $u \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une telle solution. On fixe $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ et on regarde les valeurs de u le long des caractéristiques. Plus précisément, on pose :

$$U(t) := u(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)).$$

et on observe que

$$U(0) = u(0, \boldsymbol{x}_0) = u_0(\boldsymbol{x}_0),$$

et que

$$\begin{aligned} U'(t) &= (\partial_t u)(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) + \partial_t \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{x}_0) \cdot (\nabla u)(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) \\ &= (\partial_t u + \boldsymbol{v} \cdot \nabla u)(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) = 0. \end{aligned}$$

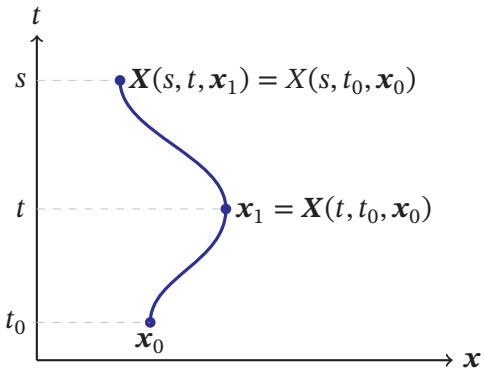
Ainsi $U(t)$ est constante, c'est-à-dire

$$u(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) = u_0(\boldsymbol{x}_0).$$

Le flot satisfait la propriété de groupe suivante :

$$\boldsymbol{X}(s, t, \boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)) = \boldsymbol{X}(s, t_0, \boldsymbol{x}_0),$$

donc en particulier :



Ainsi, en posant $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{x}_0)$, on a bien la formule attendue :

$$u(t,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{X}(0,t,\boldsymbol{x})).$$

Réciproquement, montrons maintenant l'existence, à savoir que u définie par (2.4) est bien solution. Par régularité du flot, u définie par (2.4) est bien de classe C^1. Par ailleurs :

$$u(t,\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{x}_0)) = u_0(\boldsymbol{X}(0,t,\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{x}_0))) = u_0(\boldsymbol{x}_0)$$

donc $u(t,\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{x}_0))$ ne dépend pas du temps. Par le même calcul que précédemment :

$$(\partial_t u + \boldsymbol{v}\cdot\nabla u)(t,\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{x}_0)) = 0,$$

et en choisissant $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{X}(0,t,\boldsymbol{x})$, on obtient :

$$(\partial_t u + \boldsymbol{v}\cdot\nabla u)(t,\boldsymbol{x}) = 0.$$

L'idée essentielle est :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u(t,\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0))\right) = (\partial_t u + \boldsymbol{v}\cdot\nabla u)(t,\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)).$$

□

Regardons maintenant quelques exemples de champs de vitesse particulièrement simples permettant de déterminer les caractéristiques explicitement.

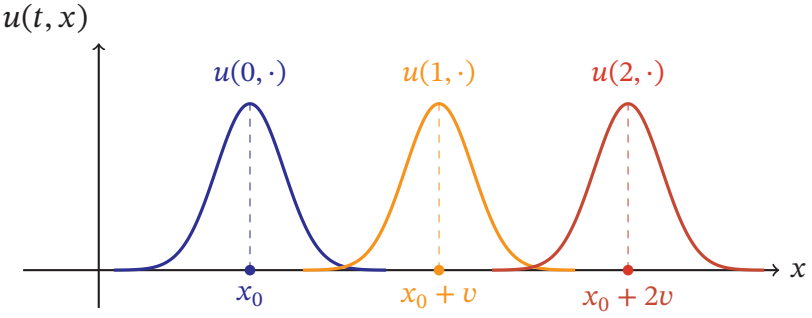
Exemple 2.3.2 (vitesse constante)**.** Si $\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, alors les caractéristiques sont :

$$\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0 + (t-t_0)\boldsymbol{v},$$

et donc la solution du transport est :

$$u(t,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{X}(0,t,\boldsymbol{x})) = u_0(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{v}).$$

On retrouve bien la solution de la fin de la §2.1.1.

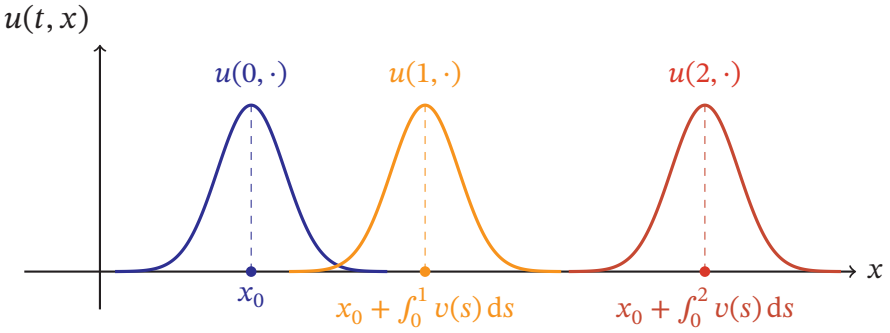


Exemple 2.3.3 (Vitesse uniforme en espace). Si $\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}(t)$ ne dépend que du temps, alors :

$$\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(s)\,\mathrm{d}s,$$

et ainsi :

$$u(t,\boldsymbol{x}) = u_0\left(\boldsymbol{x} + \int_t^0 \boldsymbol{v}(s)\,\mathrm{d}s\right) = u_0\left(\boldsymbol{x} - \int_0^t \boldsymbol{v}(s)\,\mathrm{d}s\right).$$



Exemple 2.3.4 (champ tournant). En deux dimensions, si $\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) = \omega\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\end{pmatrix}$ avec $\omega \in \mathbb{R}$, alors les caractéristiques sont des cercles

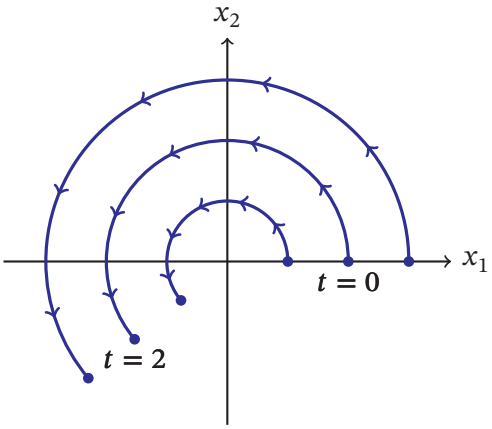
$$\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0) = R(\omega(t-t_0))\boldsymbol{x}_0,$$

où $R(\theta)$ est la matrice de rotation d'angle θ

$$R(\theta) = \exp\left(\theta\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

et donc :

$$u(t,\boldsymbol{x}) = u_0(R(-\omega t)\boldsymbol{x}).$$



Exemple 2.3.5 (transport par $v(t,x) = x$). Pour l'équation

$$\partial_t u + x\,\partial_x u = 0, \qquad u(0,x) = u_0(x),$$

les caractéristiques sont les solutions de

$$\partial_t X(t,t_0,x_0) = X(t,t_0,x_0), \qquad X(t_0,t_0,x_0) = x_0.$$

donc

$$X(t,t_0,x_0) = x_0 \mathrm{e}^{t-t_0}.$$

et la solution est donnée par :

$$u(t,x) = u_0(X(0,t,x)) = u_0(x\mathrm{e}^{-t}).$$

Exemple 2.3.6 (transport par $v(t,x) = x^2$). Pour l'équation

$$\partial_t u + x^2\,\partial_x u = 0, \qquad\qquad u(0,x) = u_0(x),$$

l'équation des caractéristiques est

$$\partial_t X(t,t_0,x_0) = X(t,t_0,x_0)^2, \qquad\qquad X(t_0,t_0,x_0) = x_0.$$

Par séparation de variables,

$$\frac{\partial_t X(t,t_0,x_0)}{X(t,t_0,x_0)^2} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_{t_0}^{t} 1\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial_s X(s,t_0,x_0)}{X(s,t_0,x_0)^2}\,\mathrm{d}s$$

et donc

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{X} \frac{1}{\gamma^2}\,\mathrm{d}\gamma = -\frac{1}{X(t,t_0,x_0)} + \frac{1}{x_0},$$

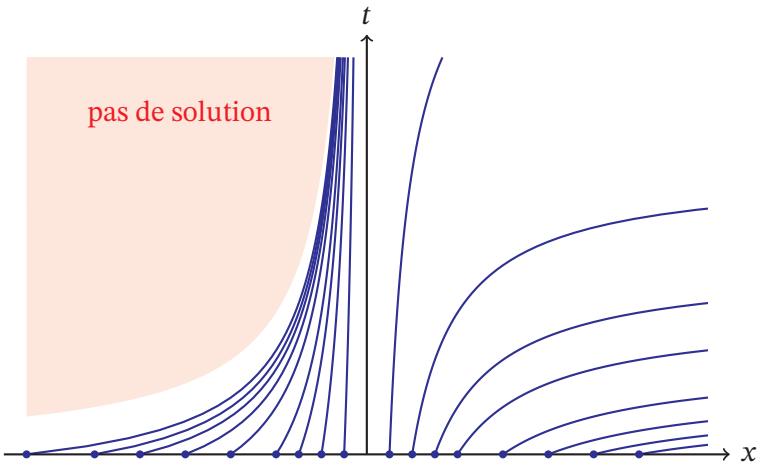
ce qui donne comme solution

$$X(t,t_0,x_0) = \frac{1}{x_0^{-1} - (t-t_0)} = \frac{x_0}{1 - x_0(t-t_0)}.$$

Par conséquent

$$u(t,x) = u_0(X(0,t,x)) = u_0\left(\frac{1}{x^{-1}+t}\right).$$

On remarque que les caractéristiques sont définies globalement si $x_0 \leq 0$ mais définies seulement localement pour $t < t_0 + |x_0|^{-1}$ si $x_0 > 0$. Donc la solution $u(t,x)$ n'est pas définie partout, seulement jusqu'à $t < \frac{1}{|x|}$ si $x < 0$ ce qui a l'air de contredire le théorème 2.3.1. **Pourquoi ?** La raison est que v n'est pas globalement Lipschitz : $\partial_x v = 2x$ n'est pas bornée.



2.3.2. Solution avec terme source

Théorème 2.3.7. *Pour tout $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $f \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, il existe une unique solution $u \in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ du problème de Cauchy avec terme source :*

$$\begin{cases} \partial_t u + \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) \cdot \nabla u = f(t,\boldsymbol{x}), \\ u(t=0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \end{cases}$$

qui est donnée par

$$u(t,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{X}(0,t,\boldsymbol{x})) + \int_0^t f(s,\boldsymbol{X}(s,t,\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}s.$$

Preuve. Comme précédemment, on suppose d'abord que la solution existe et on cherche l'évolution de u le long des caractéristiques :

$$U(t) := u(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)).$$

On observe que $U(0) = u_0(\boldsymbol{x}_0)$ et

$$U'(t) = (\partial_t u + \boldsymbol{v} \cdot \nabla u)(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) = f(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)).$$

La solution de cette équation différentielle ordinaire est donnée par intégration :

$$U(t) = U(0) + \int_0^t f(s, \boldsymbol{X}(s, 0, \boldsymbol{x}_0))\, \mathrm{d}s.$$

Par conséquent

$$u(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) = u_0(\boldsymbol{x}_0) + \int_0^t f(s, \boldsymbol{X}(s, 0, \boldsymbol{x}_0))\, \mathrm{d}s,$$

et en inversant les caractéristiques ($\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{X}(0, t, \boldsymbol{x})$)

$$u(t, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{X}(0, t, \boldsymbol{x})) + \int_0^t f(s, \boldsymbol{X}(s, t, \boldsymbol{x}))\, \mathrm{d}s.$$

Cela montre l'unicité. En allant en arrière, cela montre aussi que u définie ainsi est une solution C^1. □

2.3.3. Solution avec terme de réaction

L'équation de continuité ou forme conservative du théorème 2.2.8 se réécrit sous la forme :

$$\partial_t \rho + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + (\nabla \cdot \boldsymbol{v})\rho = 0,$$

et donc est un cas particulier d'un terme de réaction :

$$\partial_t u + \boldsymbol{v} \cdot \nabla u + au = 0,$$

où $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction C^0 donnée.

Théorème 2.3.8. *Pour tout $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{v} \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ borné, $a \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, il existe une unique solution $u \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ à l'équation de transport avec terme de réaction :*

$$\begin{cases} \partial_t u + \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}) \cdot \nabla u + a(t, \boldsymbol{x})u = 0, \\ u(t = 0, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \end{cases}$$

De plus, si $u_0(\boldsymbol{x}) > 0$ alors $u(t, \boldsymbol{x}) > 0$ pour tout $t, \boldsymbol{x}$.

Preuve. Par la même démarche que précédemment, en posant

$$U(t) := u(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{x}_0))$$

alors

$$U'(t) = (\partial_t u + \boldsymbol{v} \cdot \nabla u)(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) = -a(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{x}_0))u(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) = -a(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{x}_0))U(t).$$

C'est une équation différentielle ordinaire linéaire, ainsi

$$U(t) = U(0) \exp\left(- \int_0^t a(s, \boldsymbol{X}(s, 0, \boldsymbol{x}_0))\, \mathrm{d}s \right),$$

donc

$$u(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) = u_0(\boldsymbol{x}_0) \exp\left(- \int_0^t a(s, \boldsymbol{X}(s, 0, \boldsymbol{x}_0))\, \mathrm{d}s \right)$$

et en inversant

$$u(t, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{X}(0, t, \boldsymbol{x})) \exp\left(- \int_0^t a(s, \boldsymbol{X}(s, t, \boldsymbol{x}))\, \mathrm{d}s \right).$$

Il reste à montrer que u ainsi définie est bien une solution C^1. La formule implique clairement que si $u_0 > 0$, alors $u > 0$. □

Corollaire 2.3.9. *Pour l'équation de continuité ou forme conservative :*

$$\begin{cases}\partial_t u + \nabla \cdot (\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})u) = 0,\\ u(t=0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}),\end{cases}$$

la solution unique est donnée par

$$u(t,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{X}(0,t,\boldsymbol{x}))J(0,t,\boldsymbol{x}).$$

Preuve. L'équation de continuité correspond à $a(t,\boldsymbol{x}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{v})(t,\boldsymbol{x})$, donc par le théorème précédent

$$u(t,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{X}(0,t,\boldsymbol{x}))\, \exp\left(-\int_0^t (\nabla \cdot \boldsymbol{v})(s,\boldsymbol{X}(s,t,\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}s\right).$$

D'un autre côté, par le théorème 2.2.3 de Liouville

$$J(t,t_0,\boldsymbol{x}_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t (\nabla \cdot \boldsymbol{v})(s,\boldsymbol{X}(s,t_0,\boldsymbol{x}_0))\,\mathrm{d}s\right)$$

et en changeant de variables $t_0 = t$, $t = 0$, $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}$:

$$J(0,t,\boldsymbol{x}) = \exp\left(-\int_0^t (\nabla \cdot \boldsymbol{v})(s,\boldsymbol{X}(s,t,\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}s\right).$$

□

Exemple 2.3.10 (forme conservative avec $v(t,x) = x$)**.** Considérons la forme conservative suivante :

$$\partial_t u + \partial_x(xu) = 0, \qquad u(0,x) = u_0(x).$$

Les caractéristiques sont comme précédemment

$$X(t,t_0,x_0) = x_0 \mathrm{e}^{t-t_0}$$

et en particulier :

$$J(t,t_0,x_0) := (\partial_{x_0} X)(t,t_0,x_0) = \mathrm{e}^{t-t_0}.$$

Par conséquent, le corollaire 2.3.9 donne

$$u(t,x) = u_0(X(0,t,x))J(0,t,x) = u_0(x\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t}.$$

De manière équivalente, on peut résoudre l'évolution de u le long des caractéristiques. En posant

$$U(t,x_0) = u(t,X(t,0,x_0)),$$

alors

$$(\partial_t U)(t,x_0) = (\partial_t u + x\partial_x u)(t,X(t,0,x_0)) = -u(t,X(t,0,x_0)) = -U(t,x_0),$$

donc

$$U(t,x_0) = u_0(x_0)\mathrm{e}^{-t},$$

et en inversant ($x = x_0\mathrm{e}^t$, $x_0 = x\mathrm{e}^{-t}$) :

$$u(t,x) = u_0(x\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t}.$$

2.3.4. Solution de l'équation de transport semi-linéaire

Théorème 2.3.11. *Pour tout $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{v} \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ borné, $c \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ borné, il existe une unique solution $u \in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ à l'équation de transport semi-linéaire*

$$\begin{cases} \partial_t u + \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})\cdot\nabla u = c(t,\boldsymbol{x},u), \\ u(t=0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}). \end{cases}$$

Preuve. Comme précédemment, on pose :

$$U(t,\boldsymbol{x}_0) := u(t,\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{x}_0))$$

et

$$\begin{aligned} \partial_t U(t,\boldsymbol{x}_0) &= (\partial_t u + \boldsymbol{v}\cdot\nabla u)(t,\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{x}_0)) \\ &= c(t,\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{x}_0), u(t,\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{x}_0))) \\ &= c(t,\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{x}_0), U(t,\boldsymbol{x}_0)), \end{aligned}$$

avec $U(0,\boldsymbol{x}_0) = u_0(\boldsymbol{x}_0)$. C'est une équation différentielle ordinaire pour U et par Cauchy–Lipschitz, il existe une solution globale (ou seulement locale en $(t,\boldsymbol{x}_0)$). Donc $u(t,\boldsymbol{X}(t,0,\boldsymbol{x}_0)) = U(t,\boldsymbol{x}_0)$, et en inversant avec $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{X}(0,t,\boldsymbol{x})$, on a :

$$u(t,\boldsymbol{x}) = U(t,\boldsymbol{X}(0,t,\boldsymbol{x})).$$

□

Exemple 2.3.12. Considérons l'équation de transport semi-linéaire suivante :

$$\partial_t u + v\partial_x u = u^2, \qquad u(0,x) = u_0(x),$$

pour $v \in \mathbb{R}$ et $u_0(x) = \cos(x)$. Les caractéristiques sont

$$(\partial_t X)(t,t_0,x_0) = v \qquad \text{donc} \qquad X(t,t_0,x_0) = x_0 + (t-t_0)v.$$

L'évolution de

$$U(t,x_0) := u(t,x_0+tv),$$

est donnée par

$$(\partial_t U)(t,x_0) = (\partial_t u + v\partial_x u)(t,x_0+tv) = u(t,x_0+tv)^2 = U(t,x_0)^2,$$

dont la solution est

$$U(t,x_0) = \frac{u_0(x_0)}{1-u_0(x_0)t}.$$

En inversant $x = x_0 + tv$, alors

$$u(t,x) = U(t,x-tv) = \frac{u_0(x-tv)}{1-u_0(x-tv)t} = \frac{\cos(x-tv)}{1-\cos(x-tv)t}.$$

Remarquons que la solution explose quand $1-\cos(x-tv)t = 0$ *i.e.* $\cos(x-tv) = \frac{1}{t}$. En temps petit, la solution locale existe, mais il y a une première explosion à $t=1$, en $\cos(x-tv) = 1$ *i.e.* en $x = tv + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Cela semble à nouveau contredire le théorème 2.3.11. **Pourquoi ?** La raison est que $c(t,x,u) = u^2$ n'est pas globalement Lipschitz : $\partial_u c = 2u$ n'est pas bornée.

2.3.5. Solution de l'équation de transport quasi-linéaire

Théorème 2.3.13. *Pour tout $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{v} \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ et $c \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornés, il existe $T>0$ et une unique solution $u \in C^1([0,T)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ à l'équation de transport quasi-linéaire*

$$\begin{cases}\partial_t u + \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x},u)\cdot\nabla u = c(t,\boldsymbol{x},u),\\ u(t=0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}).\end{cases}$$

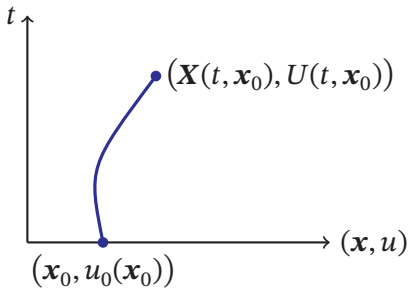
Preuve. Soient $\boldsymbol{X}$ et U les caractéristiques de $\boldsymbol{v}$ et c :

$$\begin{cases}\partial_t \boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x}_0),U(t,\boldsymbol{x}_0)), & \boldsymbol{X}(0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0,\\ \partial_t U(t,\boldsymbol{x}_0) = c(t,\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x}_0),U(t,\boldsymbol{x}_0)), & U(0,\boldsymbol{x}_0)=u_0(\boldsymbol{x}_0).\end{cases}$$

Attention, maintenant l'équation sur $\boldsymbol{X}$ dépend de U, donc de u_0 ! La solution est donnée de manière implicite par :

$$u(t,\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x}_0)) = U(t,\boldsymbol{x}_0)$$

Car sa dérivée en temps est l'équation et en $t=0$, on retrouve la donnée initiale. Reste à inverser les caractéristiques, mais on ne peut pas le faire comme précédent, car il faudrait connaître $U(t,\boldsymbol{x}_0)$, cela ne suffit plus d'avoir $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x}_0)$.



Commençons par une preuve plus simple qui permet d'inverser les caractéristiques localement en temps et espace. L'application $\Phi : \mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ définie par $\Phi(t,\boldsymbol{x}_0) = (t,\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x}_0))$ a pour dérivée :

$$(D\Phi)(0,\boldsymbol{x}_0) = ((\partial_t\Phi)(0,\boldsymbol{x}_0),(\nabla\Phi)(0,\boldsymbol{x}_0)) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \partial_t\boldsymbol{X}(0,\boldsymbol{x}_0) & (\nabla_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(0,\boldsymbol{x}_0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \boldsymbol{v}(0,\boldsymbol{x}_0,u_0(\boldsymbol{x}_0)) & I_n\end{pmatrix},$$

donc $\det(D\Phi)(0,\boldsymbol{x}_0) = 1 \neq 0$, donc par le théorème d'inversion locale, Φ est inversible au voisinage de $(0,\boldsymbol{x}_0)$.

Pour terminer la preuve, on a envie de montrer que l'application $\boldsymbol{x}_0 \mapsto \boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x}_0)$ est inversible de classe C^1 pour $t\in[0,T)$. Pour cela, on va montrer qu'il existe $T>0$ et $\kappa\in(0,1)$ tels que pour tout $t\in[0,T)$ et $\boldsymbol{x}_0$,

$$\|(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t,\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{id}\| \leq \kappa < 1$$

En effet, cela montrera que $(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t,\boldsymbol{x}_0)$ est inversible (série de Neumann), donc par inversion locale, $\boldsymbol{x}_0 \mapsto \boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x}_0)$ est localement inversible de classe C^1, et de plus inversible globalement car perturbation uniforme en $\boldsymbol{x}_0$ de l'identité.

Pour montrer que $(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t,\boldsymbol{x}_0)$ est proche de I_n uniformément en t et $\boldsymbol{x}_0$, déterminons la linéarisation du système :

$$\begin{cases}\partial_t(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X}) = (D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v})(t,\boldsymbol{X},U)\cdot(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X}) + (D_u\boldsymbol{v})(t,\boldsymbol{X},U)\cdot(D_{\boldsymbol{x}_0}U), & (D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(0,\boldsymbol{x}_0)=I_n,\\ \partial_t(D_{\boldsymbol{x}_0}U) = (D_{\boldsymbol{x}}c)(t,\boldsymbol{X},U)\cdot(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X}) + (D_uc)(t,\boldsymbol{X},U)\cdot(D_{\boldsymbol{x}_0}U), & (D_{\boldsymbol{x}_0}U)(0,\boldsymbol{x}_0)=\nabla u_0(\boldsymbol{x}_0).\end{cases}$$

Pour $\boldsymbol{x}_0$ fixé, soit $\varphi(t) := \|(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t,\boldsymbol{x}_0)\| + \|(D_{\boldsymbol{x}_0}U)(t,\boldsymbol{x}_0)\|$. En notant $L := \max\{\|Dv\|_\infty,\|Dc\|_\infty\}$, on a

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) + 2\int_0^t L\varphi(s)\,\mathrm{d}s,$$

donc par Grönwall :

$$\varphi(t) \leq \varphi(0)\mathrm{e}^{2Lt} \leq (1+M)\mathrm{e}^{2Lt},$$

où $M := \|\nabla u_0\|_\infty$. Par la forme intégrale de l'équation différentielle et la borne précédente

$$\|(D_{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{X})(t,\boldsymbol{x}_0) - I_n\| \leq \int_0^t L\varphi(s)\,\mathrm{d}s \leq \frac{1+M}{2}(\mathrm{e}^{2Lt}-1) < 1,$$

lorsque $t < T$ en choisissant

$$T = \frac{1}{2L}\log\left(\frac{M+3}{M+1}\right) = \frac{1}{2L}\log\left(1+\frac{2}{M+1}\right).$$

Ainsi, par les théorèmes d'inversion, $\boldsymbol{x}_0 \mapsto \boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x}_0)$ est inversible pour $t \in [0,T)$ et l'unique solution est donnée par :

$$u(t,\boldsymbol{x}) = U(t,\boldsymbol{X}^{-1}(t,\boldsymbol{x})).$$

□

Exemple 2.3.14 (équation de Burgers). Considérons l'équation de Burgers sur $\mathbb{R}$

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0, \qquad u(0,x) = u_0(x).$$

Il s'agit du cas général avec $v(t,x,u) = u$ et $c(t,x,u) = 0$, donc le système de caractéristiques à résoudre est :

$$\begin{cases} \partial_t X(t,x_0) = U(t,x_0), & X(0,x_0) = x_0, \\ \partial_t U(t,x_0) = 0, & U(0,x_0) = u_0(x_0). \end{cases}$$

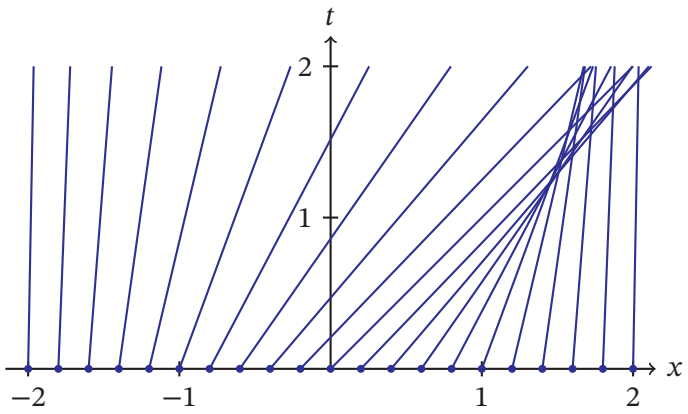
La solution est

$$U(t,x_0) = u_0(x_0) \qquad X(t,0,x_0) = x_0 + u_0(x_0)t,$$

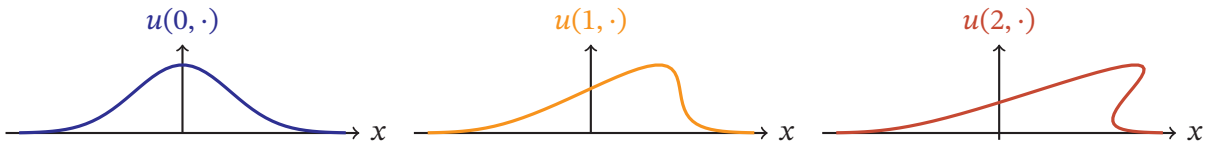
et donc la solution est donnée de manière implicite par

$$u(t, x_0 + u_0(x_0)t) = u_0(x_0).$$

Reste à inverser cette formule ! Pour fixer les idées choisissons $u_0(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Les caractéristiques se croisent à partir de $t = \frac{\mathrm{e}^{1/2}}{\sqrt{2}} \simeq 1.166$, donc il n'est pas possible d'inverser :



En fait la solution de l'équation implicite devient multivaluée, il y a ce qu'on appelle l'apparition d'un choc :



Il est facile de représenter cela graphiquement, par exemple avec Python :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as animation

def u0(x):
    """initial data"""
    return np.exp(-x**2)

def X(t,x0):
    """caracteristics"""
    return x0 + u0(x0)*t

# Représentation des caractéristiques
t = np.linspace(0,2)
for x0 in np.linspace(-2,2):
    plt.plot(X(t,x0), t, 'b')
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("t")

# Représentation de la solution
fig, ax = plt.subplots()
t = np.linspace(0, 2, 100)
x0 = np.linspace(-4, 4, 100)

line, = ax.plot(x0, u0(x0))
ax.set_title("t = 0.00")

def update(frame):
    ax.set_title(f"t = {t[frame]:.2f}")
    line.set_data(x0 + u0(x0)*t[frame], u0(x0))
    return line,

animation.FuncAnimation(fig=fig, func=update, frames=len(t), interval=30,
 ↪  repeat=False)
```

2.4. Solutions faibles des équations de transport *

Le but des solutions faibles est de définir une notion de solution qui s'affranchit de la régularité requise pour satisfaire l'équation en sens classique. Deux raisons poussent à cela :

1. Si la donnée initiale n'est pas dérivable ou même pas continue, par exemple au départ d'un feu rouge la densité est grande avant, zéro après.
2. À cause de l'apparition de chocs même à partir de données régulières.

L'objectif semble raisonnable, vu que pour l'équation de transport l'expression $u(t,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{X}(0,t,\boldsymbol{x}))$ de la solution donnée par le théorème 2.3.1 ne requiert pas de régularité de la donnée initiale pour faire sens. Le cas des chocs ne sera essentiellement pas étudié ici, attendre un cours sur les systèmes hyperboliques.

Dans cette section seule l'équation de transport sous forme non-conservative sera étudiée, mais les formulations faibles pour les autres équations sont relativement naturelles.

∗. Provient essentiellement de BOYER (Partie II, §IV).

2.4.1. Définition des solutions faibles

Définition 2.4.1. Soit $\boldsymbol{v}$ un champ de vecteurs de classe C^1. Pour toute donnée initiale $u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, une fonction $u \in L^1_{\text{loc}}([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ est solution faible de l'équation de transport

$$\begin{cases}\partial_t u + \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})\cdot\nabla u = 0,\\ u(t=0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}),\end{cases}$$

lorsque pour toute fonction test $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u(t,\boldsymbol{x})\left[\partial_t\varphi + \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{v})\right](t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{x})\varphi(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

Comme φ est lisse à support compact, l'intégrabilité locale de u et u_0 suffit pour donner sens à l'équation précédente.

Remarque 2.4.2. Il est clair que les valeurs de $\varphi(t,\boldsymbol{x})$ pour $t<0$ ne jouent pas de rôle dans la définition. Donc on peut prendre $\varphi \in C^\infty_c([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ mais attention, pas $\varphi \in C^\infty_c((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$, car alors $\varphi(0,\cdot)=0$.

Pour que la définition fasse sens il faudrait que :

— Toute solution classique soit une solution faible.

— Toute solution faible qui est de plus de classe C^1 est une solution classique.

— On conserve l'existence et l'unicité de la solution : il existe une unique solution faible.

— Et si possible on aimerait bien que la formule explicite avec les caractéristiques fasse sens.

2.4.2. Équivalence fort-faible

Le but va être de montrer que toute solution classique est une solution faible et qu'une solution faible assez régulière est une solution classique. L'idée principale est l'intégration par parties : mettre les dérivées sur φ ou les enlever.

Proposition 2.4.3. *Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un domaine. Pour tout $\boldsymbol{F}\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ et $u\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$ avec $\boldsymbol{F}$ à support compact dans Ω, alors :*

$$\int_\Omega u(\nabla\cdot\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega(\nabla u)\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Preuve. Par la formule de la divergence (proposition 2.2.6), on a

$$0 = \int_{\partial\Omega} u\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = \int_\Omega \nabla\cdot(u\boldsymbol{F}) = \int_\Omega u(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) + \int_\Omega(\nabla u)\cdot\boldsymbol{F}.$$

En fait Ω peut être juste un ouvert, pas besoin de régularité. □

Exemple 2.4.4. Si $u,v\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$ avec v à support compact, alors

$$\int_\Omega u\partial_x v = -\int_\Omega \partial_x u\, v.$$

Pour le voir prendre $\boldsymbol{F} = v\boldsymbol{e}_i$.

Proposition 2.4.5. *Si $u\in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ est une solution classique du problème de transport, alors u est aussi une solution faible.*

Preuve. La stratégie est de prendre une fonction test φ, multiplier l'équation de transport par φ, intégrer sur $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, puis intégrer par parties. Explicitement, en utilisant la proposition précédente cela donne :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\partial_t u + \boldsymbol{v}\cdot\nabla u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \varphi\partial_t u\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\boldsymbol{v}\cdot\nabla u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\Big([\varphi u]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty \partial_t\varphi\, u\,\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{v})u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(0,\boldsymbol{x})u(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_t\varphi + \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{v}))u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

ce qui est la définition de solution faible puisque $u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$. □

Proposition 2.4.6. *Si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ est une solution faible et que de plus $u \in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$, alors u est une solution classique et $u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$.*

Preuve. L'idée est d'intégrer par parties à l'envers :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} u(t,\boldsymbol{x})(\partial_t\varphi + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\varphi))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{x})\varphi(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= -\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\partial_t u + \boldsymbol{v}\cdot\nabla u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}^n} u(0,\boldsymbol{x})\varphi(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{x})\varphi(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

En prenant en particulier $\varphi \in C_c^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$, prolongée par 0 pour $t \le 0$ de sorte que $\varphi(0,\boldsymbol{x}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, alors

$$0 = \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\partial_t u + \boldsymbol{v}\cdot\nabla u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,$$

et donc par le lemme 2.2.10 de du Bois-Reymond, cela donne $\partial_t u + \boldsymbol{v}\cdot\nabla u = 0$.

En prenant maintenant $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ et puisque $\partial_t u + \boldsymbol{v}\cdot\nabla u = 0$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^n}(u_0(\boldsymbol{x}) - u(0,\boldsymbol{x}))\varphi(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0,$$

ce qui par le lemme de du Bois-Reymond donne bien la condition initiale $u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$.

En résumé prendre une fonction test nulle en $t = 0$ donne l'équation, et ensuite prendre une fonction test non-nulle en $t = 0$ permet de trouver la condition initiale. □

La notion de solution faible peut aussi se voir au sens des distributions :

Proposition 2.4.7. *Si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ est une solution faible, alors u vérifie au sens des distributions :*

$$\begin{cases}\partial_t u + \nabla\cdot(u\boldsymbol{v}) - (\nabla\cdot\boldsymbol{v})u = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'((0,\infty)\times\mathbb{R}^n),\\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).\end{cases}$$

Attention : *ne pas réécrire comme $\partial_t u + \boldsymbol{v}\cdot\nabla u = 0$, car $\boldsymbol{v}\cdot\nabla u$ ne définit pas une distribution si $\boldsymbol{v}$ n'est pas lisse.*

Preuve. Pour tout $\varphi \in C_c^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$, on a par définition :

$$0 = \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\big[u\partial_t\varphi + u\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi + u(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\varphi\big]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{x})\varphi(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

En particulier, pour $\varphi \in C_c^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ cela donne :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \big[u\partial_t\varphi + u\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi + u(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\varphi\big]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&= \langle u, \partial_t\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \langle u\boldsymbol{v}, \nabla\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \langle u(\nabla\cdot\boldsymbol{v}), \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \\
&= -\langle \partial_t u, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} - \langle \nabla\cdot(u\boldsymbol{v}), \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \langle u(\nabla\cdot\boldsymbol{v}), \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \\
&= \langle -\partial_t u - \nabla\cdot(u\boldsymbol{v}) + u(\nabla\cdot\boldsymbol{v}), \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}},
\end{aligned}$$

et on obtient ainsi l'équation vérifiée au sens des distributions dans $\mathcal{D}'((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$.

Il s'agit maintenant d'obtenir la condition initiale. Pour cela en considérant maintenant une fonction $\varphi(t,\boldsymbol{x}) = \alpha(t)\psi(\boldsymbol{x})$ avec $\alpha \in C_c^\infty([0,\infty))$ et $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ cela donne :

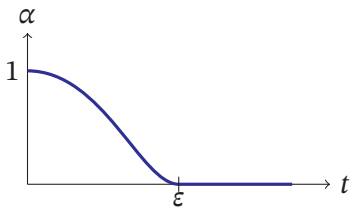
$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \big[u\alpha'\psi + u\boldsymbol{v}\cdot\nabla\psi\alpha + u(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\alpha\psi\big]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^n} u_0\psi\alpha(0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \int_0^\infty \alpha' \int_{\mathbb{R}^n} u\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \alpha \int_{\mathbb{R}^n} \big[u\boldsymbol{v}\cdot\nabla\psi + u(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\psi\big]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^n} u_0\psi\alpha(0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \int_0^\infty \alpha\Big(-\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} u\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^n} \big[u\boldsymbol{v}\cdot\nabla\psi + u(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\psi\big]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big)\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^n} \big(u_0(\boldsymbol{x}) - u(0,\boldsymbol{x})\big)\psi(\boldsymbol{x})\alpha(0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

En prenant en particulier $\alpha \in C_c^\infty((0,\infty))$ alors $\alpha(0) = 0$ et on obtient donc que

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} u\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \big[u\boldsymbol{v}\cdot\nabla\psi + u(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\psi\big]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0,$$

dans $\mathcal{D}'((0,\infty))$. Or $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n}\big[u\boldsymbol{v}\cdot\nabla\psi + u(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\psi\big]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ est $L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty))$ car $u \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$, ce qui montre que $t \mapsto \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} u\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ est aussi $L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty))$. Cela permet de s'assurer que $u(0,\cdot)$ est bien L^1_{loc}.

Finalement en prenant $\alpha \in C_c^\infty([0,\infty))$ telle que $\alpha(0) = 1$ et $\alpha(t) = 0$ si $t > \varepsilon$:



et dans la limite $\varepsilon \to 0$ les termes devant α disparaissent car sont $L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty))$ et il reste :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(u_0(\boldsymbol{x}) - u(0,\boldsymbol{x})\big)\psi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

C'est la définition de $u(0,\cdot) = u_0$ au sens des distributions. □

Exemple 2.4.8. Pour

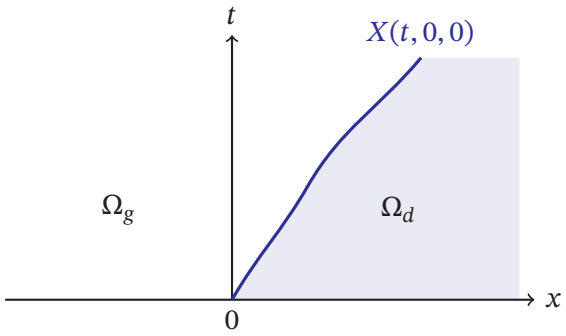
$$u_0(x) = \begin{cases} u_g(x) & \text{si } x < 0, \\ u_d(x) & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

on s'attend à ce que la solution soit de la forme

$$u(t,x) = \begin{cases} u_g(t,x) & \text{si } (t,x) \in \Omega_g \\ u_d(t,x) & \text{si } (t,x) \in \Omega_d \end{cases} \tag{2.5}$$

où u_g et u_d sont des solutions classiques dans Ω_g et Ω_d, et :

$$\Omega_g = \big\{(t,x) \mid x < X(t,0,0)\big\} \quad \text{et} \quad \Omega_d = \big\{(t,x) \mid x > X(t,0,0)\big\}.$$



Preuve. La preuve sera triviale une fois qu'on aura démontré dans les deux sections qui suivent que la formule donnée par les caractéristiques reste l'unique solution faible. □

2.4.3. Existence des solutions faibles

On sait déjà que

$$u(t,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{X}(0,t,\boldsymbol{x}))$$

est l'unique solution classique de l'équation de transport pour $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Le but va être de montrer que c'est également l'unique solution faible pour $u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

On montre d'abord l'existence :

Proposition 2.4.9. *Pour $\boldsymbol{v} \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ borné, si $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, la formule*

$$u(t,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{X}(0,t,\boldsymbol{x}))$$

définit bien $u \in L^1_{loc}((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ et est solution faible de l'équation de transport.

Preuve. Par simplicité faisons d'abord la preuve dans le cas où la vitesse est constante puis ensuite nous ferons le cas général.

Cas de la vitesse constante : $\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Il s'agit de montrer que $u(t,\boldsymbol{x}) := u_0(\boldsymbol{x}-t\boldsymbol{v})$ est bien une solution faible. Remarquons que c'est bien une fonction $L^1_{\text{loc}}((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$, la classe de u (presque partout) ne dépend pas de celle de u_0.

Prenons une fonction test $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. Par changement de variables $(t,\boldsymbol{x}) \mapsto (t,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-t\boldsymbol{v})$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} u(t,\boldsymbol{x})\left[\partial_t\varphi + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\varphi)\right](t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t &= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{x}-t\boldsymbol{v})\left[\partial_t\varphi + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi\right](t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{y})(\partial_t\varphi + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi)(t,\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{y})\partial_t\left[\varphi(t,\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{v})\right]\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

car

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varphi(t,\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{v})\right) = (\partial_t\varphi + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi)(t,\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{v}).$$

En appliquant le théorème de Fubini, cela donne

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} u(t,\boldsymbol{x})\left[\partial_t\varphi + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\varphi)\right](t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{y})\int_0^\infty \partial_t\left[\varphi(t,\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{v})\right]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{y})\left[\varphi(t,\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{v})\right]_{t=0}^\infty\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{y})\varphi(0,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},\end{aligned}$$

puisque $\varphi(t,\cdot) = 0$ pour t assez grand.

Cas général : l'idée est similaire mais il faut tenir compte du jacobien dans le changement de variable $(t, \boldsymbol{x}) = (t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{y}))$. Pour cela, nous allons avoir besoin du théorème 2.2.3 de Liouville qui donne l'évolution du jacobien $J(t, 0, \boldsymbol{y}) = \det(D_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{X})(t, 0, \boldsymbol{y})$. Soit

$$u(t, \boldsymbol{x}) := u_0(\boldsymbol{X}(0, t, \boldsymbol{x})).$$

Comme précédemment l'idée est de réécrire

$$A := \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u(t, \boldsymbol{x})(\partial_t \varphi + \nabla \cdot (\boldsymbol{v}\varphi))(t, \boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t.$$

Par changement de variables,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{X}(0, t, \boldsymbol{x}))(\partial_t \varphi + \nabla \cdot (\boldsymbol{v}\varphi)) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{y})(\partial_t \varphi + \nabla \cdot (\boldsymbol{v}\varphi))(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{y}))J(t, 0, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\varphi(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{y}))\right] = (\partial_t \varphi + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \varphi)(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{y})),$$

cela donne :

$$A = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{y}) \left(\partial_t \left[\varphi(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{y}))\right] J(t, 0, \boldsymbol{y}) + (\nabla \cdot \boldsymbol{v})(t, \boldsymbol{X})\varphi(t, \boldsymbol{X})J(t, 0, \boldsymbol{y})\right) \mathrm{d}\boldsymbol{y} \, \mathrm{d}t.$$

Le théorème 2.2.3 de Liouville est

$$\partial_t J(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) = (\nabla \cdot \boldsymbol{v})(t, \boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0))J(t, t_0, \boldsymbol{x}_0),$$

ce qui permet d'obtenir

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{y}) \left(\partial_t \left[\varphi(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{y}))\right] J(t, 0, \boldsymbol{y}) + \partial_t \left[J(t, 0, \boldsymbol{y})\right] \varphi(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{y}))\right) \mathrm{d}\boldsymbol{y} \, \mathrm{d}t. \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{y}) \partial_t \left[J(t, 0, \boldsymbol{y})\varphi(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{y}))\right] \mathrm{d}\boldsymbol{y} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{y}) \int_0^\infty \partial_t \left[J(t, 0, \boldsymbol{y})\varphi(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{y}))\right] \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{y}) \left[J(t, 0, \boldsymbol{y})\varphi(t, \boldsymbol{X}(t, 0, \boldsymbol{y}))\right]_{t=0}^\infty \mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{y})J(0, 0, \boldsymbol{y})\varphi(0, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{y})\varphi(0, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y}. \end{aligned}$$

Vu la définition de A cela montre que u est bien une solution faible. □

2.4.4. Unicité des solutions faibles

Théorème 2.4.10. *Pour $\boldsymbol{v}$ bornée et de classe C^1, et une donnée initiale $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$,*

$$u(t, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{X}(0, t, \boldsymbol{x}))$$

est l'unique solution faible du problème de Cauchy pour l'équation de transport du théorème 2.3.1.

Preuve. Le fait que u défini ainsi soit une solution faible a déjà été prouvé dans la proposition 2.4.9. Reste à montrer que c'est la seule solution. Soient $u_1, u_2 \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ deux solutions faibles (avec même donnée initiale) :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u_1(t,\boldsymbol{x})\left[\partial_t\varphi + \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{v})\right](t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{x})\varphi(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0,$$
$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u_2(t,\boldsymbol{x})\left[\partial_t\varphi + \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{v})\right](t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{x})\varphi(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

En notant $u = u_1 - u_2$ la différence des solutions et en prenant la différence des deux expressions ci-dessus :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u(t,\boldsymbol{x})\left[\partial_t\varphi + \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{v})\right](t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = 0.$$

L'unicité revient à montrer que $u = 0$ est l'unique solution faible avec $u_0 = 0$. C'est une observation très générale qui vient du fait que le problème est linéaire !

Montrons cela dans le cas où la vitesse est constante : $\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. L'idée pour montrer que $u = 0$ est d'utiliser le lemme 2.2.10 de du Bois-Reymond. Pour cela, on se donne un $\psi \in C_c^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ et cherche $\varphi \in C_c^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\partial_t\varphi + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi = \psi \forall t > 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Mais on a déjà résolu cette équation, le théorème 2.3.7 donne :

$$\varphi(t,\boldsymbol{x}) = \varphi_0(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{v}) + \int_0^t \psi(s, \boldsymbol{x} + (s-t)\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}s,$$

avec pour l'instant φ_0 non déterminée. En posant $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{v}$,

$$\varphi(t, \boldsymbol{y} + t\boldsymbol{v}) = \varphi_0(\boldsymbol{y}) + \int_0^t \psi(s, \boldsymbol{y} + s\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}s.$$

Comme on cherche φ à support compact dans $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, la limite quand $t \to \infty$ doit être nulle, ce qui est le cas en posant :

$$\varphi_0(\boldsymbol{y}) = -\int_0^\infty \psi(s, \boldsymbol{y} + s\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}s.$$

Ainsi φ est donnée par :

$$\begin{aligned}\varphi(t,\boldsymbol{x}) &= -\int_0^\infty \psi(s, \boldsymbol{x} + (s-t)\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}s + \int_0^t \psi(s, \boldsymbol{x} + (s-t)\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}s \\ &= -\int_t^\infty \psi(s, \boldsymbol{x} + (s-t)\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

En prenant cette fonction test dans la formulation de u, cela donne :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u(t,\boldsymbol{x})\psi(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = 0,$$

et comme ψ est quelconque, $u = 0$ presque partout par le lemme 2.2.10 de du Bois-Reymond.

Le cas général où $\boldsymbol{v}$ n'est pas constant est un peu plus complexe, mais l'idée est pareille (exercice) :

$$\phi(t,\boldsymbol{x}) = \phi_0(\boldsymbol{X}(0,t,\boldsymbol{x}))J(0,t,\boldsymbol{x}) + \int_0^t \psi(s,\boldsymbol{X}(s,t,\boldsymbol{x}))J(s,t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s = -\int_t^\infty \psi(s,\boldsymbol{X}(s,t,\boldsymbol{x}))J(s,t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s.$$

□

2.5. Problème avec conditions au bord *

On considère toujours un champ de vitesse $\boldsymbol{v} \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ borné. On se fixe maintenant un domaine Ω (ouvert régulier) et une donnée initiale $u_0 \in C^1(\Omega)$ et on s'intéresse au problème de Cauchy dans Ω :

$$\begin{cases} \partial_t u + \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) \cdot \nabla u = 0 & \forall t > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \\ u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}) & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega. \end{cases}$$

2.5.1. Champ tangent

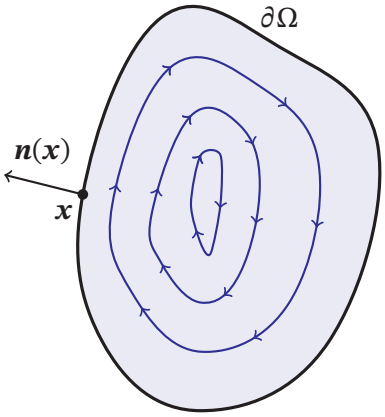
Commençons par supposer que $\boldsymbol{v}$ est tangent au bord du domaine :

$$\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$$

Alors comme attendu intuitivement, les caractéristiques issues de $\boldsymbol{x}_0$ restent dans Ω :

Proposition 2.5.1. *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$\boldsymbol{X}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0) \in \Omega \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{x}_0 \in \Omega.$$



Cela permet de résoudre le problème de Cauchy ci-dessus :

Corollaire 2.5.2. *Avec les hypothèses précédentes, l'unique solution du problème de Cauchy dans Ω est donnée par :*

$$u(t,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{X}(0,t,\boldsymbol{x})) \qquad \forall t > 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Preuve de la proposition 2.5.1. Comme Ω est régulier, il existe un difféomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi : (-\varepsilon,\varepsilon)\times\partial\Omega &\to O_\varepsilon \\ (s,\boldsymbol{y}) &\mapsto \boldsymbol{y} - s\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}), \end{aligned}$$

sur son image $O_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : d(\boldsymbol{x},\partial\Omega) < \varepsilon\}$ appelé voisinage tubulaire de $\partial\Omega$. L'application réciproque est de la forme

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : O_\varepsilon &\to (-\varepsilon,\varepsilon)\times\partial\Omega \\ \boldsymbol{x} &\mapsto (\delta(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x})), \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x})$ désigne la projection orthogonale de $\boldsymbol{x}$ sur $\partial\Omega$ et $\delta(\boldsymbol{x})$ la distance signée au bord $\partial\Omega$, donc en particulier $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}) - \delta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}))$. Par conséquent $\delta(\boldsymbol{x})^2 = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x})\|^2$ et en différenciant par rapport à x_i, il vient

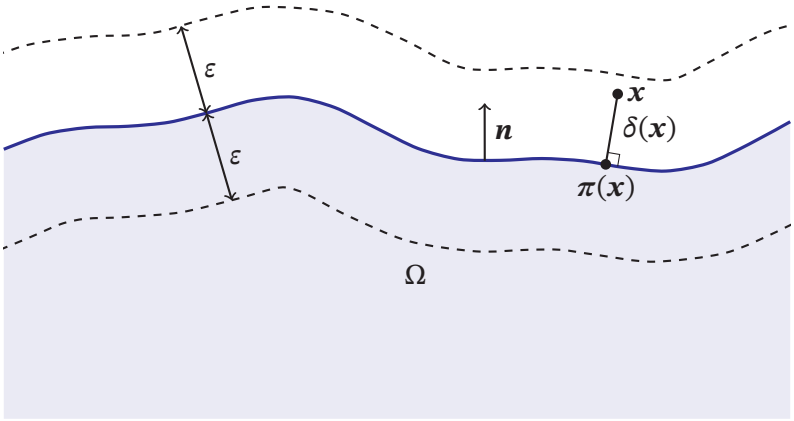
$$\begin{aligned} \delta(\boldsymbol{x})\partial_i\delta(\boldsymbol{x}) &= \partial_i(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x})) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x})) \\ &= (x_i - \pi_i(\boldsymbol{x})) - \partial_i\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x})) \\ &= -\delta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}_i(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x})) + \delta(\boldsymbol{x})\partial_i\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x})). \end{aligned}$$

∗. Provient essentiellement de BOYER (Partie II, §IV.4).

Or le vecteur $\partial_i \pi(\boldsymbol{x})$ est tangent au bord $\partial\Omega$, donc $\partial_i \pi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\pi(\boldsymbol{x})) = 0$ ce qui donne $\delta(\boldsymbol{x})\partial_i\delta(\boldsymbol{x}) = -\delta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}_i(\pi(\boldsymbol{x}))$ donc

$$\nabla\delta(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{n}(\pi(\boldsymbol{x})).$$

Tout cela est un peu compliqué à mettre en place mais est relativement intuitif graphiquement :



Considérons l'évolution de $h(t) := \delta(\boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0))$:

$$h'(t) = \partial_t \boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \cdot (\nabla\delta)(\boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)) = \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)) \cdot (\nabla\delta)(\boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)) = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla\delta)(t, \boldsymbol{X}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)).$$

Comme $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})(t, \pi(\boldsymbol{x})) = 0$ par hypothèse, alors $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla\delta)(t, \pi(\boldsymbol{x})) = 0$ et donc par l'inégalité des accroissements finis

$$\|(\boldsymbol{v} \cdot \nabla\delta)(t, \boldsymbol{x})\| = \|(\boldsymbol{v} \cdot \nabla\delta)(t, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla\delta)(t, \pi(\boldsymbol{x}))\| \leq C\|\boldsymbol{x} - \pi(\boldsymbol{x})\| = C|\delta(\boldsymbol{x})|.$$

Par conséquent, cela montre que

$$h'(t) \leq C|h(t)|,$$

donc par le lemme de Grönwall

$$|h(t)| \leq |h(t_0)|\mathrm{e}^{C(t-t_0)}.$$

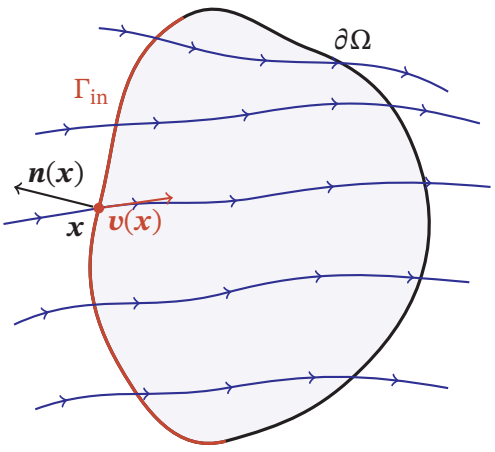
Ainsi, si $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\Omega$, alors $h(t_0) = 0$ et donc $h(t) = 0$ ce qui montre qu'une caractéristique commençant sur le bord de Ω reste sur le bord. Les caractéristiques ne pouvant pas se croiser par Cauchy–Lipschitz, celles commençant à l'intérieur de Ω y restent ! □

2.5.2. Champ non tangent

Si $\boldsymbol{v}$ n'est plus tangent au bord, alors des caractéristiques peuvent croiser le bord. En particulier pour les caractéristiques entrant dans Ω, il manque de l'information.

Pour simplifier supposons que $\boldsymbol{v}$ ne dépend pas de t : $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ et considérons

$$\Gamma_{\text{in}} = \{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega \,:\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) < 0\}.$$



Il faut donc ajouter une condition au bord sur le problème de Cauchy. Étant donné $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $u_{\text{in}} \in C^1(\mathbb{R} \times \Gamma_{\text{in}})$, on cherche une solution de :

$$\begin{cases} \partial_t u + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla u = 0 & \forall t > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u(0, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}) & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u(t, \boldsymbol{x}) = u_{\text{in}}(t, \boldsymbol{x}) & \forall t > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_{\text{in}}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une unique solution faible à ce problème de Cauchy. La preuve complète n'est pas facile mais l'idée est la suivante : on remonte les caractéristiques $s \mapsto \boldsymbol{X}(s, t, \boldsymbol{x})$ en partant de $s = t$ jusqu'à $s = 0$. Deux cas se présentent :

— Si $\boldsymbol{X}(s, t, \boldsymbol{x}) \in \Omega$ pour tout $s \in [0, t]$, alors la solution est donnée par

$$u(t, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{X}(0, t, \boldsymbol{x})),$$

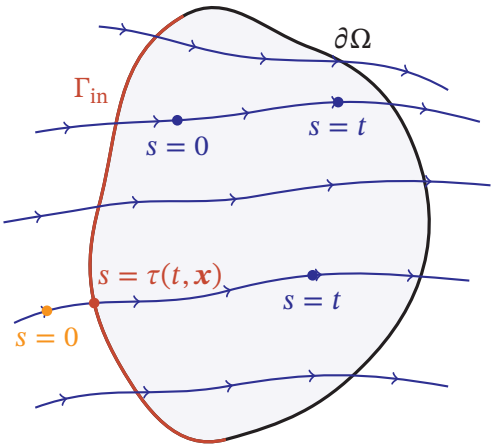
et ne dépend pas de u_{in}.

— Sinon, soit $\tau(t, \boldsymbol{x})$ le plus grand temps (*i.e.* premier en venant de t vers 0) dans $[0, t]$ pour lequel $\boldsymbol{X}(\tau(t, \boldsymbol{x}), t, \boldsymbol{x})$ appartient au bord de Ω, alors cette fois

$$u(t, \boldsymbol{x}) = u_{\text{in}}(\tau(t, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{X}(\tau(t, \boldsymbol{x}), t, \boldsymbol{x})).$$

et ne dépend pas de u_0.

À noter que généralement, c'est seulement une solution faible car il peut y avoir non-compatibilité entre u_0 et u_{in}.



Exemple 2.5.3. Sur $\Omega = (0, 1)$, considérons

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u = 0, & \forall t > 0,\ \forall x \in (0, 1), \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in (0, 1), \\ u(t, 0) = u_{\text{in}}(t), & \forall t > 0. \end{cases}$$

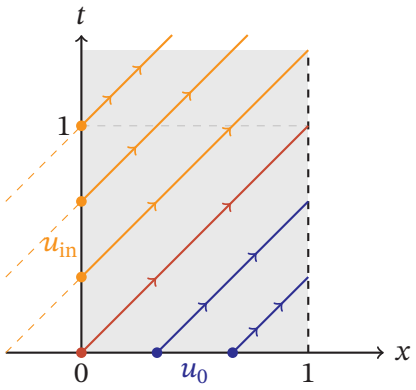
Les caractéristiques sont

$$X(t, t_0, x_0) = x_0 + (t - t_0).$$

Si $x > t$, alors la caractéristique $s \mapsto X(s, t, x)$ reste dans $(0, 1)$, mais si $x \leq t$ elle arrive en 0 quand $s = \tau(t, x) = t - x$. Ainsi :

$$u(t, x) = \begin{cases} u_0(X(0, t, x)) = u_0(x - t), & \text{si } x > t, \\ u_{\text{in}}(\tau(t, x)) = u_{\text{in}}(t - x), & \text{si } x \leq t. \end{cases}$$

En particulier si $u_0(0) \neq u_{\text{in}}(0)$ la solution n'est pas régulière sur la ligne $x = t$, c'est seulement une solution faible. Même si $u_0(0) = u_{\text{in}}(0)$, pour que u soit C^1 il faut que $u_0'(0) = -u_{\text{in}}'(0)$.



Remarque 2.5.4. L'exemple précédent suggère que les bords $\Gamma_0 := \{(t,\boldsymbol{x}) : t = 0 \text{ et } \boldsymbol{x} \in \Omega\} = \{0\} \times (0,1)$ et $\Gamma_{\text{in}} = (0,\infty) \times \{0\}$ peuvent être traités ensemble. C'est effectivement le cas si on oublie que le temps joue un rôle particulier. L'équation (2.6) peut se réécrire en posant $\boldsymbol{z} = (t,\boldsymbol{x})$ comme

$$\begin{cases} (1, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{z})) \cdot \nabla_{\boldsymbol{z}} u = 0, & \forall \boldsymbol{z} \in (0,\infty) \times \Omega \\ u(\boldsymbol{z}) = u_0(\boldsymbol{z}), & \forall \boldsymbol{z} \in \Gamma_0, \\ u(\boldsymbol{z}) = u_{\text{in}}(\boldsymbol{z}), & \forall \boldsymbol{z} \in \Gamma_{\text{in}}. \end{cases}$$

En ne distinguant plus le temps et l'espace le champ de vecteur en temps-espace est $(1, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{z}))$ et est entrant au bord du domaine $(0,\infty) \times \Omega$ exactement sur $\Gamma_0 \cup \Gamma_{\text{in}}$. Cette généralisation de ne pas distinguer le temps n'est pas étudiée dans ce cours, mais c'est le point de vue pris par exemple par EVANS (Chapter 3).

3. Équations de Laplace

3.1. Modèle 1d d'un élastique *

3.1.1. Élastique attaché

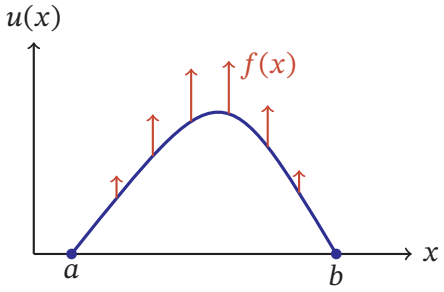
Le but est de modéliser la position d'un élastique soumis à une force.

Hypothèses

— au repos l'élastique est le segment $[a, b]$
— élastique attaché aux deux bouts (en a et b)
— force verticale agissant sur l'élastique
— élastique homogène
— déformations petites

Quantités

— $u(x)$ déformation verticale
— $f(x)$ densité de force verticale exercée en chaque point x de l'élastique
— $k > 0$ constante de rigidité de l'élastique.



But Établir une équation satisfaite par u et f.

Bilan d'énergie

Un point $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ est déplacé sous l'effet de la force verticale vers un nouveau point $\tilde{u}(x) = (x, u(x))$. Le principe physique de moindre action indique que le système va choisir la position u qui va minimiser l'énergie. L'énergie est la somme de deux énergies potentielles : (a) le travail de la force et (b) l'énergie élastique.

Proposition 3.1.1 (formulation variationnelle). *Sous l'hypothèse de petite déformation, la position de l'élastique u minimise l'énergie suivante :*

$$E_{\text{lin}}(u) := \frac{k}{2} \int_a^b u'(x)^2 \, \mathrm{d}x - \int_a^b u(x) f(x) \, \mathrm{d}x$$

∗. Provient essentiellement de BOYER (Partie III, §I) avec quelques contributions originales.

sur l'ensemble des positions admissibles :

$$X = \{v \in \mathcal{C}^1([a,b]),\ v(a) = v(b) = 0\},$$

i.e.

$$E_{\text{lin}}(u) = \inf_{v \in X} E_{\text{lin}}(v).$$

Preuve. L'énergie potentielle est l'opposé du travail des forces par rapport au déplacement

$$E_f(u) := -\int_a^b u(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le signe moins est naturel : par exemple pour la gravité, f pointe vers le bas ($f < 0$) et l'énergie potentielle est d'autant plus grande que u est haut. L'énergie potentielle élastique due à la déformation est proportionnelle à la variation de longueur de l'élastique :

$$\begin{aligned}
E_{\text{el}}(u) &:= k\,[|\tilde{u}([a,b])| - |[a,b]|] \\
&= k\left[\int_{\tilde{u}} 1\,\mathrm{d}s - \int_a^b \mathrm{d}x\right] \\
&= k\left[\int_a^b \|\tilde{u}'(x)\|\,\mathrm{d}x - \int_a^b \mathrm{d}x\right] = k\left[\int_a^b \sqrt{1+u'(x)^2}\,\mathrm{d}x - \int_a^b \mathrm{d}x\right] \\
&= k\int_a^b \left(\sqrt{1+u'(x)^2} - 1\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

L'énergie totale est donc

$$E(u) := E_f(u) + E_{\text{el}}(u) = k\int_a^b \left(\sqrt{1+u'(x)^2} - 1\right)\mathrm{d}x - \int_a^b u(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Par hypothèse de petites déformations, u et u' sont petits (f aussi !) donc en utilisant que

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4),$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
E(\varepsilon u) &= k\int_a^b \left(\sqrt{1+\varepsilon^2 u'(x)^2} - 1\right)\mathrm{d}x - \varepsilon\int_a^b u(x) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= k\int_a^b \frac{1}{2}\varepsilon^2 u'(x)^2\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varepsilon u(x) f(x)\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^4) \\
&= E_{\text{lin}}(\varepsilon u) + O(\varepsilon^4),
\end{aligned}$$

où

$$E_{\text{lin}}(u) := \frac{k}{2}\int_a^b u'(x)^2\,\mathrm{d}x - \int_a^b u(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Par minimisation de l'énergie :

$$E_{\text{lin}}(u) = \inf_{v \in X} E_{\text{lin}}(v) \qquad \text{où} \qquad X = \left\{v \in \mathcal{C}^1([a,b]),\ v(a) = v(b) = 0\right\}.$$

□

Ensuite, déterminons une condition nécessaire et suffisante pour que u soit le minimum :

Proposition 3.1.2 (formulation faible)**.** *Une fonction $u \in X$ vérifie*

$$E_{\text{lin}}(u) = \inf_{v \in X} E_{\text{lin}}(v)$$

si et seulement si u est solution de :

$$k \int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in X.$$

Cette dernière expression sera appelée formulation faible par la suite.

Preuve. Si $u \in X$ est un minimum de E_{lin}, alors $E_{\text{lin}}(u + tv) \geq E_{\text{lin}}(u)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Explicitement :

$$\begin{aligned} E_{\text{lin}}(u + tv) &= \frac{k}{2} \int_a^b (u'(x) + tv'(x))^2\,\mathrm{d}x - \int_a^b (u(x) + tv(x))f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= E_{\text{lin}}(u) + t\left[k \int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right] + \frac{t^2 k}{2} \int_a^b v'(x)^2\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$t\left[k \int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right] + \frac{t^2 k}{2} \int_a^b v'(x)^2\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Si $t > 0$, en divisant par t puis en faisant $t \to 0^+$, on a

$$k \int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

et si $t < 0$, avec $t \to 0^-$, on a

$$k \int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \leq 0.$$

On en déduit donc que si u est un minimum alors

$$k \int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in X.$$

Réciproquement, u vérifie cette égalité pour tout $v \in X$, alors

$$E_{\text{lin}}(u + v) = E_{\text{lin}}(u) + \frac{k}{2} \int_a^b v'(x)^2\,\mathrm{d}x \geq E(u),$$

et donc u est un minimum de E_{lin}. □

Finalement, cela permet d'obtenir une équation reliant u et f :

Théorème 3.1.3 (formulation forte)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Si u est un minimum de E_{lin} et $u \in C^2([a,b])$, alors u satisfait le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} -k\partial_x^2 u = f & \text{dans } (a,b), \\ u = 0 & \text{en } a, b. \end{cases}$$

Réciproquement, si $u \in C^2([a,b])$ est une solution de ce problème alors u est un minimum de E_{lin}.

Preuve. Par la proposition 3.1.2,

$$-k\int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall v \in X.$$

Comme $u \in C^2$, en intégrant par parties :

$$\int_a^b \big(ku''(x) + f(x)\big)v(x)\,\mathrm{d}x - k\big[u'(x)v(x)\big]_{x=a}^{b} = 0.$$

Comme $v \in X$, $v(a) = v(b) = 0$ donc :

$$\int_a^b \big(ku''(x) + f(x)\big)v(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

et par le lemme 2.2.10 de du Bois-Reymond,

$$ku''(x) + f(x) = 0.$$

Comme par hypothèse $u \in X$, $u(a) = u(b) = 0$.

Réciproquement, si $u \in C^2$ vérifie $-k\partial_x^2 u = f$, alors en multipliant par $v \in X$ et intégrant par parties :

$$k\int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $u \in C^2$ et $u(a) = u(b) = 0$, on a $u \in X$ et la proposition 3.1.2 termine la preuve. □

3.1.2. Élastique non attaché

On enlève maintenant l'hypothèse que l'élastique est attaché aux bouts. L'expression pour l'énergie reste

$$E_{\text{lin}}(u) = \frac{k}{2}\int_a^b u'(x)^2\,\mathrm{d}x - \int_a^b u(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

mais on veut qu'elle soit invariante par translation $u + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. C'est le cas uniquement si :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Maintenant, il ne faut plus minimiser sur X mais sur $C^1([a,b])$ et on a donc une infinité de minima. Si on n'en veut pas une infinité, il faut quotienter par les constantes et minimiser par exemple sur :

$$\tilde{X} = \left\{v \in C^1([a,b]),\ \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x = 0\right\} \quad \text{ou} \quad \hat{X} = \{v \in C^1([a,b]),\ v(a) = 0\}.$$

La proposition 3.1.2 reste vraie : $u \in C^1([a,b])$ est un minimum de E sur $C^1([a,b])$ si et seulement si u est solution de :

$$k\int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in C^1([a,b]),$$

y compris en remplaçant $C^1([a,b])$ par $\tilde{X}$ partout.

Théorème 3.1.4 (formulation forte). *Si $u \in C^2([a,b])$ est un minimum de E sur $C^1([a,b])$ ou $\tilde{X}$, alors u satisfait le problème de Neumann (homogène) suivant :*

$$\begin{cases} -k\partial_x^2 u = f & \text{dans } (a,b), \\ k\partial_x u = 0 & \text{en } a, b. \end{cases}$$

Réciproquement, si $u \in C^2([a,b])$ est une solution de ce problème, alors u est un minimum de E sur $C^1([a,b])$. Si de plus $u \in \tilde{X}$, alors u minimise E sur $\tilde{X}$.

Preuve. Si $u \in C^2$ est un minimum de E sur $C^1([a,b])$ alors

$$-k\int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall v \in C^1([a,b]),$$

et en intégrant par parties :

$$\int_a^b \big(ku''(x) + f(x)\big)v(x)\,\mathrm{d}x - k\big[u'(x)v(x)\big]_{x=a}^b = 0.$$

En prenant en particulier $v \in C_c^\infty((a,b))$ alors $v(a) = v(b) = 0$ et le lemme 2.2.10 de du Bois-Reymond donne :

$$ku''(x) + f(x) = 0 \qquad \forall x \in (a,b).$$

Donc :

$$ku'(b)v(b) - ku'(a)v(a) = 0 \qquad \forall v \in C^1([a,b]),$$

ce qui donne :

$$u'(b) = u'(a) = 0.$$

Si on considère un minimum sur $\tilde{X} = \{v \in C^1([a,b]),\ \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x = 0\}$, alors en prenant $v(a) = v(b) = 0$, cela donne :

$$ku''(x) + f(x) = c \in \mathbb{R},$$

et donc, comme avant, $u'(b) = u'(a) = 0$. En intégrant :

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(ku''(x) + f(x)\big)\,\mathrm{d}x = k\big[u'(x)\big]_{x=a}^b + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

donc $c = 0$.

Réciproquement, si $u \in C^2([a,b])$ vérifie $ku''(x) + f(x) = 0$, alors en intégrant par parties :

$$0 = \int_a^b \big(ku''(x) + f(x)\big)v(x)\,\mathrm{d}x = k\big[u'(x)v(x)\big]_{x=a}^b - k\int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $u'(a) = u'(b) = 0$, cela termine la preuve. Idem si $u \in C^2([a,b]) \cap \tilde{X}$.

Sur $\hat{X} = \{v \in C^1([a,b]),\ v(a) = 0\}$ l'idée est pareille : exercice ! □

3.2. Modèle d'une membrane *

Le but est de modéliser la forme d'une membrane élastique soumise à des forces.

Hypothèses et grandeurs :

- au repos la membrane est un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
- sur une partie Γ_d du bord, la membrane est fixée à une hauteur $h(\boldsymbol{x})$.
- sur une partie Γ_n du bord (disjointe de Γ_d), une force $g(\boldsymbol{x})$ agit dessus.
- une force verticale $f(\boldsymbol{x})$ agit sur la membrane.
- membrane avec constante de rigidité non homogène, mais isotrope $k \in C^1(\bar{\Omega})$ avec $k(\boldsymbol{x}) > 0$.

Proposition 3.2.1 (formulation variationnelle)**.** *Sous l'hypothèse de petite déformation, la position de la membrane u minimise l'énergie suivante :*

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega k(\boldsymbol{x})\|\nabla u(\boldsymbol{x})\|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_\Omega f(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_n} g(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}),$$

sur l'ensemble des positions admissibles :

$$X = \big\{v \in C^1(\bar{\Omega}),\ v|_{\Gamma_d} = h\big\}.$$

∗. Provient en partie de BOYER (Partie III, §I) avec des contributions originales.

Preuve. L'énergie potentielle due au travail de f par rapport au déplacement u est

$$E_f(u) := -\int_\Omega f(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Celle du travail de g sur le bord Γ_n est

$$E_g(u) := -\int_{\Gamma_n} g(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}).$$

L'énergie potentielle élastique due à la déformation de la membrane est proportionnelle à la variation de l'aire de la membrane. La surface est paramétrée par $\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}))$ et les vecteurs tangents sont

$$\partial_1\tilde{u} = (1, 0, \partial_1 u) \qquad \text{et} \qquad \partial_2\tilde{u} = (0, 1, \partial_2 u),$$

et l'élément d'aire est la norme de leur produit vectoriel :

$$\|\partial_1\tilde{u} \wedge \partial_2\tilde{u}\| = \|(-\partial_1 u, -\partial_2 u, 1)\| = \sqrt{1 + (\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2} = \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}.$$

Ainsi l'énergie élastique est

$$E_{\mathrm{el}}(u) := \int_\Omega k(\boldsymbol{x})\Big(\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} - 1\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \approx \frac{1}{2}\int_\Omega k(\boldsymbol{x})\|\nabla u\|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

avec l'hypothèse des petites déformations. La somme des énergies donne bien le résultat annoncé. □

Remarque 3.2.2. Si $\Gamma_d = \emptyset$, alors l'énergie n'est pas bornée inférieurement en prenant $u + c$, sauf si :

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_n} g\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, alors le problème de minimisation n'a pas de sens. C'est physiquement cohérent, car cela correspond à avoir une somme des forces nulle.

Proposition 3.2.3 (formulation faible)**.** *Une fonction $u \in X$ est un minimum de E si et seulement si elle satisfait :*

$$\int_\Omega k(\boldsymbol{x})\nabla u(\boldsymbol{x})\cdot\nabla v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_n} g(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \qquad \forall v \in X_0,$$

où

$$X_0 := \big\{v \in C^1(\bar{\Omega}),\ v|_{\Gamma_d} = 0\big\}.$$

Preuve. Pour $u \in X$ et $v \in X_0$, on a :

$$\begin{aligned} E(u + tv) &= \frac{1}{2}\int_\Omega k(\boldsymbol{x})\|\nabla u + t\nabla v\|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_\Omega f(u + tv)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_n} g(u + tv)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\ &= E(u) + t\left[\int_\Omega k(\boldsymbol{x})\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_\Omega fv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_n} gv\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\right] + \frac{t^2}{2}\int_\Omega k(\boldsymbol{x})\|\nabla v\|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

et le reste de la preuve est identique au cas 1d de la proposition 3.1.2. □

Théorème 3.2.4 (formulation forte)**.** *Si $u \in X$ est un minimum de E et que $u \in C^2(\bar{\Omega})$, alors u satisfait le problème mixte suivant :*

$$\begin{cases} -\nabla\cdot\big(k(\boldsymbol{x})\nabla u\big) = f & \text{dans } \Omega, \\ k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}\cdot\nabla u = g & \text{sur } \Gamma_n, \\ u = h & \text{sur } \Gamma_d, \\ k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}\cdot\nabla u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus (\Gamma_d \cup \Gamma_n). \end{cases}$$

Réciproquement, si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ est une solution de ce problème, alors u est un minimum de E.

Remarque 3.2.5. Quand $k(\boldsymbol{x}) = 1$, c'est l'équation de Poisson :

$$-\Delta u = f.$$

La condition $u = h$ sur Γ_d est appelée condition au bord de Dirichlet, la condition $k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n} \cdot \nabla u = g$ sur Γ_n condition au bord de Neumann et la condition $k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n} \cdot \nabla u = 0$ sur le reste du bord condition de Neumann homogène.

Preuve. Par proposition 3.2.3, pour tout $v \in X_0$,

$$-\int_\Omega k(\boldsymbol{x})\nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega f v \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_n} g v \, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) = 0$$

et comme $u \in C^2(\Omega)$,

$$-\int_\Omega \nabla \cdot (k(\boldsymbol{x})\nabla u \, v) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla \cdot (k(\boldsymbol{x})\nabla u) v \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega f v \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_n} g v \, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) = 0.$$

ce qui par la formule de la divergence donne

$$-\int_{\partial\Omega} k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n} \cdot \nabla u \, v \, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) + \int_\Omega \nabla \cdot (k(\boldsymbol{x})\nabla u) v \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega f v \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_n} g v \, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) = 0.$$

En prenant $v \in C_c^\infty(\Omega)$, alors $v|_{\partial\Omega} = 0$ et donc par le lemme 2.2.10 de du Bois-Reymond

$$\nabla \cdot (k(\boldsymbol{x})\nabla u) + f = 0.$$

Ainsi il reste :

$$-\int_{\partial\Omega} k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n} \cdot \nabla u \, v \, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) + \int_{\Gamma_n} g v \, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Comme $v|_{\Gamma_d} = 0$, et par décomposition du bord cela est équivalent à

$$-\int_{\partial\Omega\setminus(\Gamma_d\cup\Gamma_n)} k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n} \cdot \nabla u \, v \, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) + \int_{\Gamma_n} \big(g - k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n} \cdot \nabla u\big) v \, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) = 0,$$

ce qui donne par le lemme 2.2.10 de du Bois-Reymond :

$$\begin{cases} k\boldsymbol{n} \cdot \nabla u = g & \text{sur } \Gamma_n, \\ k\boldsymbol{n} \cdot \nabla u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus (\Gamma_d \cup \Gamma_n). \end{cases}$$

La réciproque se fait en intégrant par parties à l'envers. □

Remarque 3.2.6. La partie du bord $\partial\Omega \setminus (\Gamma_d \cup \Gamma_n)$ où on ne fait rien, correspond à étendre g de Γ_n à $\partial\Omega \setminus \Gamma_d$ par zéro !

Pour résumer la stratégie générale consiste à déterminer une énergie à minimiser ou formulation variationnelle (propositions 3.1.1 et 3.2.1), puis déterminer une formulation équivalente dite formulation faible (propositions 3.1.2 et 3.2.3) et enfin d'arriver à une formulation de type EDP aussi appelée formulation forte (théorèmes 3.1.3 et 3.2.4).

Il est facile de montrer que le problème admet au plus une solution. La question de l'existence d'une solution est plus compliquée et sera traitée dans le reste du chapitre.

Théorème 3.2.7 (unicité). *Le problème du théorème 3.2.4 admet au plus une solution $u \in C^2(\bar{\Omega})$, à constantes près si $\Gamma_d = \phi$.*

Preuve. Si $u_1, u_2 \in C^2(\bar{\Omega})$ sont deux solutions avec mêmes f, g, et h, alors $u := u_1 - u_2$ est solution du problème homogène :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \big(k(\boldsymbol{x})\nabla u\big) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n} \cdot \nabla u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_d, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_d, \end{cases}$$

donc par la proposition 3.2.3

$$\int_\Omega k(\boldsymbol{x})\nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \qquad \forall v \in X_0.$$

Comme $u \in X_0$, alors en posant $v = u$,

$$\int_\Omega k(\boldsymbol{x})\|\nabla u(\boldsymbol{x})\|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

Vu que $k(\boldsymbol{x}) > 0$, cela donne $\|\nabla u(\boldsymbol{x})\|^2 = 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$ donc $u(\boldsymbol{x}) = c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$. Si $\Gamma_d \neq \emptyset$ alors $u(\boldsymbol{x}) = 0$ pour $\boldsymbol{x} \in \Gamma_d$ donc $c = 0$. Si $\Gamma_d = \emptyset$, alors on a seulement $u(\boldsymbol{x}) = c$, *i.e.* u_1 et u_2 sont égales à constante près. □

3.3. Solutions classiques *

On s'intéresse ici à des solutions classiques, c'est-à-dire au moins C^2 du problème dérivé à la section précédente. Pour simplifier, on considère que $k(\boldsymbol{x}) = 1$ et dans un premier temps on ne s'intéresse pas aux conditions au bord, mais seulement à l'équation dans $\Omega = \mathbb{R}^n$:

$$-\Delta u = f.$$

3.3.1. Solution fondamentale

Une bonne façon de commencer est d'étudier des solutions explicites, puis, comme l'équation est linéaire, d'essayer ensuite de les superposer. Pour cela cherchons les solutions radiales dans $\Omega = \mathbb{R}^n$ avec $f = 0$. Cherchons une solution de $\Delta u = 0$ sous la forme $u(\boldsymbol{x}) = v(|\boldsymbol{x}|)$ avec $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. On a :

$$\nabla(|\boldsymbol{x}|) = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \qquad (\boldsymbol{x} \neq 0),$$

donc

$$(\nabla u)(\boldsymbol{x}) = v'(|\boldsymbol{x}|)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|},$$

et

$$(\Delta u)(\boldsymbol{x}) = \nabla \cdot \left(v'(|\boldsymbol{x}|)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right) = v''(|\boldsymbol{x}|) + \frac{n-1}{|\boldsymbol{x}|}v'(|\boldsymbol{x}|).$$

Ainsi $\Delta u = 0$ si et seulement si

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0$$

Comme

$$(\log|v'(r)|)' = \frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-n}{r},$$

alors

$$\log|v'(r)| = (1-n)\log r + A,$$

donc

$$|v'(r)| = \frac{\mathrm{e}^A}{r^{n-1}} \qquad \text{i.e.} \qquad v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}},$$

∗. Provient essentiellement de EVANS (§2.2).

pour un $a \in \mathbb{R}$. Ainsi en intégrant :

$$v(r) = \begin{cases} b \log r + c & \text{si } n = 2, \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & \text{si } n \geq 3, \end{cases}$$

où $b, c \in \mathbb{R}$ sont des constantes. L'effet de c étant juste une translation, prenons $c = 0$ et une valeur particulière pour b vu que l'équation est linéaire :

Définition 3.3.1 (solution fondamentale)**.** La fonction $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |\boldsymbol{x}| & \text{si } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3, \end{cases}$$

est la solution fondamentale de l'équation de Laplace. Ici $\alpha(n)$ désigne le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$:

$$\alpha(n) := |B(\mathbf{0}, 1)| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

Par exemple $\alpha(3) = \frac{4\pi}{3}$, donc dans $\mathbb{R}^3$, $\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}$. On notera qu'on a $\Delta\Phi(\boldsymbol{x}) = 0$ seulement pour $\boldsymbol{x} \neq 0$ bien sûr ! On parle de fonction harmonique sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

3.3.2. Formule de représentation

On s'intéresse maintenant à représenter une solution $u \in C^2$ de $-\Delta u = f$ dans $\mathbb{R}^n$.

Par construction, $\boldsymbol{x} \mapsto \Phi(\boldsymbol{x})$ est harmonique (pour $\boldsymbol{x} \neq 0$), donc $\boldsymbol{x} \mapsto \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ aussi (pour $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$) par translation par $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Ainsi $\boldsymbol{x} \mapsto \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y})$ est harmonique pour $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ et cela pour tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Cela suggère d'en prendre une somme infinie :

Théorème 3.3.2 (formule de représentation)**.** *Si $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, alors*

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

définit une fonction $C^2(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie $-\Delta u = f$ dans $\mathbb{R}^n$. Cette formule de représentation donne une expression explicite (sous forme d'intégrale) pour la solution.

Pour faire la preuve, on a besoin d'intégration par parties :

Proposition 3.3.3 (identités de Green)**.** *Si Ω est un domaine régulier et $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, alors :*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{n} \cdot \nabla u) v \, \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega (\Delta u) v,$$

et

$$\int_\Omega (\Delta u) v - \int_\Omega u(\Delta v) = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{n} \cdot \nabla u) v \, \mathrm{d}\sigma - \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{n} \cdot \nabla v) \, \mathrm{d}\sigma.$$

Preuve. En utilisant la formule de la divergence (proposition 2.2.6), on a

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + \Delta u \, v) = \int_\Omega \nabla \cdot (\nabla u \, v) = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{n} \cdot \nabla u) v \, \mathrm{d}\sigma,$$

ce qui est la première identité. En inversant u et v dans cette formule :

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla u + \Delta v \, u) = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{n} \cdot \nabla v) u \, \mathrm{d}\sigma,$$

et en soustrayant, cela donne la seconde identité. □

Preuve du théorème 3.3.2. Montrons d'abord que u définie ainsi est C^2. On ne peut pas dériver deux fois sous l'intégrale directement sur Φ, mais on peut réécrire :

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

par changement de variables. Ainsi, on peut prendre deux dérivées :

$$(D^2u)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{y})(D^2 f)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

Cette expression est continue en $\boldsymbol{x}$, donc $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. À noter que vu que f est C^2 et à support compact, il n'y a pas de problème d'intégrabilité.

En particulier

$$(\Delta u)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{y})(\Delta f)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

On a envie d'intégrer par parties pour mettre des dérivées de f sur Φ, mais Φ est singulière en zéro. Isolons la singularité :

$$(\Delta u)(\boldsymbol{x}) = \int_{B(\mathbf{0},\varepsilon)} \Phi(\boldsymbol{y})(\Delta f)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(\mathbf{0},\varepsilon)} \Phi(\boldsymbol{y})\Delta_{\boldsymbol{y}}(f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} =: I_\varepsilon + J_\varepsilon.$$

Comme $\Phi \in L^1_{\mathrm{loc}}$, par convergence dominée $\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = 0$ ou explicitement :

$$|I_\varepsilon| \le \|\Delta f\|_{L^\infty} \int_{B(\mathbf{0},\varepsilon)} |\Phi(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \le C\int_0^\varepsilon |\Phi(r)| r^{n-1}\,\mathrm{d}r \le C\begin{cases}\varepsilon^2|\log\varepsilon| & \text{si } n=2,\\ \varepsilon^2 & \text{si } n\ge 3.\end{cases}$$

Pour J_ε, en utilisant la seconde formule de Green de la proposition 3.3.3 :

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(\mathbf{0},\varepsilon)} \Delta\Phi(\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \int_{\partial B(\mathbf{0},\varepsilon)} \Phi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot\nabla_{\boldsymbol{y}}(f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) - \int_{\partial B(\mathbf{0},\varepsilon)} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot\nabla\Phi(\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) \\ &=: 0 + K_\varepsilon - L_\varepsilon, \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})$ est le vecteur pointant vers l'intérieur de $B(\mathbf{0},\varepsilon)$. Par convergence dominée, $\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon = 0$ ou explicitement :

$$|K_\varepsilon| \le \|\nabla f\|_\infty \int_{\partial B(\mathbf{0},\varepsilon)} |\Phi(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) \le C|\Phi(\varepsilon)||\partial B(\mathbf{0},\varepsilon)| \le \begin{cases} C\varepsilon|\log\varepsilon| & \text{si } n=2,\\ C\varepsilon & \text{si } n\ge 3,\end{cases}$$

Reste à déterminer la limite de L_ε. Sur $\partial B(\mathbf{0},\varepsilon)$, on a

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}) = -\frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|} \text{et} (\nabla\Phi)(\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{n\alpha(n)}\frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^n},$$

donc

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot(\nabla\Phi)(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{n\alpha(n)}\frac{1}{|\boldsymbol{y}|^{n-1}} = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}.$$

Comme $n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}$ est l'aire de la sphère $\partial B(\mathbf{0},\varepsilon)$, alors on a :

$$L_\varepsilon = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(\mathbf{0},\varepsilon)} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{|\partial B(\mathbf{0},\varepsilon)|}\int_{\partial B(\mathbf{0},\varepsilon)} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f(\boldsymbol{x}),$$

par continuité, vu que c'est la moyenne de f sur une sphère de plus en plus petite.

En sommant tous les termes, cela termine la preuve. □

Remarque 3.3.4. Le théorème précédent suggère l'interprétation suivante :

$$-\Delta\Phi = \delta_0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n,$$

où δ_0 est la distribution de Dirac en zéro, *i.e.* la distribution telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_0(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \varphi(\mathbf{0}).$$

Ainsi formellement, on retrouve le résultat du théorème

$$-(\Delta u)(\boldsymbol{x}) = -\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta\Phi)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_0(\boldsymbol{z})f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} = f(\boldsymbol{x}).$$

3.3.3. Fonction de Green

On s'intéresse maintenant à résoudre

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = h & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ régulier.

Lemme 3.3.5 (formule de représentation dans Ω)**.** *Pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$ on a :*

$$u(\boldsymbol{x}) = -\int_\Omega \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})(\Delta u)(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \int_{\partial\Omega} \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot(\nabla u)(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) + \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{y})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot(\nabla\Phi)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}).$$

Preuve. Fixons un $\boldsymbol{x} \in \Omega$ et ε tel que $B(\boldsymbol{x},\varepsilon) \subset \Omega$. En appliquant la seconde identité de Green de la proposition 3.3.3 à $u(\boldsymbol{y})$ et $\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$ sur $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B(\boldsymbol{x},\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon} u(\boldsymbol{y})(\Delta\Phi)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} - \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})(\Delta u)(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u(\boldsymbol{y})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot(\nabla\Phi)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot(\nabla u)(\boldsymbol{y})\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}). \quad (\star)\end{aligned}$$

Tout d'abord $(\Delta\Phi)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) = 0$ puisque $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$. Le bord est composé de $\partial\Omega$ et $\partial B(\boldsymbol{x},\varepsilon)$. Regardons ce qui se passe sur $\partial B(\boldsymbol{x},\varepsilon)$:

$$\int_{\partial B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} u(\boldsymbol{y})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot(\nabla\Phi)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{|\partial B(\boldsymbol{x},\varepsilon)|}\int_{\partial B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u(\boldsymbol{x})$$

et

$$\left|\int_{\partial B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot(\nabla u)(\boldsymbol{y})\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y})\right| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(B(\boldsymbol{x},\varepsilon))}|\Phi(\varepsilon)||\partial B(\mathbf{0},\varepsilon)| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

comme dans la preuve du théorème 3.3.2. Ainsi en prenant la limite $\varepsilon \to 0$ dans ($\star$), cela donne

$$-\int_\Omega \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})(\Delta u)(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot(\nabla\Phi)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x}) - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot(\nabla u)(\boldsymbol{y})\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}).$$

Le résultat suit du fait que $\Phi(-\boldsymbol{x}) = \Phi(\boldsymbol{x})$ et $(\nabla\Phi)(-\boldsymbol{x}) = -(\nabla\Phi)(\boldsymbol{x})$. □

Ce lemme permettrait de résoudre explicitement $-\Delta u = f$ si on connaissait u et ∇u au bord, ce qui n'est pas le cas, il s'agit d'une formule implicite. L'idée est d'introduire pour un $\boldsymbol{x} \in \Omega$ fixé un correcteur $\phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$ solution de :

$$\begin{cases} \Delta\phi^{\boldsymbol{x}} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \phi^{\boldsymbol{x}} = \Phi(\boldsymbol{x}-\cdot) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

car en appliquant à nouveau la seconde identité de Green :

$$-\int_\Omega \phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})(\Delta u)(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{y})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot(\nabla\phi^{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot(\nabla u)(\boldsymbol{y})\phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) \qquad (\star\star)$$

qui permet d'enlever le terme ayant $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot(\nabla u)(\boldsymbol{y})$ sur le bord, vu que $\phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ sur $\partial\Omega$. C'est ce que fait le résultat suivant :

Théorème 3.3.6 (fonction de Green)**.** *La fonction de Green dans Ω est :*

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}),$$

définie pour $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ et si $u\in C^2(\overline{\Omega})$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega,\\ u = h & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors :

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot\nabla_{\boldsymbol{y}}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,h(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}).$$

Preuve. Le lemme lemme 3.3.5 donne

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \int_{\partial\Omega} \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot\nabla u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot\nabla_{\boldsymbol{y}}(\Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}),$$

et par $(\star\star)$

$$0 = -\int_\Omega \phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} - \int_{\partial\Omega} \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot\nabla u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\cdot\nabla_{\boldsymbol{y}}(\phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}))u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}),$$

et le résultat est la somme des deux. □

Remarque 3.3.7. En voyant G comme fonction de $\boldsymbol{y}$, formellement

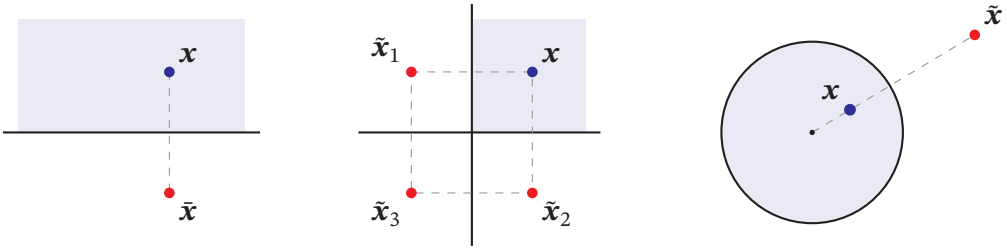
$$\begin{cases} -\Delta_{\boldsymbol{y}} G = \delta_{\boldsymbol{x}} & \text{dans } \Omega,\\ G = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\delta_{\boldsymbol{x}}$ est la mesure de Dirac en $\boldsymbol{x}$,

$$\int_\Omega \delta_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\gamma})\varphi(\boldsymbol{\gamma})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma} = \varphi(\boldsymbol{x}).$$

Il est possible de montrer que G est symétrique : $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$, voir les exercices.

En général trouver la fonction de Green explicitement ne peut se faire que dans des géométries particulières, car il faut pouvoir résoudre l'équation pour le correcteur $\phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$. Pour le demi-plan, le quart de plan, ou la boule cela est possible, l'idée étant de « symétriser » par rapport au bord, voir les exercices.



3.3.4. Propriétés des fonctions harmoniques

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Une fonction $u \in C^2(\Omega)$ est harmonique si $(\Delta u)(\boldsymbol{x}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Les propriétés de la moyenne indiquent que $u(\boldsymbol{x})$ est égal à la moyenne de u sur $\partial B(\boldsymbol{x}, r)$ et à la moyenne de u sur $B(\boldsymbol{x}, r)$, pour autant que $B(\boldsymbol{x}, r) \subset \Omega$.
Notation. L'intégrale moyennée est notée

$$\fint_\Omega u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Théorème 3.3.8 (propriétés des moyennes)**.** *Si $u \in C^2(\Omega)$ est harmonique, alors*

$$u(\boldsymbol{x}) = \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) = \fint_{B(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

pour toute boule telle que $B(\boldsymbol{x}, r) \subset \Omega$.

Preuve. Soit

$$\phi(r) = \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) = \fint_{\partial B(\boldsymbol{0},1)} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{z}).$$

En dérivant et en utilisant la formule de la divergence :

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= \fint_{\partial B(\boldsymbol{0},1)} (\nabla u)(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{z}) = \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} (\nabla u)(\boldsymbol{y}) \cdot \frac{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}}{r}\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) \\ &= \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} (\nabla u)(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{|\partial B(\boldsymbol{x}, r)|}\int_{B(\boldsymbol{x},r)} (\Delta u)(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = 0\end{aligned}$$

donc ϕ est constante. Ainsi

$$\phi(r) = \lim_{\varepsilon \to 0} \phi(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},\varepsilon)} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x}).$$

Finalement, en utilisant les coordonnées polaires :

$$\int_{B(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_0^r \int_{\partial B(\boldsymbol{x},s)} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s = \int_0^r u(\boldsymbol{x})|\partial B(\boldsymbol{x}, s)|\,\mathrm{d}s = u(\boldsymbol{x})|B(\boldsymbol{x}, r)|.$$

□

De plus la propriété des moyennes caractérise les fonctions harmoniques exactement :

Théorème 3.3.9. *Si $u \in C^2(\Omega)$ vérifie*

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}),$$

pour toute boule $B(\boldsymbol{x}, r) \subset \Omega$, alors u est harmonique ($\Delta u = 0$).

Preuve. Si $\Delta u \neq 0$, il existe $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ tel que $(\Delta u)(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, disons $(\Delta u)(\boldsymbol{x}_0) > 0$. Donc, par continuité, il existe une boule $B(\boldsymbol{x}, r) \subset \Omega$ telle que $(\Delta u)(\boldsymbol{y}) > 0$ pour $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, r)$. Ainsi, avec le ϕ du théorème précédent :

$$0 = \phi'(r) = \frac{1}{|\partial B(\boldsymbol{x}, r)|}\int_{B(\boldsymbol{x},r)} (\Delta u)(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} > 0,$$

ce qui est une contradiction. □

Théorème 3.3.10 (principe du maximum)**.** *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ une fonction harmonique dans Ω. Alors :*

1. *on a le principe du maximum faible :*
$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$
2. *Si Ω est connexe on a le principe du maximum fort : s'il existe $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ tel que*
$$u(\boldsymbol{x}_0) = \max_{\overline{\Omega}} u,$$
alors u est constante dans Ω.

En remplaçant u par $-u$, on obtient un principe du minimum.

Preuve. Soit $M := \max_{\overline{\Omega}} u$.

2. Soit $S := \{\boldsymbol{x} \in \Omega, u(\boldsymbol{x}) = M\}$. L'idée est de montrer que S est à la fois ouvert et fermé, ce qui par connexité de Ω, montrera que $S = \Omega$, puisque $\boldsymbol{x}_0 \in S$ par hypothèse.
   L'ensemble S est fermé, car pré-image de $\{M\}$ par $u : S = u^{-1}(\{M\})$.
   Montrons que S est ouvert, par l'existence de $B(\boldsymbol{x}, r) \subset S$ pour tout $\boldsymbol{x} \in S$. Si $\boldsymbol{x} \in S$, alors pour $0 < r < d(\boldsymbol{x}, \partial\Omega)$, la propriété de la moyenne donne :
$$M = u(\boldsymbol{x}) = \fint_{B(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \leq M.$$
   avec égalité si et seulement si $u(\boldsymbol{y}) = M$ pour tout $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}, r)$. Ainsi $B(\boldsymbol{x}, r) \subset S$.
1. Comme $\overline{\Omega}$ est compacte, u atteint son maximum sur $\bar{\Omega}$, disons en $\boldsymbol{x}_0 \in \overline{\Omega} : M = u(\boldsymbol{x}_0)$. Si $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\Omega$ alors 1. est prouvé. Si $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$, alors par 2., u est constante égale à M sur la composante connexe de $\boldsymbol{x}_0$, notée $C(\boldsymbol{x}_0)$. Par continuité $u = M$ aussi sur $\partial C(\boldsymbol{x}_0) \subset \partial\Omega$, donc $M = \max_{\partial C(\boldsymbol{x}_0)} u \leq \max_{\partial\Omega} u \leq M$.

□

Le principe du maximum permet par exemple de prouver le théorème 3.2.7 lorsque$k = 1$ et $\Gamma_d = \partial\Omega$ (donc $\Gamma_n = \emptyset$), le faire en exercice.

Remarque 3.3.11. Le principe du maximum (faible et fort) est une propriété générale des équations elliptiques scalaires. La preuve ci-dessous est relativement simple mais repose sur les propriétés des moyennes qui sont assez spécifiques aux fonctions harmoniques. Une preuve plus facilement généralisable sera vue en exercices.

Théorème 3.3.12 (régularité)**.** *Si $u \in C(\Omega)$ satisfait les propriétés de la moyenne (ce qui est le cas si $u \in C^2(\Omega)$ est harmonique), alors $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Preuve. Voir les exercices. □

Remarque 3.3.13. Cette propriété de régularité se généralise aux équations elliptiques (y.c. les systèmes) et est appelée régularité elliptique. Cela sera vu dans un cours d'équations elliptiques, en particulier la question de la régularité proche du bord n'est pas facile.

3.4. Solutions faibles

3.4.1. Motivations *

Pour l'instant, on a obtenu pour le problème de la membrane l'équivalence entre :

— Problème de minimisation (proposition 3.2.1) : minimiser l'énergie
$$E(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega k(\boldsymbol{x})|\nabla u|^2 - \int_\Omega fu - \int_{\Gamma_n} gu,$$
sur
$$X = \{u \in C^1(\overline{\Omega}),\ u|_{\Gamma_d} = h\}.$$

∗. Provient principalement de Boyer (Partie III, §I.3).

— Formulation faible (proposition 3.2.3) : trouver $u \in X$ telle que :

$$\int_\Omega k(\boldsymbol{x})\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_n} gv \qquad \forall v \in X_0 = \{v \in C^1(\overline{\Omega}),\ v|_{\Gamma_d} = 0\}.$$

— Formulation forte (théorème 3.2.4) : trouver $u \in C^2(\overline{\Omega})$ telle que :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \big(k(\boldsymbol{x})\nabla u\big) = f & \text{dans } \Omega, \\ k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n} \cdot \nabla u = g & \text{sur } \Gamma_n, \\ u = h & \text{sur } \Gamma_d, \\ k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n} \cdot \nabla u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus (\Gamma_d \cup \Gamma_n). \end{cases} \tag{3.1}$$

De plus, on a obtenu l'unicité via la formulation faible (théorème 3.2.7). Dans certains domaines géométriques, on a obtenu (quand $\Gamma_d = \partial\Omega$, $\Gamma_n = \emptyset$) l'existence d'une solution forte via la solution fondamentale Φ ou de Green G. Le but de cette section est d'obtenir l'existence de solutions dans des domaines quelconques à partir du problème de minimisation ou de la formulation faible.

Stratégie pour obtenir l'existence d'un minimiseur :

1. Montrer que $\inf_{u\in X} E(u) > -\infty$, sinon chercher un minimiseur n'a pas de sens.
2. Considérer une suite minimisante, c'est-à-dire une suite $(u_n) \subset X$ telle que $\lim_{n\to\infty} E(u_n) = \inf_{u\in X} E(u)$. Une telle suite existe toujours par définition de l'infimum.
3. Montrer que cette suite converge (éventuellement seulement à sous-suite près) vers un $u \in X$.
4. Vérifier que u est un minimum. En général on montrera que $\lim_{n\to\infty} E(u_n) = E(u)$.

Les points 1. et 2. ne dépendent que de l'ensemble X, mais 3. et 4. font appel à une notion de convergence donc requièrent une topologie (ici via une norme) sur X. En général, pour 3. l'idée est de montrer que la suite minimisante est de Cauchy, ce qui demande que X soit complet. Le point 4. est une sorte de continuité de E sur X. La faisabilité de la stratégie dépend donc de manière cruciale du choix de X et de la topologie (norme) mise dessus.
Essayons dans le cas $k(\boldsymbol{x}) = k$ constant :

1. Sera vrai car le premier terme est toujours positif, et quadratique, alors que les deux autres sont linéaires, donc c'est une parabole loin.
2. Une suite minimisante existe toujours !
3. Il faut prendre une norme telle que

   $$X = \{u \in C^1(\bar{\Omega}),\ u|_{\Gamma_d} = h\},$$

   soit complet, c'est le cas pour la norme naturelle

   $$\|u\|_{C^1} := \|u\|_{L^\infty} + \|\nabla u\|_{L^\infty}.$$

   Problème : il existe des suites $(u_n)_n$ telles que $(E(u_n))$ est bornée mais (u_n) non bornée ! Voir les exercices. On dit que l'énergie E n'est pas coercive sur $(X, \|\cdot\|_{C^1})$.
   Une norme plus adaptée serait :

   $$\|u\|_{H^1} := \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}.$$

   Avec cette norme, montrons que la suite minimisante est de Cauchy :
   En notant $E_{\min} := \inf_{u\in X} E(u)$, par l'identité du parallélogramme

   $$\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{a-b}{2}\right\|^2 = \frac{\|a\|^2}{2} + \frac{\|b\|^2}{2},$$

on a :

$$E_{\min} \leq E\left(\frac{u_n + u_{n+p}}{2}\right) = \frac{1}{2}E(u_n) + \frac{1}{2}E(u_{n+p}) - \frac{k}{8}\|\nabla u_n - \nabla u_{n+p}\|_{L^2}^2.$$

Ainsi

$$\frac{k}{8}\|\nabla u_n - \nabla u_{n+p}\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}E(u_n) + \frac{1}{2}E(u_{n+p}) - E_{\min} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et en utilisant l'inégalité de Poincaré (qui sera vue plus tard), $\|u_n - u_{n+p}\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (u_n) est de Cauchy dans $(X, \|\cdot\|_{H^1})$.

Problème : $(X, \|\cdot\|_{H^1})$ n'est pas complet, donc on ne peut pas déduire que (u_n) converge. La solution est de prendre le complété de $(X, \|\cdot\|_{H^1})$, qu'on note $\tilde{X}$. Ainsi $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $\tilde{X}$ donc converge dans $\tilde{X}$: il existe $u \in \tilde{X}$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$.

4. Finalement, on a bien $\lim_{n\to\infty} E(u_n) = E(u)$ par continuité de $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2}^2$ ou explicitement :

$$\begin{aligned}
|E(u_n) - E(u)| &\leq \frac{k}{2}\left|\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega |\nabla u|^2\right| + \int_\Omega |f||u - u_n| + \int_{\partial\Omega} |g||u - u_n| \\
&\leq \frac{k}{2}\left|\int_\Omega \nabla(u_n - u)\cdot\nabla(u_n + u)\right| + \int_\Omega |f||u - u_n| + \int_{\partial\Omega} |g||u - u_n| \\
&\leq \frac{k}{2}\|\nabla u_n + \nabla u\|_{L^2}\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}\|u - u_n\|_{L^2} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\|u - u_n\|_{L^2(\partial\Omega)}
\end{aligned}$$

et donc tend vers zéro quand $n \to \infty$ car $u_n \to u$ dans $\tilde{X}$.
Reste à identifier l'espace $\tilde{X}$: c'est un espace de Sobolev. Le théorème de Lax–Milgram formalisera et généralisera cela, mais on en a essentiellement fait la preuve : toutes les idées sont là !

3.4.2. Espaces de Sobolev

Les principales propriétés des espaces de Sobolev sont introduites dans cette section, mais les preuves sont pour la plupart omises.

Définition 3.4.1 (espaces de Sobolev H^k)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $k \geq 1$ un entier. L'espace $H^k(\Omega)$ est défini par :

$$H^k(\Omega) := \left\{u \in L^2(\Omega) \,:\, D^\alpha u \in L^2(\Omega)\ \forall |\alpha| \leq k\right\}.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^k} := \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

dont la norme est :

$$\|u\|_{H^k} := \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2\right)^{1/2}.$$

Exemple 3.4.2. Pour $k = 1$,

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \,:\, \nabla u \in L^2(\Omega)\right\}$$

avec

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2} = \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

et

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{1/2}.$$

Preuve de la complétude. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans $H^k(\Omega)$. Pour $|\alpha| \leq k$, la suite $(D^\alpha u_n)_n$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, et comme $L^2(\Omega)$ est complet elle converge : $D^\alpha u_n \to v_\alpha$ dans $L^2(\Omega)$. Reste à montrer que $D^\alpha v_0 = v_\alpha$: pour $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega v_0 D^\alpha \phi = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega D^\alpha u_n \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha \phi.$$

Par conséquent,

$$\|u_n - v_0\|_{H^k}^2 = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u_n - v_\alpha\|_{L^2}^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On sait que $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. On va voir dans quel sens on peut approximer des fonctions dans $H^k(\Omega)$ par $C_c^\infty(\Omega)$: □

Définition 3.4.3 (espaces de Sobolev H_0^k)**.** Pour $k \geq 1$, la complétion de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^k(\Omega)$ (*i.e.* avec sa norme) est notée $H_0^k(\Omega)$. C'est un sous-espace de Hilbert de $H^k(\Omega)$. En général $H_0^k(\Omega)$ est strictement plus petit que $H^k(\Omega)$.

Les éléments de $H^k(\Omega)$ ne peuvent pas en général s'approcher par des fonctions dans C_c^∞ mais on a :

Proposition 3.4.4 (densité)**.** *Si Ω est un domaine, la restriction à Ω des fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, notée $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^k(\Omega)$.*

Intuition. les fonctions dans $C_c^\infty(\Omega)$ sont nulles sur $\partial\Omega$ et par densité, les fonctions dans $H_0^1(\Omega)$ restent nulles sur $\partial\Omega$.

Pour le voir précisément :

Définition 3.4.5 (opérateur de trace)**.** Si Ω est un domaine régulier (Lipschitzien), alors il existe un unique opérateur linéaire continu, appelé opérateur de trace, $\tau_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ tel que pour tout

$$u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \qquad \tau_{\partial\Omega} u = u|_{\partial\Omega}.$$

Cet opérateur n'est pas surjectif, son image est noté $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Théorème 3.4.6. *Si Ω est un domaine régulier (Lipschitzien), alors $H_0^1(\Omega)$ est caractérisé par la trace nulle :*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \tau_{\partial\Omega} u = 0\} = \ker(\tau_{\partial\Omega}).$$

Preuve. $\Rightarrow$: Si $u \in H_0^1(\Omega)$, alors par définition il existe $(u_n)_n \subset C_c^\infty(\Omega)$ tel que $u_n \to u$. Comme $\tau_{\partial\Omega} u_n = 0$ pour tout n et que $\tau_{\partial\Omega}$ est continue, $\tau_{\partial\Omega} u = 0$.

$\Leftarrow$ Possiblement plus compliqué ! □

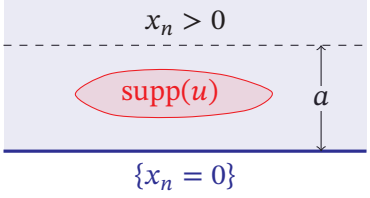
Proposition 3.4.7 (inégalité de Poincaré)**.** *Si Ω est un domaine borné dans une direction, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$:*

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}.$$

En d'autres termes, les normes $\|u\|_{H^1}^2 := \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2$ et $\|u\|_{H_0^1}^2 := \|\nabla u\|_{L^2}^2$ sont équivalentes sur $H_0^1(\Omega)$.

Attention : sur $H^1(\Omega)$, $\|\nabla u\|_{L^2}^2$ n'est pas une norme, car dégénérée.

Preuve. Par définition de $H_0^1(\Omega)$ il suffit de montrer l'inégalité pour tout $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Par simplicité et pour comprendre, on va traiter uniquement le cas $\Omega = \mathbb{R}_+^n := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$. À noter que Ω n'est donc pas borné dans une direction. Soit $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$. Comme u est à support compact, il existe $a > 0$ tel que $u(\boldsymbol{x}', x_n) = 0$ si $x_n > a$ et de plus $u(\boldsymbol{x}', 0) = 0$.



Par le théorème fondamental de l'analyse :

$$u(\boldsymbol{x}', x_n) = \int_0^{x_n} (\partial_n u)(\boldsymbol{x}', t)\,\mathrm{d}t,$$

et en appliquant Cauchy–Schwarz :

$$\begin{aligned}|u(\boldsymbol{x}', x_n)|^2 = \left|\int_0^{x_n} 1 \cdot (\partial_n u)(\boldsymbol{x}', t)\,\mathrm{d}t\right|^2 &\leq \left(\int_0^{x_n} 1^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{x_n} |\partial_n u(\boldsymbol{x}', t)|^2\,\mathrm{d}t\right)\\ &\leq x_n \int_0^{x_n} |\partial_n u(\boldsymbol{x}', t)|^2\,\mathrm{d}t \leq x_n \int_0^{\infty} |\partial_n u(\boldsymbol{x}', t)|^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En intégrant sur x_n

$$\int_0^{\infty} |u(\boldsymbol{x}', x_n)|^2\,\mathrm{d}x_n = \int_0^{a} |u(\boldsymbol{x}', x_n)|^2\,\mathrm{d}x_n \leq \int_0^{a} x_n\,\mathrm{d}x_n \int_0^{\infty} |\partial_n u(\boldsymbol{x}', t)|^2\,\mathrm{d}t \leq \frac{a^2}{2}\int_0^{\infty} |\partial_n u(\boldsymbol{x}', t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

puis sur les autres variables :

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |u(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \frac{a^2}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+} |\partial_n u(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \frac{a^2}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Par conséquent, dans une bande $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, 0 < x_n < a\}$ on a :

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{a}{\sqrt{2}}\|\nabla u\|_{L^2},$$

mais on voit bien que l'inégalité est fausse lorsque $a \to \infty$, *i.e.* lorsque le domaine n'est pas borné dans une dimension.

Le cas général se fait selon la même idée en intégrant explicitement dans la direction bornée avec un changement de variables. Voir par exemple Royer (Theorem 2.50). □

Ce qui fait fonctionner l'inégalité est qu'on a un ancrage qui permet de retirer les constantes : $u \mapsto u + c$.

La moyenne permet de faire pareil :

Proposition 3.4.8 (inégalité de Poincaré–Wirtinger)**.** *Si Ω est un domaine régulier borné, alors il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$:*

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}$$

où $\bar{u}$ est la moyenne de u sur Ω,

$$\bar{u} = \fint_\Omega u = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u.$$

3.4.3. Principe général : Théorème de Lax–Milgram

Le principe général pour montrer l'existence de solutions faibles est le suivant. Donné un problème linéaire de la forme abstraite

$$\begin{cases} Au = f & \text{dans } \Omega,\\ + \text{ conditions au bord,}\end{cases}$$

où Au est un opérateur différentiel linéaire, on obtient que toute solution $u \in X$ vérifie

$$\int_\Omega Auv = \int_\Omega fv,$$

pour toute fonction test $v \in V$. L'espace V étant à choisir.

On intègre maintenant par parties (0,1, plusieurs fois) pour obtenir quelque chose de la forme :

$$\int_\Omega (B_1 u)(B_2 v) = \int_\Omega fv + \text{termes de bord} \qquad \forall v \in V.$$

qu'on appelle problème variationnel abstrait. Il est constitué de formes bilinéaires en (u, v) à gauche et de formes linéaires à droite.

Le théorème suivant est le résultat de base permettant d'obtenir l'existence (et unicité) d'une solution faible du problème variationnel.

Théorème 3.4.9 (de Lax–Milgram). *Si H est un espace de Hilbert réel, ℓ une forme linéaire continue sur H :*

$$|\ell(v)| \leq \|\ell\|\|v\|_H, \qquad \forall v \in H,$$

a une forme bilinéaire continue sur H :

$$|a(u, v)| \leq \|a\|\|u\|_H\|v\|_H, \qquad \forall u, v \in H,$$

qui est coercive : il existe $c > 0$ tel que :

$$a(u, u) \geq c\|u\|_H^2, \qquad \forall u \in H,$$

alors il existe une unique solution $u \in H$ de l'équation

$$a(u, v) = \ell(v) \qquad \forall v \in H,$$

et de plus

$$\|u\|_H \leq \frac{\|\ell\|}{c}.$$

Si de plus a est symétrique, alors u est aussi l'unique minimiseur de la fonctionnelle

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$$

sur H.

Preuve. **Cas symétrique.** On peut faire deux preuves (conceptuellement en fait assez proches) :

1. Preuve 1 : appliquer la stratégie en 4 points de §3.4.1, cela est laissé en exercice.
2. Preuve 2 : comme a est symétrique et coercive, c'est un produit scalaire sur H. Par continuité et coercivité, la norme induite par a est équivalente à celle de H, et donc ℓ continue sur H avec ce nouveau produit scalaire. Ainsi le théorème de représentation de Riesz sur (H, a) donne immédiatement le résultat.

Cas non-symétrique. Par le théorème de représentation de Riesz il existe $f \in H$ telle que $\ell(v) = (f, v)_H$ et $Au \in H$ telle que $a(u, v) = (Au, v)_H$. Il est clair que A défini ainsi est linéaire, mais il est aussi continu car

$$\|Au\|_H^2 = (Au, Au)_H = a(u, Au) \leq \|a\|\|u\|_H\|Au\|_H.$$

Par conséquent, l'équation est équivalente à $Au = f$, donc il suffit de montrer que A est bijective.

Par coercivité et Cauchy–Schwarz :

$$c\|u\|_H^2 \leq a(u, u) = (Au, u)_H \leq \|Au\|_H\|u\|_H$$

donc $\|Au\|_H \geq c\|u\|_H$ ce qui montre que A est injective.

Montrons que $F := A(H)$ est fermé. Soit $(Au_n)_n \subset F$ une suite convergente dans H. Comme $\|Au_n - Au_m\|_H \geq c\|u_n - u_m\|_H$, alors $(u_n)_n \subset H$ est de Cauchy donc converge vers un $u \in H$. Par continuité de A, $Au_n \to Au \in F$.

Montrons que $F^\perp = \{0\}$. Soit $u \in F^\perp$. Par définition $(Av, u)_H = 0\ \forall v \in H$ donc en particulier $(Au, u)_H = 0$ donc $\|u\|_H = 0$.

Finalement, comme F est fermé : $H = F \oplus F^\perp$ ce qui montre que $H = F$, *i.e.* A surjective.

Donc on a l'existence et l'unicité. De plus comme $\|Au\|_H = \|f\|_H = \|\ell\|$, alors $\|Au\|_H \geq c\|u\|_H$ donne la borne $\|u\|_H \leq \dfrac{\|\ell\|}{c}$. □

3.4.4. Existence de solutions faibles en 1d

Commençons par déterminer une solution du problème (3.1) en une dimension avec $\Omega = (a,b)$ et $\partial\Omega = \Gamma_d$,

Proposition 3.4.10 (condition de Dirichlet homogène)**.** *Pour $k : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, bornée et avec $\kappa := \inf_{x\in\Omega} k(x) > 0$ et $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution faible au problème avec condition de Dirichlet homogène :*

$$\begin{cases} -(k(x)u'(x))' = f(x) & \text{dans } \Omega = (a,b), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega = \{a,b\}. \end{cases}$$

Preuve. Le bon espace fonctionnel est $H = H^1_0(\Omega)$ muni de la norme $\|u\|_H := \|u\|_{H^1(\Omega)}$ et la formulation faible $a(u,v) = \ell(v)$ avec

$$a(u,v) = \int_\Omega k(x)u'(x)v'(x), \qquad \ell(v) = \int_\Omega f(x)v(x).$$

Les applications ℓ et a sont continues car :

$$\begin{aligned} |\ell(v)| &\le \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}\|v\|_H, \\ |a(u,v)| &\le \|k\|_{L^\infty}\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \le \|k\|_{L^\infty}\|u\|_H\|v\|_H. \end{aligned}$$

Pour la coercivité, on a

$$a(u,u) = \int_\Omega k(x)(u'(x))^2 \ge \kappa\|u'\|^2_{L^2} \ge \frac{\kappa}{C}\|u\|^2_H.$$

en utilisant l'inégalité de Poincaré (proposition 3.4.7). Par conséquent, le théorème 3.4.9 de Lax–Milgram donne l'existence et l'unicité de $u \in H$ solution faible. □

Proposition 3.4.11 (condition de Dirichlet inhomogène)**.** *Sous les hypothèses de la proposition précédente, il existe une unique solution faible au problème avec condition de Dirichlet inhomogène :*

$$\begin{cases} -(k(x)u'(x))' = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u(a) = u_a, \\ u(b) = u_b. \end{cases}$$

Preuve. On ne peut plus chercher les solutions dans $H^1_0(\Omega)$. Pour résoudre, on va relever les conditions du bord. On choisit une fonction $R : \Omega \to \mathbb{R}$ régulière telle que

$$R(a) = u_a \qquad \text{et} \qquad R(b) = u_b,$$

et cherchons la solution sous la forme $u = R + w$ avec cette fois w nulle au bord. L'équation pour w est :

$$\begin{cases} -(k(x)w'(x))' = f(x) + (k(x)R'(x))' & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega = \{a,b\}. \end{cases}$$

C'est donc le problème précédent mais avec une force $\tilde f = f + (k(x)R'(x))'$. On a choisi R régulier et si k est régulier, alors $\tilde f$ est régulier donc $\tilde f \in L^2$ et on obtient une solution $w \in H^1_0(\Omega)$ donc une solution $u \in H^1(\Omega)$.

Mais si k n'est pas régulier (par exemple discontinu) alors $\tilde f$ n'est pas bien définie. Au lieu de poser $\ell(v) = \int_\Omega \tilde f v$ on va poser :

$$\ell(v) = \int_\Omega fv - \int_\Omega k(x)R'(x)v'(x)$$

en ayant formellement intégré par parties. On voit facilement qu'un tel ℓ est continu sur $H^1_0(\Omega)$ et donc Lax–Milgram donne l'existence d'un unique $w \in H^1_0(\Omega)$ tel que $a(w,v) = \ell(v)$ *i.e.*

$$\int_\Omega k(x)(R+w)'(x)v'(x) = \int_\Omega f(x)v(x).$$

□

3.4.5. Existence de solutions faibles en multi-d

Considérons maintenant le problème (3.1) en dimension quelconque. Commençons par le cas le plus simple :

Proposition 3.4.12 (membrane avec Dirichlet homogène). *Pour $k : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, bornée et avec $\kappa := \inf_{x\in\Omega} k(x) > 0$ et $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution faible au problème de Dirichlet homogène ($\Gamma_d = \partial\Omega$ et $h = 0$) :*

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(k(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Preuve. La formulation faible sur l'espace naturel $H = H^1_0(\Omega)$ est

$$\int_\Omega k(x)(\nabla u)(x)\cdot(\nabla v)(x) = \int_\Omega f(x)v(x) \qquad \forall v \in H.$$

Les formes de Lax–Milgram sont :

$$a(u,v) = \int_\Omega k(x)(\nabla u)(x)\cdot(\nabla v)(x) \qquad\qquad \ell(v) = \int_\Omega f(x)v(x).$$

Par exemple si $f \in L^2(\Omega)$, alors ℓ est continue

$$|\ell(v)| \le \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \le C\|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}$$

En fait il suffit de faire l'hypothèse que ℓ soit continue sur H^1_0, donc que ℓ soit dans le dual topologique $H^{-1} := (H^1_0)'$ de H^1_0 pour le produit scalaire de L^2. De même pour a si k est bornée :

$$|a(u,v)| \le \|k\|_\infty \int_\Omega |\nabla u\cdot\nabla v| \le \|k\|_\infty\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} \le \|k\|_\infty\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.$$

Pour la coercivité, si $\kappa := \inf_{x\in\Omega} k(x) > 0$, alors par l'inégalité de Poincaré

$$a(u,u) := \int_\Omega k(x)|\nabla u(x)|^2 \ge \kappa\|\nabla u\|^2_{L^2} \ge \frac{\kappa}{C}\|u\|^2_H.$$

Par conséquent, par Lax–Milgram il existe un unique $u \in H^1_0(\Omega)$ de la formulation faible. □

Il est possible de montrer (mais ce n'est pas facile) que la solution faible construite précédemment est plus régulière pour autant que k et f soient assez réguliers, c'est la régularité elliptique.

Proposition 3.4.13 (régularité elliptique). *Si Ω et k sont assez réguliers, alors la solution faible du problème précédent vérifie $u \in H^2$ et $\|u\|_{H^2} \le C\|f\|_{L^2}$. Si de plus $f \in H^m(\Omega)$, alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$, qui pour m assez grand sera $C^2(\bar\Omega)$.*

Proposition 3.4.14 (Membrane avec condition de Neumann). *Sous les hypothèses précédentes et $g \in L^2(\partial\Omega)$ il existe une solution faible au problème avec condition au bord de Neumann ($\Gamma_d = \emptyset$ et $\Gamma_n = \partial\Omega$) :*

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(k(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ k(x)n\cdot\nabla u(x) = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

à condition que f et g vérifient la condition de compatibilité suivante :

$$\int_\Omega f + \int_{\Gamma_n} g = 0.$$

Preuve. La formulation faible est :

$$\int_\Omega k(\boldsymbol{x})\nabla u\cdot\nabla v=\int_\Omega fv+\int_{\partial\Omega}gv. \tag{$\star$}$$

Clairement si u est une solution, alors $u+c$ est aussi une solution. L'espace fonctionnel doit donc fixer les constantes, car Lax–Milgram donne toujours l'unicité. Un choix est :

$$H:=\left\{u\in H^1(\Omega)\,:\,\int_\Omega u=0\right\}.$$

La différence principale est que l'inégalité de Poincaré est remplacée par celle de Poincaré–Wirtinger (proposition 3.4.8) :

$$\|u\|_{L^2}\le C\|\nabla u\|_{L^2}\qquad\forall u\in H.$$

Le nouveau terme est bien continu comme $g\in L^2(\partial\Omega)$:

$$\left|\int_{\partial\Omega}gv\right|\le\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\|v\|_{L^2(\partial\Omega)}\le\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\tau_{\partial\Omega}v\|_{L^2(\partial\Omega)}\le\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\tau_{\partial\Omega}\|\|v\|_{H^1},$$

par continuité de la trace. Par conséquent, le théorème 3.4.9 de Lax–Milgram donne l'existence et l'unicité d'une solution faible $u\in H$.

Attention. Cette solution faible n'est pas solution du problème original, sauf lorsque la condition de compatibilité sur f et g indiquée est satisfaite comme déjà mentionné dans le cas de l'élastique non attaché. En effet en prenant $k=1$, $f=1$ et $g=0$ par exemple, alors $u=0$ est clairement l'unique solution de la formulation faible sur H, mais n'est pas une solution de la formulation forte. La raison est qu'en prenant H comme espace pour la solution faible et les fonctions test, on a implicitement projeté l'équation en retirant la moyenne.

Plus explicitement, on a que la solution $u\in H$ vérifie ($\star$) pour tout $v\in H$ mais pas pour tout $v\in H^1(\Omega)$. Pour $v\in H^1(\Omega)$, alors $v-\fint_\Omega v\in H$ car à moyenne nulle et donc en l'insérant dans ($\star$) cela donne :

$$\int_\Omega k(\boldsymbol{x})\nabla u\cdot\nabla v=\int_\Omega fv+\int_{\partial\Omega}gv-\left(\int_\Omega f+\int_{\Gamma_n}g\right)\fint_\Omega v=\int_\Omega fv+\int_{\partial\Omega}gv,$$

vu la condition de compatibilité. La condition de compatibilité permet donc de passer de $v\in H$ à $v\in H^1(\Omega)$ dans la formulation faible, et donc ensuite de remonter à la formulation forte avec le lemme de du Bois-Reymond (sous des hypothèses de régularité). □

Proposition 3.4.15 (cas général de la membrane)**.** *Pour $k:\Omega\to\mathbb{R}$ mesurable, bornée et avec $\kappa:=\inf_{\boldsymbol{x}\in\Omega}k(\boldsymbol{x})>0$, $f\in L^2(\Omega)$, $g\in L^2(\Gamma_n)$ et $h\in H^{1/2}(\Gamma_d)$, il existe une unique solution faible au problème mixte du théorème 3.2.4 :*

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(k(\boldsymbol{x})\nabla u)=f & \text{dans }\Omega,\\ -k\,\boldsymbol{n}\cdot\nabla u=g & \text{sur }\Gamma_n,\\ -k\,\boldsymbol{n}\cdot\nabla u=0 & \text{sur }\partial\Omega\setminus(\Gamma_d\cup\Gamma_n),\\ u=h & \text{sur }\Gamma_d,\end{cases}$$

pour autant que la mesure de Γ_d soit non-nulle.

Preuve. La première étape est de trouver un relèvement $R\in H^1(\Omega)$ de h. Par définition si $h\in H^{1/2}(\Gamma_d)=\tau_{\Gamma_d}(H^1(\Omega))$ alors un tel $R\in H^1(\Omega)$ existe : $h=\tau_{\Gamma_d}R$. Ainsi, on cherche u sous la forme $u=R+w$ avec $w\in H$,

$$\int_\Omega k(\boldsymbol{x})(\nabla R+\nabla w)\cdot\nabla v=\int_\Omega f\cdot v+\int_{\Gamma_n}gv\qquad\forall v\in H,$$

où

$$H:=\{u\in H^1(\Omega)\,:\,\tau_{\Gamma_d}u=0\}=\ker(\tau_{\Gamma_d}).$$

On peut montrer que si la mesure de Γ_d est non-nulle alors Poincaré reste vraie sur H, ce qui suffit à appliquer le théorème 3.4.9 de Lax–Milgram pour obtenir l'existence d'une solution faible $w\in H$, ou $u\in H^1(\Omega)$. □

3.4.6. Existence de solutions faibles pour une EDP elliptique *

Finalement, on a envie de traiter un opérateur elliptique d'ordre deux :

$$Lu := -\nabla \cdot (A(\boldsymbol{x})\nabla u) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla u(\boldsymbol{x}) + c(\boldsymbol{x})u,$$

où $A(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n$ et $c(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$. Par simplicité on va considérer que A, $\boldsymbol{b}$ et c sont bornées sur Ω. Le but va être de résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Pour ce problème la définition d'une solution faible est immédiate, il s'agit de multiplier l'équation par une fonction test et d'intégrer par parties :

Définition 3.4.16 (solution faible)**.** Pour $f \in H^{-1}(\Omega) := (H^1_0(\Omega))'$ et $\mu \in \mathbb{R}$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une solution faible du problème précédent si $u \in H^1_0(\Omega)$ et

$$a(u,v) + \mu(u,v)_{L^2} = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H^1_0} \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega),$$

où

$$a(u,v) := (A\nabla u, \nabla v)_{L^2} + (\nabla u, \boldsymbol{b}v)_{L^2} + (cu, v)_{L^2},$$

et $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire de L^2 :

$$(u,v)_{L^2} := \int_\Omega u(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Pour vérifier les hypothèses du théorème 3.4.9 de Lax–Milgram, on va avoir besoin que l'opérateur soit elliptique pour obtenir les estimations suivantes :

Lemme 3.4.17 (inégalité de Gårding)**.** *Si $A, \boldsymbol{b}, c \in L^\infty(\Omega)$ et si L est elliptique : il existe $c_0 > 0$ tel que*

$$\boldsymbol{\xi} \cdot A(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi} \geq c_0|\boldsymbol{\xi}|^2,$$

pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ et presque tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$, alors :

1. *La forme bilinéaire est continue sur $H^1_0(\Omega)$: il existe $C > 0$ tel que pour tout $u, v \in H^1_0(\Omega)$:*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|_{H^1_0}\|v\|_{H^1_0},$$

2. *La forme bilinéaire satisfait une inégalité de Gårding : il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$:*

$$\frac{c_0}{2}\|u\|^2_{H^1_0} \leq a(u,u) + \gamma\|u\|^2_{L^2}.$$

En particulier si $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ et $c = 0$ alors on peut prendre $\gamma = 0$.

Preuve.

1. Il s'agit juste d'utiliser Cauchy–Schwarz et le fait que A, $\boldsymbol{b}$ et c sont bornés :

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \|A\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + \|\boldsymbol{b}\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \|c\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ &\leq \left(\|A\|_{L^\infty} + \|\boldsymbol{b}\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty}\right)\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}, \end{aligned}$$

puis d'utiliser l'inégalité de Poincaré de la proposition 3.4.7.

∗. Inspiré de GALLAGHER (§3.2.2).

2. Par ellipticité de L,

$$c_0\|u\|_{H_0^1}^2 = c_0\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla u = a(u,u) - (\nabla u, \boldsymbol{b}u)_{L^2} - (cu,u)_{L^2}$$
$$\leq a(u,u) + \|\boldsymbol{b}\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2} + \|c\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}^2.$$

Si $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, alors l'inégalité est prouvée. Si $\|\boldsymbol{b}\|_{L^\infty} > 0$, par l'inégalité de Young $ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$, on a

$$\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|u\|_{L^2}^2,$$

et donc en choisissant $\varepsilon = \frac{c_0}{\|\boldsymbol{b}\|_{L^\infty}}$, on obtient

$$c_0\|u\|_{H_0^1}^2 \leq a(u,u) + \frac{c_0}{2}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \left(\frac{\|\boldsymbol{b}\|_{L^\infty}^2}{2c_0} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

ce qui est bien l'inégalité désirée.

□

Proposition 3.4.18 (existence)**.** *Pour $A, \boldsymbol{b}, c \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$, et si L est elliptique, alors pour tout $\mu \geq \gamma$, il existe une unique solution faible au sens de la définition 3.4.16.*

Preuve. En définissant

$$a_\mu(u,v) := a(u,v) + \mu(u,v)_{L^2},$$

alors par le premier point de la proposition précédente :

$$|a_\mu(u,v)| \leq C\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} + |\mu|\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2},$$

et donc la forme bilinéaire est bien bornée par l'inégalité de Poincaré. Par l'inégalité de Gårding,

$$\frac{c_0}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 \leq a(u,u) + \gamma\|u\|_{L^2}^2 = a_\mu(u,u) - \mu\|u\|_{L^2}^2 + \gamma\|u\|_{L^2}^2 \leq a_\mu(u,u),$$

vu que $\mu \geq \gamma$. Par conséquent la forme bilinéaire a_μ est continue et coercive, donc par le théorème 3.4.9 de Lax–Milgram, il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de $a_\mu(u,v) = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}$. □

4. Équations de la chaleur

4.1. Modèle de propagation de la chaleur

Le but est de modéliser l'évolution temporelle de la température dans un solide. Dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à ce qui se passe dans le solide, puis dans un second temps aux forçages par l'extérieur.

4.1.1. Équation dans le solide

Le but est de modéliser l'évolution temporelle de la température dans un solide.

Hypothèses

— le solide est sans bord, donc $\mathbb{R}^3$

— le flux de chaleur est proportionnel à la différence de température, ou plus précisément au gradient de température.

— le solide ne se dilate pas sous l'effet de la température

Grandeurs

— $T(t,\boldsymbol{x})$ température [K] à l'instant $t>0$ et à la position $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$

— $e(t,\boldsymbol{x})$ chaleur volumique ou enthalpie volumique [$\mathrm{J\,m^{-3}}$]

— $\boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x})$ flux de chaleur dans le solide [$\mathrm{W\,m^{-2}}$]

— $\rho>0$ densité du solide [$\mathrm{kg\,m^{-3}}$]

— $C_p>0$ chaleur spécifique à pression constante [$\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$]

— $\lambda>0$ conductivité thermique [$\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$]

Proposition 4.1.1. *Sous les hypothèses précédentes, l'évolution de la température est gouvernée par l'équation de la chaleur :*

$$\partial_t T-\alpha\Delta T=0,$$

où

$$\alpha=\frac{\lambda}{\rho C_p}>0.$$

Preuve. Soit $V\subset\mathbb{R}^3$ un domaine virtuel fixe. La chaleur, c'est-à-dire l'énergie, contenue dans V à l'instant t est

$$\int_V e(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

La variation de cette quantité est régie par ce qui entre ou sort de V à travers le bord :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V e(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\int_{\partial V}\boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}).$$

Le signe moins est naturel car l'énergie va diminuer si le flux $\boldsymbol{J}$ est dirigé vers l'extérieur.

Par le théorème de la divergence,

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V e(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_V\big(\nabla\cdot\boldsymbol{J}\big)(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_V\big(\partial_t e+\nabla\cdot\boldsymbol{J}\big)(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Donc, comme V est arbitraire, par le lemme de du Bois-Reymond,

$$\partial_t e + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0, \qquad \forall t \geq 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3.$$

En notant

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{J}}{e}$$

la vitesse de diffusion de l'énergie, c'est une équation de conservation de l'énergie :

$$\partial_t e + \nabla \cdot (\boldsymbol{v} e) = 0.$$

Finalement, il reste à exprimer $e(t, \boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{J}(t, \boldsymbol{x})$ en fonction de $T(t, \boldsymbol{x})$. La thermodynamique indique que la chaleur volumique est reliée à la température par

$$e(t, \boldsymbol{x}) = \rho C_p T(t, \boldsymbol{x}).$$

Par hypothèse, le flux de chaleur $\boldsymbol{J}(t, \boldsymbol{x})$ est proportionnel à $(\nabla T)(t, \boldsymbol{x})$:

$$\boldsymbol{J}(t, \boldsymbol{x}) = -\lambda \nabla T.$$

Le signe négatif est naturel : le flux de chaleur est inverse à la différence de température, ou plus précisément au gradient de température, pour justement équilibrer celle-ci.

En mettant tout cela ensemble,

$$\rho C_p\, \partial_t T - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = 0,$$

donc, lorsque λ est constant,

$$\rho C_p\, \partial_t T - \lambda \Delta T = 0.$$

□

4.1.2. Conditions au bord

Maintenant que l'équation de la chaleur a été déduite dans un solide sans bord ni forçage, considérons un solide plus réel avec un bord et des forçages.

Hypothèses et forçages

- le solide est représenté par un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$;
- le solide est chauffé par un flux de chaleur volumique $S \in C([0, \infty), \Omega)$ [W/m^3] ;
- sur une partie Γ_d du bord, le solide est en contact avec un réservoir de température qui fixe la température $h \in C([0, \infty), \Gamma_d)$ [K] ;
- sur une partie Γ_n du bord, un flux de chaleur $g \in C([0, \infty), \Gamma_n)$ [W/m^2] est prescrit ;
- $\Gamma_n \cup \Gamma_d = \partial\Omega$ et $\Gamma_n \cap \Gamma_d = \varnothing$;
- la température en temps $t = 0$ est $T_0 \in C(\Omega)$ [K].

Proposition 4.1.2. *Sous les hypothèses précédentes, la température est régie par le problème suivant :*

$$\begin{cases} \rho C_p\, \partial_t T - \lambda \Delta T = S & \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \\ T = h & \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma_d, \\ -\lambda\, \boldsymbol{n} \cdot \nabla T = g & \text{sur } (0, +\infty) \times \Gamma_n, \\ T(0, \cdot) = T_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Preuve. Le bilan d'énergie sur un domaine virtuel $V \subset \Omega$ inclut maintenant le forçage volumique S :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V e(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{\partial V} \boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) + \int_V S(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Ce qui, par le lemme de du Bois-Reymond, donne :

$$\partial_t e + \nabla\cdot\boldsymbol{J} = S \qquad \text{dans } (0,+\infty)\times\Omega.$$

Le forçage sur Γ_d donne simplement que T est égal à la valeur h prescrite :

$$T = h \qquad \text{sur } (0,+\infty)\times\Gamma_d.$$

Le forçage sur Γ_n indique que le flux $\boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x})$ sur le bord est égal à la valeur $g(t,\boldsymbol{x})$ prescrite :

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x}) = g(t,\boldsymbol{x}) \qquad \text{sur } (0,+\infty)\times\Gamma_n.$$

Les relations

$$e(t,\boldsymbol{x}) = \rho C_p T(t,\boldsymbol{x}), \qquad\qquad \boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{x}) = -\lambda\nabla T(t,\boldsymbol{x}),$$

donnent le résultat. □

4.1.3. Adimensionnement

Pour l'instant, toutes les quantités ont des unités. L'idée de l'adimensionnement est de rendre toutes les quantités sans dimension, et ce pour les raisons suivantes :

— pouvoir comparer des situations (si on mesure $\boldsymbol{x}$ en mètres, pouces, miles, la physique reste la même)

— simplifier les constantes pour en mettre le maximum à un.

Grandeurs de référence

— longueur de référence L, par exemple $L = \mathrm{diam}(\Omega)$

— temps de référence τ, sera choisi par la suite

Variables adimensionnées

L'idée est de définir des variables sans dimensions de la façon suivante

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{L}, \qquad \bar{t} = \frac{t}{\tau}.$$

et d'effectuer un changement de variable

$$\bar{T}(\bar{t},\bar{\boldsymbol{x}}) := T(L\bar{\boldsymbol{x}},\tau\bar{t}).$$

Explicitement

$$\partial_{\bar{t}}\bar{T} = \tau\partial_t T,$$

et

$$\bar{\nabla}\bar{T} = L\nabla T, \qquad \text{donc} \qquad \bar{\Delta}\bar{T} = L^2\Delta T.$$

Ainsi dans les nouvelles variables, l'équation devient :

$$\frac{\rho C_p}{\tau}\partial_{\bar{t}}\bar{T} - \frac{\lambda}{L^2}\bar{\Delta}\bar{T} = S(L\bar{\boldsymbol{x}},\tau\bar{t}).$$

En choisissant

$$\tau = \frac{\rho C_p L^2}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \bar{S}(\bar{t},\bar{\boldsymbol{x}}) := \frac{L^2}{\lambda}S(L\bar{\boldsymbol{x}},\tau\bar{t}),$$

alors on obtient l'équation adimensionnée

$$\partial_{\bar{t}}\bar{T} - \bar{\Delta}\bar{T} = \bar{S} \qquad \text{dans } \bar{\Omega} := \frac{\Omega}{L}.$$

En introduisant un $\bar{h}$ et $\bar{g}$, on aura

$$\bar{T} = \bar{h} \quad \text{sur } \bar{\Gamma}_d := \frac{\Gamma_d}{L}, \qquad \text{et} \qquad -\bar{\boldsymbol{n}} \cdot \bar{\nabla}\bar{T} = \bar{g} \quad \text{sur } \bar{\Gamma}_n := \frac{\Gamma_n}{L}.$$

Par conséquent, en renommant pour ne pas garder les barres

$$\bar{T} \to u, \qquad \bar{S} \to f, \qquad \bar{h} \to h, \qquad \bar{g} \to g, \qquad \bar{\Omega} \to \Omega, \qquad \bar{\Gamma}_d \to \Gamma_d, \qquad \bar{\Gamma}_n \to \Gamma_n,$$

on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ u = h & \text{sur } (0,\infty)\times\Gamma_d, \\ -\boldsymbol{n}\cdot\nabla u = g & \text{sur } (0,\infty)\times\Gamma_n, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

C'est un principe général, voir le théorème de Vaschy–Buckingham. À remarquer que la température n'a pas été adimensionnée, ce qui ici ne change rien car l'équation est linéaire. Pour les équations non-linéaires, cela devient indispensable.

4.2. Résolution historique

Historiquement, une des premières méthodes de résolution de l'équation de la chaleur a été proposée par FOURIER. Par simplicité, on considère le cas $\Omega = (0, L)$ et des conditions de type Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \\ u(0,\cdot) = u_0, \end{cases}$$

avec u_0 donnée.

L'idée principale est d'utiliser la méthode de séparation des variables puis de superposer par linéarité. Cherchons une solution sous la forme

$$u(t,x) = T(t)X(x).$$

En mettant dans l'équation

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x),$$

et si T et X ne s'annulent pas

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Comme cela est vrai pour tout t et x, cela veut dire que les deux quantités sont constantes, disons égales à $-\lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$T'(t) = -\lambda T(t), \qquad X''(x) = -\lambda X(x).$$

On peut voir facilement que si $\lambda < 0$, alors il n'y a pas de solution non nulle avec $X(0) = X(L) = 0$. Pour $\lambda > 0$, les solutions sont :

$$T(t) = A\mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad X(x) = B\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + C\cos(\sqrt{\lambda}\,x).$$

La condition $X(0) = 0$ impose que $C = 0$ et $X(L) = 0$ que :

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Par conséquent, on a trouvé que

$$u_n(t,x) = a_n \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\Big(\frac{\pi n x}{L}\Big).$$

est une solution pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \in \mathbb{R}$. Il est possible d'en faire une superposition linéaire :

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\Big(\frac{\pi n x}{L}\Big).$$

En évaluant en $t = 0$, il faut obtenir u_0, donc :

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\Big(\frac{\pi n x}{L}\Big).$$

C'est le développement de u_0 en série de Fourier, donc les coefficients sont :

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x) \sin\Big(\frac{\pi n x}{L}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Par conséquent, en prenant a_n définis ainsi, $u(t,x)$ est solution du problème initial, où $u(0,x)$ est le prolongement impair et périodique de $u_0(x)$. La théorie générale des séries de Fourier permet sous hypothèses, d'obtenir la convergence ponctuelle ou au sens L^2 des séries.

4.3. Solution fondamentale

Comme pour l'équation de Laplace, intéressons-nous d'abord à des solutions explicites de l'équation de la chaleur. Pour trouver des solutions explicites particulières, il est souvent judicieux de regarder les symétries de l'équation.

4.3.1. Symétries

On considère l'équation de la chaleur adimensionnée dans $\mathbb{R}^n$:

$$\partial_t u - \Delta u = 0.$$

Translations en temps.

$$t \mapsto t + \varepsilon, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}, \qquad u \mapsto u, \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

C'est-à-dire : si $u(t,\boldsymbol{x})$ est une solution, alors

$$u_\varepsilon(t,\boldsymbol{x}) := u(t+\varepsilon,\boldsymbol{x})$$

l'est aussi.

Translations en espace.

$$t \mapsto t, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}, \qquad u \mapsto u, \qquad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Si $u(t,\boldsymbol{x})$ est solution, alors

$$u_a(t,\boldsymbol{x}) := u(t,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})$$

l'est aussi.

Scaling en u.

$$t \mapsto t, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}, \qquad u \mapsto \mathrm{e}^s u, \qquad s \in \mathbb{R},$$

Si $u(t,\boldsymbol{x})$ est solution, alors

$$u_s(t,\boldsymbol{x}) := \mathrm{e}^s u(t,\boldsymbol{x}),$$

l'est aussi.

Rotations.

$$t \mapsto t, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto R\boldsymbol{x}, \qquad u \mapsto u,$$

où $R \in SO(n)$ est une matrice de rotations. Si $u(t, \boldsymbol{x})$ est solution, alors

$$u_R(t, \boldsymbol{x}) := u(t, R\boldsymbol{x}),$$

l'est aussi.

Scaling parabolique.

$$t \mapsto \mathrm{e}^{2\lambda} t, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{e}^{\lambda}\boldsymbol{x}, \qquad u \mapsto u, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

Si $u(t, \boldsymbol{x})$ est solution, alors

$$u_\lambda(t, \boldsymbol{x}) = u(\mathrm{e}^{2\lambda} t, \mathrm{e}^{\lambda}\boldsymbol{x}),$$

l'est aussi.

Boosts galiléens.

$$t \mapsto t, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t, \qquad u \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} + \frac{1}{4}|\boldsymbol{v}|^2 t} u, \qquad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n,$$

Si $u(t, \boldsymbol{x})$ est solution, alors

$$u_{\boldsymbol{v}}(t, \boldsymbol{x}) := \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} + \frac{1}{4}|\boldsymbol{v}|^2 t} u(t, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t),$$

l'est aussi.

Principe de superposition.

$$t \mapsto t, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}, \qquad u \mapsto u + \phi,$$

où

$$\partial_t \phi - \Delta\phi = 0.$$

Par linéarité si u est une solution alors

$$u_\phi(t, \boldsymbol{x}) := u(t, \boldsymbol{x}) + \phi(t, \boldsymbol{x}),$$

est aussi une solution.

Symétrie cachée. De plus il existe pour l'équation de la chaleur une symétrie cachée reliée aux transformations conformes et d'Appell, mais qui dépasse le cadre de ce cours.

On peut maintenant s'intéresser à des solutions invariantes sous ces symétries.

Invariance par translation en temps.

$$u(t, \boldsymbol{x}) = u_\varepsilon(t, \boldsymbol{x}) = u(t + \varepsilon, \boldsymbol{x}) \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

En prenant $\varepsilon = -t$, cela donne

$$u(t, \boldsymbol{x}) = u(0, \boldsymbol{x}),$$

et on retrouve l'équation de Laplace $\Delta u = 0$. Cela est très logique, une solution invariante par translation en temps ne dépend pas du temps.

Invariance par translation en espace.

$$u(t, \boldsymbol{x}) = u_a(t, \boldsymbol{x}) = u(t, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}) \qquad \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Et en prenant $a = -\boldsymbol{x}$,

$$u(t, \boldsymbol{x}) = u(t, 0),$$

donc l'équation est juste $\partial_t u = 0$, dont les solutions sont

$$u(t, \boldsymbol{x}) = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Invariance par rotations.

$$u(t,\boldsymbol{x}) = u_R(t,\boldsymbol{x}) = u(t,R\boldsymbol{x}) \qquad \forall R \in SO(n).$$

Et en prenant la rotation telle que $R\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_1$, cela donne :

$$u(t,\boldsymbol{x}) = u(t,|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_1),$$

ce qui est une solution radiale :

$$u(t,\boldsymbol{x}) = v(t,|\boldsymbol{x}|).$$

Comme lors du calcul de la solution radiale du laplacien, l'équation devient :

$$\partial_t v - \left(\partial_{rr} v + \frac{n-1}{r}\partial_r v\right) = 0, \qquad r = |\boldsymbol{x}|.$$

Invariance par scaling parabolique / d'échelle.

$$u(t,\boldsymbol{x}) = u_\lambda(t,\boldsymbol{x}) = u(\mathrm{e}^{2\lambda}t, \mathrm{e}^{\lambda}\boldsymbol{x}) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Et en prenant $\lambda = -\frac{1}{2}\log t$, $\mathrm{e}^{2\lambda}t = 1$ et $\mathrm{e}^{\lambda}\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{t}}$, donc :

$$u(t,\boldsymbol{x}) = u\left(1, \frac{\boldsymbol{x}}{t^{1/2}}\right).$$

C'est ce qu'on appelle une solution invariante d'échelle :

$$u(t,\boldsymbol{x}) = v\left(\frac{\boldsymbol{x}}{t^{1/2}}\right).$$

On a, en posant $\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{x}}{t^{1/2}}$:

$$\partial_t u = -\frac{\boldsymbol{x}}{2t^{3/2}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\gamma}} v = -\frac{1}{2t}\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\gamma}} v, \qquad \Delta u = \frac{1}{t}\Delta_{\boldsymbol{\gamma}} v.$$

Donc l'équation devient :

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\gamma}} v + \Delta_{\boldsymbol{\gamma}} v = 0.$$

Conclusion. En demandant que la solution soit invariante sous une certaine symétrie, cela réduit le nombre de variables : de $(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ on obtient moins de variables que $n+1$, la réduction dépendant de la dimension du groupe de symétries.

4.3.2. Solution fondamentale *

Les solutions invariantes par rotations ou d'échelles satisfont encore des EDP, mais en imposant les deux ensembles cela va donner une EDO, potentiellement résoluble explicitement.

Essayons avec une solution invariante d'échelle et invariante par rotations :

$$u(t,\boldsymbol{x}) = v\left(\frac{|\boldsymbol{x}|}{t^{1/2}}\right),$$

.e. une solution invariante d'échelle radiale.

Mais l'équation de la chaleur a la propriété de conservation suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} u(0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

∗. Une approche alternative est donnée par Evans (§2.3.1).

pour autant que u et ses dérivées décroissent à l'infini. En effet :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^n} u(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t u)(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{B(\mathbf{0},R)} (\Delta u)(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{\partial B(\mathbf{0},R)} (\boldsymbol{n}\cdot\nabla u)(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) = 0.\end{aligned}$$

La solution précédente ne satisfait pas cela :

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} v\Big(\frac{|\boldsymbol{x}|}{t^{1/2}}\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = t^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} v(|\boldsymbol{y}|)\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

i.e. une telle solution ne décroît pas bien à l'infini ou a masse nulle.

Pour satisfaire la propriété de conservation, combinons le scaling parabolique avec le scaling en u :

$$t \mapsto \mathrm{e}^{2\lambda}t, \qquad \boldsymbol{x}\mapsto \mathrm{e}^{\lambda}\boldsymbol{x}, \qquad u\mapsto \mathrm{e}^{\alpha\lambda}u, \qquad \lambda\in\mathbb{R},$$

où $\alpha\in\mathbb{R}$ est un paramètre à fixer ultérieurement.

Considérons une solution invariante sous cette combinaison :

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{\alpha\lambda}u(\mathrm{e}^{2\lambda}t,\mathrm{e}^{\lambda}\boldsymbol{x}) \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

En prenant $\lambda = -\frac{1}{2}\log t$,

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{t^{\alpha/2}}u\Big(1,\frac{\boldsymbol{x}}{t^{1/2}}\Big).$$

Explicitement, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{t^{\alpha/2}}\int_{\mathbb{R}^n} u\Big(1,\frac{\boldsymbol{x}}{t^{1/2}}\Big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{t^{n/2}}{t^{\alpha/2}}\int_{\mathbb{R}^n} u(1,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

qui est constant si et seulement si $\alpha = n$.

On choisit donc $\alpha = n$ et en plus on demande l'invariance par rotations, *i.e.* qu'elle soit radiale :

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{t^{n/2}}v\Big(\frac{|\boldsymbol{x}|}{t^{1/2}}\Big).$$

Regardons ce que doit satisfaire v pour que u soit une solution de la chaleur : en posant $z = \frac{|\boldsymbol{x}|}{t^{1/2}}$,

$$\partial_t u = -\frac{n}{2t^{n/2+1}}v\Big(\frac{|\boldsymbol{x}|}{t^{1/2}}\Big) - \frac{1}{2t^{n/2+3/2}}\boldsymbol{x}\,v'\Big(\frac{|\boldsymbol{x}|}{t^{1/2}}\Big) = -\frac{1}{2t^{n/2+1}}\left(nv(z)+zv'(z)\right),$$

et

$$\Delta u = \frac{1}{t^{n/2+1}}\left(v''(z)+\frac{n-1}{z}v'(z)\right),$$

donc l'équation devient :

$$v''(z)+\left(\frac{n-1}{z}+\frac{z}{2}\right)v'(z)+\frac{n}{2}v(z) = 0.$$

Pour résoudre cette équation, observons qu'elle peut se réécrire comme :

$$\left(z^{n-1}v'(z)+\frac{z^n}{2}v(z)\right)' = 0,$$

donc

$$z^{n-1}v'(z) + \frac{z^n}{2}v(z) = C.$$

Si $n = 1$, on a

$$v'(z) + \frac{z}{2}v(z) = C,$$

et en supposant que v et v' décroissent vite à l'infini, cela force $C = 0$. Si $n \neq 1$, on suppose v et v' régulières en $z = 0$: en évaluant l'équation en $z = 0$, on obtient aussi $C = 0$.

Par conséquent, on considère

$$z^{n-1}v'(z) + \frac{z^n}{2}v(z) = 0, \qquad \text{i.e.} \qquad v'(z) = -\frac{z}{2}v(z),$$

et la solution est

$$v(z) = Ae^{-z^2/4}.$$

En fixant la valeur de $A \in \mathbb{R}$ de manière à ce que

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} u(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} v(|\boldsymbol{y}|)\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = A\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\boldsymbol{y}|^2/4}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = A\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-y_i^2/4}\,\mathrm{d}y_i = A(4\pi)^{n/2},$$

cela donne la définition suivante :

Définition 4.3.1 (solution fondamentale)**.** La fonction

$$\Phi(t,\boldsymbol{x}) := \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|\boldsymbol{x}|^2/(4t)}, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ 0, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ t < 0, \end{cases}$$

est appelée solution fondamentale de l'équation de la chaleur. À noter qu'elle est singulière en $(t,\boldsymbol{x}) = (0,0)$. La normalisation est telle que pour $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1.$$

4.3.3. Formules de représentation *

On s'intéresse à représenter la solution de

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{dans } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où u_0 est donnée. On a vu que $(t,\boldsymbol{x}) \mapsto \Phi(t,\boldsymbol{x})$ est solution de la chaleur, sauf en $(0,0)$. Donc $(t,\boldsymbol{x}) \mapsto \Phi(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ l'est aussi pour tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, $(t,\boldsymbol{x}) \mapsto \Phi(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})u_0(\boldsymbol{y})$ est aussi solution (sauf en $(0,\boldsymbol{y})$), et cela suggère d'en prendre une somme infinie.

Théorème 4.3.2 (formule de représentation)**.** *Si $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors*

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})u_0(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2/(4t)}u_0(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

vérifie :

1. $u \in C^\infty\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^n\big)$;
2. $\partial_t u - \Delta u = 0$ *dans* $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$;
3. $\lim_{t\to 0} u(t,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$ *pour tout* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

∗. Provient essentiellement de EVANS (§2.3.1).

Preuve.

1. Comme $t^{-n/2}\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{x}|^2/(4t)}$ est infiniment différentiable, avec dérivées bornées sur $(\delta,\infty)\times\mathbb{R}^n$ pour tout $\delta>0$, alors
$$u\in C^\infty\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^n\big).$$
2. Pour $t>0$, on a
$$(\partial_t u-\Delta u)(t,\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_t\Phi-\Delta\Phi)(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})u_0(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}=0.$$
3. Soient $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon>0$. Par continuité de u_0, il existe $\delta>0$ tel que, si $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<\delta$, alors $|u_0(\boldsymbol{y})-u_0(\boldsymbol{x})|<\varepsilon$. Comme la moyenne de Φ est normalisée à un,
$$|u(t,\boldsymbol{x})-u_0(\boldsymbol{x})|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\big(u_0(\boldsymbol{y})-u_0(\boldsymbol{x})\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right|\le I+J,$$
où
$$\begin{aligned}I&:=\int_{B(\boldsymbol{x},\delta)}\Phi(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|u_0(\boldsymbol{y})-u_0(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\le\varepsilon\int_{B(\boldsymbol{x},\delta)}\Phi(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\le\varepsilon,\\ J&:=\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(\boldsymbol{x},\delta)}\Phi(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|u_0(\boldsymbol{y})-u_0(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\le 2\|u_0\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(\boldsymbol{x},\delta)}\Phi(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$
Or
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(\boldsymbol{x},\delta)}\Phi(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}&=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(\boldsymbol{x},\delta)}\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2/(4t)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\\&=\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(\boldsymbol{0},\delta/t^{1/2})}\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{z}|^2/4}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\xrightarrow[t\to0]{}0,\end{aligned}$$
avec le changement de variables
$$\boldsymbol{z}=\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{t^{1/2}},\qquad\qquad \mathrm{d}\boldsymbol{z}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{t^{n/2}}.$$
Par conséquent, pour t assez petit,
$$|u(t,\boldsymbol{x})-u_0(\boldsymbol{x})|\le 2\varepsilon.$$

□

Remarque 4.3.3. Le résultat du théorème précédent s'écrit formellement comme
$$\begin{cases}\partial_t\Phi-\Delta\Phi=0 & \text{dans } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n,\\ \Phi(0,\cdot)=\delta_0 & \text{dans } \mathbb{R}^n,\end{cases}$$
où δ_0 est la mesure de Dirac en zéro.

Remarque 4.3.4. Si $u_0\in C(\mathbb{R}^n)$ est bornée, positive et non-triviale, alors
$$u(t,\boldsymbol{x})=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2/(4t)}u_0(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$
est strictement positive pour tout $t>0$ et $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$. On dit que l'équation de la chaleur a une vitesse de propagation infinie : instantanément, la température devient strictement positive partout si la température initiale est positive et strictement positive en un point.

On s'intéresse maintenant à représenter la solution du problème inhomogène

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{dans } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u = 0 & \text{sur } \{t=0\}\times\mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où f est donnée.

Pour $s \geq 0$ fixé,

$$u^s(t,\boldsymbol{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) f(s,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

est solution de

$$\begin{cases} \partial_t u^s - \Delta u^s = 0 & \text{dans } (s,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u^s = f & \text{sur } \{t=s\}\times\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Le principe de Duhamel indique qu'une solution du problème inhomogène peut être obtenue en intégrant u^s en s sur $(0,t)$:

$$u(t,\boldsymbol{x}) := \int_0^t u^s(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s.$$

Formellement,

$$(\partial_t u)(t,\boldsymbol{x}) = u^t(t,\boldsymbol{x}) + \int_0^t (\partial_t u^s)(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s,$$

et

$$(\Delta u)(t,\boldsymbol{x}) = \int_0^t (\Delta u^s)(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s,$$

donc

$$(\partial_t u - \Delta u)(t,\boldsymbol{x}) = u^t(t,\boldsymbol{x}) + \int_0^t (\partial_t u^s - \Delta u^s)(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s = f(t,\boldsymbol{x}).$$

Il est possible de le démontrer. Pour cela, introduisons la notation

$$C^{1,2}\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^n\big) := \big\{u : (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : u, \nabla u, D^2 u, \partial_t u \in C\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^n\big)\big\}.$$

Théorème 4.3.5 (formule de représentation avec terme source). *Si $f \in C^{1,2}\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^n\big)$ est à support compact, alors*

$$\begin{aligned} u(t,\boldsymbol{x}) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) f(s,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2/(4(t-s))} f(s,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

vérifie :

1. $u \in C^{1,2}\big((0,\infty)\times\mathbb{R}^n\big)$;
2. $\partial_t u - \Delta u = f$ *dans* $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$;
3. $\lim_{t\to 0} u(t,\boldsymbol{x}) = 0$ *pour tout* $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$.

Preuve. La preuve est conceptuellement proche de celle du théorème 3.3.2 pour l'équation de Laplace. Voir Evans (§2.3, Theorem 2). □

Évidemment, par linéarité, en combinant les deux théorèmes précédents, on obtient une représentation du problème inhomogène avec condition initiale :

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) u_0(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) f(s,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s.$$

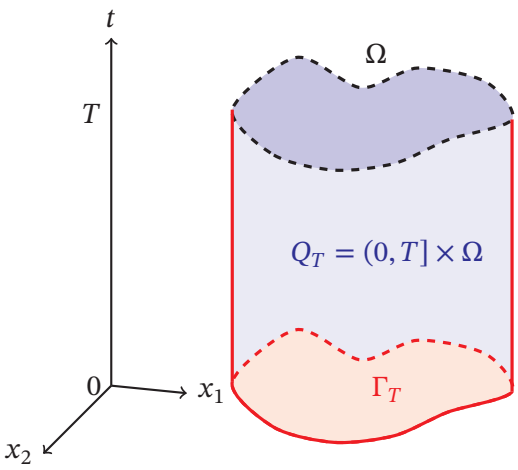
4.4. Propriétés de l'équation de la chaleur *

Les propriétés que l'on va déduire sont principalement locales. Pour cela, introduisons un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 4.4.1 (cylindre et bord parabolique)**.**

1. Le cylindre parabolique sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est
$$Q_T := (0,T] \times \Omega.$$
2. Le bord parabolique de Q_T est
$$\Gamma_T := \overline{Q_T} \setminus Q_T.$$

À noter que Q_T contient le haut $\{t = T\} \times \Omega$ et que Γ_T n'est pas le bord topologique de Q_T : il contient le fond $\{t = 0\} \times \Omega$, les bords, mais pas le haut $\{t = T\} \times \Omega$.



4.4.1. Formule de la moyenne

Le but est d'obtenir un analogue de la formule de la moyenne des fonctions harmoniques, mais pour la chaleur.

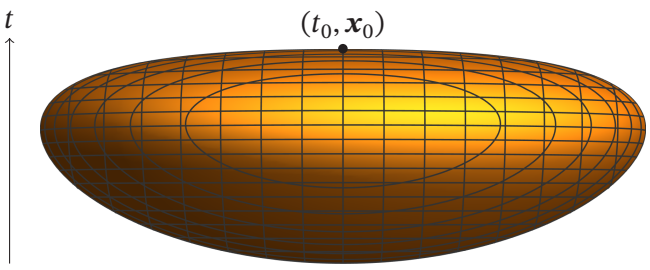
Pour le Laplacien, observons que les sphères $\partial B(\boldsymbol{x}, r)$ sont exactement les courbes de niveau de la solution fondamentale de l'équation de Laplace. Les boules sont

$$\overline{B}(\boldsymbol{x}, r) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \,:\, \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \geq \Phi(r)\},$$

car $\Phi(r)$ est strictement décroissante. Cela suggère de travailler sur les boules de chaleur (fermées)

$$E((t,\boldsymbol{x}), r) := \left\{(s,\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, \Phi(t-s, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \geq \frac{1}{r^n}\right\},$$

car son bord est une courbe de niveau de $\Phi(t-s, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$.



∗. Provient essentiellement de EVANS (§2.3.2-3).

Théorème 4.4.2 (formule de la moyenne). *Si $u \in C^{1,2}(Q_T)$ est solution de l'équation de la chaleur, alors*

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E((t,\boldsymbol{x}),r)} u(s,\boldsymbol{y}) \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{(t-s)^2} \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s$$

pour tout $E((t,\boldsymbol{x}),r) \subset Q_T$.

Avant d'en faire la preuve, montrons la normalisation, c'est-à-dire lorsque $u = 1$:

Preuve. Par translation en temps et en espace, il suffit de montrer le cas où $t = 0$ et $\boldsymbol{x} = 0$. Définissons

$$\begin{aligned}\phi(r) &:= \frac{1}{r^n} \iint_{E(0,r)} u(s,\boldsymbol{y}) \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{s^2} \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s \\ &= \iint_{E(0,1)} u(r^2 t, r\boldsymbol{z}) \frac{|\boldsymbol{z}|^2}{t^2} \,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

avec le changement de variables $s = r^2 t$ et $\boldsymbol{y} = r\boldsymbol{z}$. Comme pour les fonctions harmoniques, dérivons :

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= \iint_{E(0,1)} \left(2rt\, \partial_s u(r^2 t, r\boldsymbol{z}) \frac{|\boldsymbol{z}|^2}{t^2} + \boldsymbol{z} \cdot \nabla u(r^2 t, r\boldsymbol{z}) \frac{|\boldsymbol{z}|^2}{t^2} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(0,r)} \left(2s\, \partial_s u \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{s^2} + \boldsymbol{y} \cdot \nabla u \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{s^2} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Introduisons la fonction

$$\begin{aligned}\psi(s,\boldsymbol{y}) &:= \log\big(\Phi(-s,-\boldsymbol{y})\big) + n \log r \\ &= -\frac{n}{2} \log(-4\pi s) + \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{4s} + n \log r,\end{aligned}$$

qui vaut zéro sur le bord $\partial E(0,r)$ de $E(0,r)$. Après plusieurs intégrations par parties (voir lemme A.0.2), on obtient

$$\phi'(r) = -\frac{4n}{r^{n+1}} \iint_{E(0,r)} (\partial_s u - \Delta u)\, \psi \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s = 0.$$

Par conséquent, ϕ est constante, donc

$$\phi(r) = \lim_{\varepsilon \to 0} \phi(\varepsilon) = u(0,0) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^n} \iint_{E(0,\varepsilon)} \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{s^2} \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s = 4u(0,0),$$

car il est possible de montrer (voir lemme A.0.1) que

$$\frac{1}{r^n} \iint_{E(0,r)} \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{s^2} \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s = \iint_{E(0,1)} \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{s^2} \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s = 4.$$

Cela donne la formule annoncée. □

4.4.2. Principe du maximum

D'un point de vue physique, il est raisonnable de s'attendre à un principe du maximum : la température s'équilibrant, elle ne peut jamais être plus grande en un point que ce qu'elle était à l'instant initial ou sur les bords. Mathématiquement, vu la formule de la moyenne obtenue, c'est aussi raisonnable.

Théorème 4.4.3 (principe du maximum). *Si*

$$u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$$

est solution de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \qquad \text{dans } Q_T,$$

alors on a :

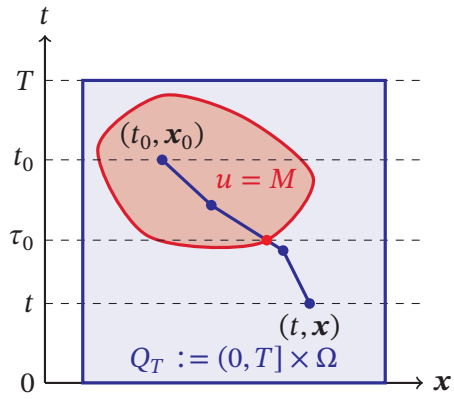
1. *le principe du maximum faible :*
$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$
2. *le principe du maximum fort : si Ω est connexe et qu'il existe un point $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in Q_T$ tel que*
$$u(t_0, \boldsymbol{x}_0) = \max_{\overline{Q_T}} u,$$
alors u est constante dans $\overline{Q_{t_0}}$.

Les mêmes assertions sont valides en remplaçant max *par* min *: c'est le principe du minimum.*

L'interprétation du principe du maximum fort est que si le maximum est atteint en un point intérieur, alors u est constante pour tous les temps précédents.

Preuve. Soit
$$M := \max_{\overline{Q_T}} u.$$
La stratégie est conceptuellement similaire à ce qui a été fait pour les fonctions harmoniques dans le théorème 3.3.10.

2. Supposons qu'il existe un point $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in Q_T$ tel que $u(t_0, \boldsymbol{x}_0) = M$. Il existe $r > 0$ assez petit tel que
$$E\big((t_0, \boldsymbol{x}_0), r\big) \subset Q_T.$$
Par la formule de la moyenne,
$$M = u(t_0, \boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E((t_0,\boldsymbol{x}_0),r)} u(s, \boldsymbol{y}) \frac{|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}|^2}{(t_0 - s)^2} \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s \leq M,$$
car
$$1 = \frac{1}{4r^n} \iint_{E((t_0,\boldsymbol{x}_0),r)} \frac{|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}|^2}{(t_0 - s)^2} \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s.$$
Il y a donc égalité, ce qui implique
$$u(s, \boldsymbol{y}) = M \qquad \text{pour tout } (s, \boldsymbol{y}) \in E((t_0, \boldsymbol{x}_0), r).$$
Montrons que cela implique que $u(t, \boldsymbol{x}) = M$ pour tout $t < t_0$ et $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Soit $(t, \boldsymbol{x}) \in Q_T$ avec $t < t_0$. Par connexité de Ω, il existe un chemin polygonal reliant $\boldsymbol{x}_0$ à $\boldsymbol{x}$, ce qui donne un chemin polygonal $\gamma : [0, 1] \to Q_T$ reliant $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ à $(t, \boldsymbol{x})$, avec une coordonnée temporelle strictement décroissante. Posons
$$T_0 := \sup\big\{\tau \in [0, 1] : u(\gamma(\sigma)) = M \text{ pour tout } 0 \leq \sigma \leq \tau\big\},$$
le premier temps de sortie de γ de l'ensemble
$$\big\{(t, \boldsymbol{x}) \in Q_T : u(t, \boldsymbol{x}) = M\big\}.$$
Montrons par l'absurde que $T_0 = 1$. Si $T_0 < 1$, alors $u(\gamma(T_0)) = M$ et donc $u = M$ sur $E(\gamma(T_0), r)$ pour tout $r > 0$ assez petit. Cela est absurde, car il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\gamma(T_0 + \varepsilon) \in E(\gamma(T_0), r).$$
Donc $u(t, \boldsymbol{x}) = M$ pour tout $t < t_0$ et $\boldsymbol{x} \in \Omega$.



1. Comme $\overline{Q_T}$ est compact, u atteint son maximum sur $\overline{Q_T}$, disons en $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in \overline{Q_T}$:

$$M = u(t_0, \boldsymbol{x}_0).$$

Si $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in \Gamma_T$, il n'y a rien à faire et la conclusion est immédiate. Sinon, cela veut dire que $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in Q_T$, vu que

$$\Gamma_T = \overline{Q_T} \setminus Q_T.$$

Par le point 2., $u = M$ sur le cylindre parabolique $\overline{C_{t_0}}$ de la composante connexe C de $\boldsymbol{x}_0$. Comme le bord parabolique de C_{t_0} est inclus dans Γ_T, on obtient

$$M = \max_{\Gamma_T} u.$$

□

Examinons quelques conséquences du principe du maximum :

Corollaire 4.4.4. *Si $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ est une solution de*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{dans } Q_T, \\ u = 0 & \text{sur } [0,T] \times \partial\Omega, \\ u = u_0 & \text{sur } \{t = 0\} \times \Omega, \end{cases}$$

alors :

1. $\|u\|_{L^\infty(\overline{Q_T})} = \|u_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}$;
2. *u est unique ;*
3. *si $u_0 \geq 0$ sur $\overline{\Omega}$, alors $u \geq 0$ dans $\overline{Q_T}$;*
4. *si Ω est connexe, $u_0 \geq 0$ sur $\overline{\Omega}$ et qu'il existe $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ avec $u_0(\boldsymbol{x}_0) > 0$, alors $u > 0$ sur Q_T.*

Preuve.

1. Soit $(t, \boldsymbol{x}) \in \overline{Q_T}$. Par le principe du maximum faible,

$$u(t,\boldsymbol{x}) \leq \max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u = \max\left(\max_{\overline{\Omega}} u_0, 0\right) \leq \|u_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}.$$

Par le principe du minimum faible,

$$-\|u_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leq \min\left(0, \min_{\overline{\Omega}} u_0\right) = \min_{\Gamma_T} u = \min_{\overline{Q_T}} u \leq u(t,\boldsymbol{x}).$$

Ainsi

$$\|u\|_{L^\infty(\overline{Q_T})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}.$$

L'inégalité réciproque est immédiate en considérant $t = 0$.

2. L'unicité suit en appliquant le premier point à la différence de deux solutions ayant la même donnée initiale.
3. Comme $u = 0$ sur $[0,T] \times \partial\Omega$ et $u_0 \geq 0$ sur $\{t = 0\} \times \Omega$, le principe du minimum faible donne
$$0 \leq \min_{\Gamma_T} u = \min_{\overline{Q_T}} u,$$
donc $u \geq 0$ sur $\overline{Q_T}$.
4. Comme $\min_{\overline{Q_T}} u = 0$, si u s'annule en un point intérieur $(t, \boldsymbol{x}) \in Q_T$, le principe du minimum fort implique que $u = 0$ sur $\overline{Q_t}$, ce qui contredit l'existence d'un point $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ tel que $u_0(\boldsymbol{x}_0) > 0$. Ainsi $u > 0$ sur Q_T.

□

Le but est maintenant d'obtenir un principe du maximum et l'unicité dans $\mathbb{R}^n$, mais comme le domaine n'est pas borné, il faut ajouter une hypothèse sur le comportement à grande distance des solutions.

Théorème 4.4.5 (principe du maximum dans $\mathbb{R}^n$)**.** *Si $u \in C^{1,2}\big((0,T] \times \mathbb{R}^n\big) \cap C\big([0,T] \times \mathbb{R}^n\big)$ est solution de*
$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{dans } (0,T] \times \mathbb{R}^n, \\ u = u_0 & \text{sur } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^n, \end{cases}$$
et qu'il existe des constantes $A, a > 0$ telles que
$$u(t,\boldsymbol{x}) \leq A\mathrm{e}^{a|\boldsymbol{x}|^2} \qquad \forall t \in [0,T],\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$
alors
$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} u = \sup_{\mathbb{R}^n} u_0.$$

Preuve. Supposons d'abord que $T < \frac{1}{8a}$. Si T est plus grand, il suffira de répéter le résultat sur des intervalles de taille au plus $\frac{1}{8a}$ jusqu'à arriver à T.

Fixons $L \in \left(\frac{1}{8a}, \frac{1}{4a}\right)$, par exemple $L = \frac{3}{16a}$. Soit la fonction de comparaison
$$v(t,\boldsymbol{x}) := \frac{1}{(L-t)^{n/2}} \exp\left(\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4(L-t)}\right),$$
définie pour $t \in [0,T]$ et $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. C'est pratiquement la solution fondamentale, sauf le signe de l'exponentielle, mais on vérifie que
$$\partial_t v - \Delta v = 0 \qquad \text{sur } [0,T] \times \mathbb{R}^n.$$
Maintenant pour tout $\mu > 0$, soit
$$w := u - \mu v.$$
Par linéarité, w est aussi solution de l'équation de la chaleur. L'idée est d'appliquer le principe du maximum faible sur $Q_T^R := (0,T] \times B(\mathbf{0},R)$ à w :
$$\max_{\overline{Q_T^R}} w = \max_{\Gamma_T^R} w,$$
où Γ_T^R est composé de deux parties :
$$\Gamma_T^R = \big(\{t = 0\} \times \bar{B}(\mathbf{0},R)\big) \cup \big([0,T] \times \partial B(\mathbf{0},R)\big).$$
Or, sur le fond $\{t = 0\} \times \bar{B}(\mathbf{0},R)$,
$$w(0,\boldsymbol{x}) = u(0,\boldsymbol{x}) - \mu v(0,\boldsymbol{x}) \leq u_0(\boldsymbol{x}) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0.$$

Sur les bords $[0,T]\times\partial B(\mathbf{0},R)$, on a

$$\begin{aligned} w(t,\boldsymbol{x}) &= u(t,\boldsymbol{x}) - \mu v(t,\boldsymbol{x}) \\ &\leq A\mathrm{e}^{aR^2} - \frac{\mu}{(L-t)^{n/2}}\exp\left(\frac{R^2}{4(L-t)}\right) \\ &\leq A\mathrm{e}^{aR^2} - \frac{\mu}{L^{n/2}}\exp\left(\frac{R^2}{4L}\right), \end{aligned}$$

car $|\boldsymbol{x}| = R$ et $t \leq T < L$. Comme $L < \frac{1}{4a}$, la seconde exponentielle domine lorsque $R \to \infty$. Donc, pour $R > 0$ assez grand, si $|\boldsymbol{x}| = R$, alors

$$w(t,\boldsymbol{x}) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0.$$

Par conséquent, on vient de montrer que pour tout R assez grand,

$$\max_{[0,T]\times\bar{B}(\mathbf{0},R)} w \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0,$$

donc en prenant la limite $R \to \infty$, on obtient

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} w \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0,$$

c'est-à-dire

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} (u - \mu v) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0.$$

Finalement en prenant la limite $\mu \to 0$, cela donne

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} u \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0.$$

L'inégalité inverse est immédiate puisque $t = 0$ appartient à $[0,T]$. □

Cela permet de déduire l'unicité dans $\mathbb{R}^n$:

Corollaire 4.4.6 (unicité dans $\mathbb{R}^n$). *Pour $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ et $f \in C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, il existe au plus une solution $u \in C^{1,2}\big((0,T]\times\mathbb{R}^n\big) \cap C\big([0,T]\times\mathbb{R}^n\big)$ du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{dans } (0,T]\times\mathbb{R}^n, \\ u = u_0 & \text{sur } \{t=0\}\times\mathbb{R}^n, \end{cases}$$

satisfaisant

$$|u(t,\boldsymbol{x})| \leq A\mathrm{e}^{a|\boldsymbol{x}|^2} \qquad \forall t \in [0,T],\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

avec $A, a > 0$ des constantes.

Preuve. Soient u_1, u_2 deux solutions vérifiant les hypothèses. Le théorème précédent appliqué à $u_1 - u_2$ donne

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} (u_1 - u_2) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} (u_0 - u_0) = 0.$$

Appliqué à $u_2 - u_1$, il donne

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} (u_2 - u_1) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} (u_0 - u_0) = 0.$$

Par conséquent,

$$0 \leq u_1(t,\boldsymbol{x}) - u_2(t,\boldsymbol{x}) \leq 0,$$

c'est-à-dire $u_1 = u_2$. □

Remarque 4.4.7. Le théorème précédent est essentiellement optimal : sans condition de croissance au plus gaussienne, il y a une infinité de solutions au problème avec $u_0 = f = 0$. Ces solutions sont non physiques, la seule solution physique étant $u = 0$.

4.4.3. Régularité

Nous allons montrer qu'une solution de l'équation de la chaleur est automatiquement régulière.

Théorème 4.4.8 (régularité). *Si $u \in C^{1,2}(Q_T)$ est une solution de l'équation de la chaleur*

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \qquad \text{dans } Q_T,$$

alors $u \in C^\infty(Q_T)$.

Preuve. Introduisons le cylindre parabolique fermé

$$C\big((t,\boldsymbol{x}),r\big) := \big\{(s,\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, t-r^2 \le s \le t,\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \le r\big\} = [t-r^2,t] \times \bar{B}(\boldsymbol{x},r).$$

Soit $(t_0,\boldsymbol{x}_0) \in Q_T$ et $r>0$ tel que

$$C\big((t_0,\boldsymbol{x}_0),r\big) \subset Q_T.$$

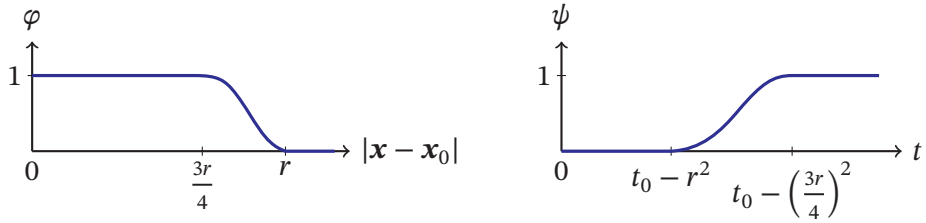
La preuve est constituée de trois étapes :

1. Construisons une fonction de cut-off valant un sur $C\Big((t_0,\boldsymbol{x}_0),\frac{3r}{4}\Big)$ et zéro hors de $C\big((t_0,\boldsymbol{x}_0),r\big)$. Pour cela, soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction cut-off telle que

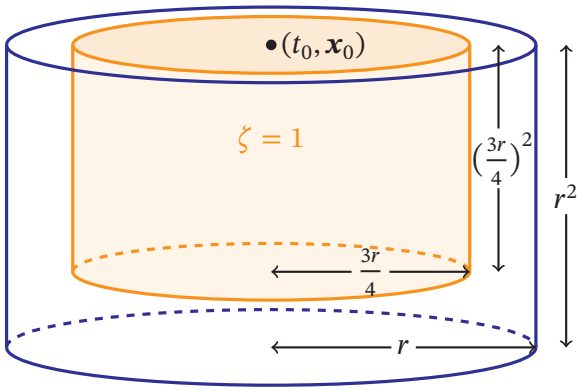
$$\begin{aligned} \varphi &= 1 \qquad \text{sur } \bar{B}\Big(\boldsymbol{x}_0,\tfrac{3r}{4}\Big),\\ \varphi &= 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}^n \setminus B(\boldsymbol{x}_0,r), \end{aligned}$$

et soit $\psi \in C^\infty([0,T])$ une fonction cut-off telle que

$$\begin{aligned} \psi &= 1 \qquad \text{sur } \Big[t_0-\Big(\tfrac{3r}{4}\Big)^2, t_0\Big],\\ \psi &= 0 \qquad \text{sur } \big[0, t_0-r^2\big]. \end{aligned}$$



Alors $\zeta \in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ définie par $\zeta(t,\boldsymbol{x}) := \psi(t)\varphi(\boldsymbol{x})$ est telle que $\zeta = 1$ sur $C\Big((t_0,\boldsymbol{x}_0),\frac{3r}{4}\Big)$ et $\zeta = 0$ sur le complémentaire de l'intérieur de $C\big((t_0,\boldsymbol{x}_0),r\big)$.



2. Établissons une identité donnant u sous la forme d'une convolution avec un noyau lisse. Soit $v := \zeta u$. Observons que cela définit une fonction $C^{1,2}([0,t_0]\times\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = f & \text{dans } [0,t_0]\times\mathbb{R}^n,\\ v = 0 & \text{sur } \{t=0\}\times\mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où $f \in C([0,t_0]\times\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$f := u\,\partial_t\zeta - 2\nabla u\cdot\nabla\zeta - u\Delta\zeta.$$

Comme v est bornée sur $[0,t_0]\times\mathbb{R}^n$ car $v=\zeta u$, le corollaire 4.4.6 indique que v est unique, donc donnée par la formule de représentation du théorème 4.3.5 :

$$v(t,\boldsymbol{x}) = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(t-s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(s,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s, \qquad \forall t\in[0,t_0],\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n.$$

Par conséquent, pour tout $(t,\boldsymbol{x})\in C\Big((t_0,\boldsymbol{x}_0),\frac{r}{2}\Big)$,

$$\begin{aligned} u(t,\boldsymbol{x}) = v(t,\boldsymbol{x}) &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(t-s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(s,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s \\ &= \iint_A \Phi(t-s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\big(u\,\partial_t\zeta - 2\nabla u\cdot\nabla\zeta - u\Delta\zeta\big)(s,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

car f a son support dans

$$A := C\big((t_0,\boldsymbol{x}_0),r\big)\setminus C\Big((t_0,\boldsymbol{x}_0),\tfrac{3r}{4}\Big).$$

Comme

$$\begin{aligned} \Phi(t-s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\nabla u(s,\boldsymbol{y})\cdot\nabla\zeta(s,\boldsymbol{y}) = \nabla_{\boldsymbol{y}}\cdot\big(\Phi(t-s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})u(s,\boldsymbol{y})\nabla\zeta(s,\boldsymbol{y})\big) \\ + \nabla\Phi(t-s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot u(s,\boldsymbol{y})\nabla\zeta(s,\boldsymbol{y}) \\ - \Phi(t-s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})u(s,\boldsymbol{y})\Delta\zeta(s,\boldsymbol{y}), \end{aligned}$$

et comme $\nabla\zeta = 0$ sur ∂A, en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} u(t,\boldsymbol{x}) &= \int_0^t\int_A\Big[\Phi(t-s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(\partial_t\zeta+\Delta\zeta)(s,\boldsymbol{y}) - 2\nabla\Phi(t-s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\nabla\zeta(s,\boldsymbol{y})\Big]u(s,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t\int_A K(t,\boldsymbol{x},s,\boldsymbol{y})\,u(s,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

où

$$K(t,\boldsymbol{x},s,\boldsymbol{y}) := \Phi(t-s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(\partial_t\zeta+\Delta\zeta)(s,\boldsymbol{y}) - 2\nabla\Phi(t-s,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\nabla\zeta(s,\boldsymbol{y}).$$

3. Montrons que u défini ainsi est C^∞. Pour $(t,\boldsymbol{x})\in C\Big((t_0,\boldsymbol{x}_0),\frac{r}{2}\Big)$ et $(s,\boldsymbol{y})\in A$, on est loin de la singularité de Φ, et donc K est régulier. Par conséquent, on peut prendre n'importe quelle dérivée en t ou $\boldsymbol{x}$ de u en les mettant sur K, donc $u\in C^\infty\Big(C\Big((t_0,\boldsymbol{x}_0),\frac{r}{2}\Big)\Big)$. Comme $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ est arbitraire, cela montre que $u\in C^\infty(Q_T)$.

□

4.5. Solutions faibles *

4.5.1. Motivations

Pour l'instant : existence et unicité dans $\mathbb{R}^n$ et sur $[0,L]$, mais seulement unicité dans un domaine borné Ω.

L'idée va être de définir une notion de solution faible, aussi appelée solution variationnelle, puis d'en montrer l'existence et l'unicité.

∗. Cette partie est essentiellement inspirée de GALLAGHER (§3.4) et EVANS (§7.1).

Pour cela considérons le problème suivant sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}) \cdot \nabla u + c(t,\boldsymbol{x})u = f & \text{dans } Q_T, \\ u = 0 & \text{sur } [0,T] \times \partial\Omega, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où $\boldsymbol{b} : Q_T \to \mathbb{R}^n$, $c, f : Q_T \to \mathbb{R}$ et $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ sont donnés. C'est ce qu'on appelle un problème d'advection (à cause du $\boldsymbol{b}$) réaction (à cause du c) diffusion (à cause du Laplacien). Le cas $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ et $c = 0$ correspond à l'équation de la chaleur.

Pour $u_0 \in C(\Omega)$ et $\boldsymbol{b}, c, f \in C(Q_T)$, une solution $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ est appelée une solution forte : le problème (*i.e.* l'équation, la condition de bord et la condition initiale) est vérifiée dans un sens classique.

La première étape est de définir une formulation faible, de manière analogue à ce qui a été fait pour l'équation de Poisson (proposition 3.2.3 et théorème 3.2.4) :

Proposition 4.5.1. *Soit $u_0 \in C(\Omega)$ et $\boldsymbol{b}, c, f \in C(Q_T)$.*

1. *Si $u \in C^{1,2}(Q_T)$ est une solution classique alors pour tout $v \in C_c^\infty(\Omega)$:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u(t,\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega (\nabla u)(t,\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla v)(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega \boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla u)(t,\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega c(t,\boldsymbol{x})u(t,\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(t,\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

   et

$$\int_\Omega u(0,\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega u_0(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

2. *Réciproquement si $u \in C^{1,2}(Q_T)$ vérifie ces deux égalités pour tout $v \in C_c^\infty(\Omega)$ et $u = 0$ sur $[0,T] \times \partial\Omega$ alors u est une solution forte.*

Preuve. Pour le sens direct, il s'agit de multiplier l'équation par v, d'intégrer sur Ω :

$$\int_\Omega (\partial_t u)(t,\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_\Omega (\Delta u)(t,\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega \boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla u)(t,\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega c(t,\boldsymbol{x})u(t,\boldsymbol{x})v(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(t,\boldsymbol{x})v(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Comme v est nulle sur $\partial\Omega$, une intégration par parties sur le deuxième terme donne la première égalité. La seconde vient juste de l'intégration de la condition initiale contre v.

Réciproquement, il s'agit d'intégrer par parties le même terme en arrière, puis d'utiliser le lemme de du Bois-Reymond. □

4.5.2. Espaces de fonctions à valeurs dans un Banach *

Comme vu pour l'équation de Poisson, il faut choisir les bons espaces fonctionnels pour définir les solutions faibles, en espérant pouvoir en montrer l'existence. Par exemple on aurait bien envie que $u(t,\cdot) \in H_0^1(\Omega)$ pour tout t, mais il faut ensuite définir une certaine régularité en temps.

Pour cela la bonne façon de faire est de voir une fonction $u(t,x)$ comme une fonction uniquement de t à valeur dans un espace de Banach : $u(t,x) = u(t)(x)$.

Définition 4.5.2. Pour un espace de Banach X et $1 \le p \le \infty$, l'ensemble $L^p(0,T;X)$ consiste en toutes les fonctions mesurables $u : [0,T] \to X$ telles que $N_X u \in L^p(0,T)$ où $(N_X u)(t) := \|u(t)\|_X$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \|N_X u\|_p = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} & \text{si } p < \infty, \\ \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

∗. Cette partie est essentiellement inspirée de GALLAGHER (§1.9) et EVANS (§5.9.2).

À noter que la notion de mesurabilité pour une fonction à valeur dans un Hilbert n'est pas si simple, mais nous ne rentrerons pas dans les détails.

En particulier si X est un espace de Hilbert, alors $L^2(0,T;X)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} := \int_0^T \big(u(t),v(t)\big)_X \,\mathrm{d}t.$$

En une dimension $C([0,T]) \subset L^\infty([0,T])$ et par analogie il est possible de définir les fonctions continues à valeurs dans un Banach :

Définition 4.5.3. Pour un espace de Banach X l'ensemble $C([0,T],X)$ consiste en toutes les fonctions continues $u : [0,T] \to X$ et c'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{C([0,T],X)} := \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X.$$

Dans le cas où X est lui-même un espace de fonctions sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors il y a une identification naturelle entre les fonctions $[0,T] \to X$ et des fonctions $[0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$. Par exemple $L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q_T)$ car

$$\int_0^T \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega |u(t)(x)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{Q_T} |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

4.5.3. Définition des solutions faibles

Comme dans le cas de l'équation de Poisson, introduisons la forme bilinéaire :

$$a[u,v;t] := (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \boldsymbol{b}(t,\cdot)v)_{L^2(\Omega)} + (c(t,\cdot)u, v)_{L^2(\Omega)},$$

qui permet de réécrire la proposition 4.5.1 comme

$$(u'(t),v)_{L^2} + a[u,v;t] = (f(t),v)_{L^2}, \tag{4.1}$$

où dans ce contexte, on note $u'(t) = (\partial_t u)(t)$ la dérivée temporelle.

Étudions les propriétés de cette forme bilinéaire :

Lemme 4.5.4. *Si $\boldsymbol{b}, c \in L^\infty(Q_T)$, alors :*

1. *La forme bilinéaire est continue sur $H^1_0(\Omega)$: il existe $C > 0$ tel que pour tout $u, v \in H^1_0(\Omega)$:*

$$|a[u,v;t]| \le C\|u\|_{H^1_0}\|v\|_{H^1_0},$$

2. *La forme bilinéaire satisfait une inégalité de Gårding : il existe $c_0 > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$:*

$$c_0\|u\|^2_{H^1_0} \le a[u,u;t] + \gamma\|u\|^2_{L^2}.$$

Preuve. La preuve suit lemme 3.4.17, la dépendance en temps ne changeant rien. □

Cherchons d'abord formellement une estimation d'énergie a priori :

Lemme 4.5.5 (estimation d'énergie a priori)**.** *En supposant que u soit une solution régulière du problème de Cauchy, alors :*

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2_{L^2} + \frac{c_0}{2}\|u(t)\|^2_{H^1_0} \le \frac{1}{2c_0}\|f(t)\|^2_{L^2} + \gamma\|u(t)\|^2_{L^2}.$$

Preuve. En multipliant l'équation par u et intégrant par parties le terme avec Δu, on obtient

$$(u'(t), u(t))_{L^2} + a[u(t), u(t); t] = (f(t), u(t))_{L^2},$$

et en utilisant l'inégalité de Gårding :

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_{L^2}^2 + c_0\|u(t)\|_{H_0^1}^2 \leq \gamma\|u(t)\|_{L^2}^2 + (f(t), u(t))_{L^2}.$$

Par l'inégalité de Poincaré et l'inégalité de Young $ab \leq \frac{c}{2}a^2 + \frac{1}{2c}b^2$

$$|(f(t), u(t))_{L^2}| \leq \|f(t)\|_{L^2}\|u(t)\|_{L^2} \leq \|f(t)\|_{L^2}\|u(t)\|_{H_0^1} \leq \frac{c_0}{2}\|u(t)\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{2c_0}\|f(t)\|_{L^2}^2,$$

il vient

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{c_0}{2}\|u(t)\|_{H_0^1}^2 \leq \frac{1}{2c_0}\|f(t)\|_{L^2}^2 + \gamma\|u(t)\|_{L^2}^2.$$

□

Au vu du lemme précédent, il est donc naturel de choisir $f \in L^2(Q_T)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$ et donc de chercher la solution dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, du moins quand $\gamma \leq 0$. Lorsque $\gamma > 0$, le terme $\gamma\|u(t)\|_{L^2}^2$ peut-être tout de même être absorbé par une inégalité de Grönwall, voir proposition 4.5.10. À noter que du coup l'équation (4.1), implique que $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ où $H^{-1}(\Omega)$ est l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.

Définition 4.5.6. Pour $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $\boldsymbol{b}, c \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$, une fonction $u : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$ est une solution faible si $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $u(0) = u_0$ et si pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et presque tout $t \in [0,T]$

$$\langle u'(t), v\rangle + a[u(t), v; t] = (f(t), v)_{L^2}.$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dénote le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$:

$$\langle\varphi, u\rangle := \varphi(u).$$

Remarquons que $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ suffirait en remplaçant $(f(t), v)_{L^2(\Omega)}$ par $\langle f(t), v\rangle$.

À noter qu'il est possible de démontrer que si $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, alors $u \in C([0,T], L^2(\Omega))$, voir par exemple Evans (§5.9.2, Theorem 3) ou Gallagher (Lemme 1.10.1).

4.5.4. Existence et unicité des solutions faibles

Le but est de montrer l'existence et l'unicité de la solution faible :

Théorème 4.5.7. *Pour $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $\boldsymbol{b}, c \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$, il existe une unique solution faible qui vérifie en outre $u \in C([0,T], L^2(\Omega))$ et*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}\right).$$

La stratégie de preuve est la suivante :

a. Projection sur un espace de dimension finie
b. Construction d'une suite de solutions approchées
c. Bornes sur les solutions approchées
d. Convergence vers une solution

C'est ce qu'on appelle une méthode de Galerkin.

a. Projection sur un espace de dimension finie La première étape est de trouver un équivalent des modes Fourier dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, plus précisément une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(\Omega)$ qui soit en plus une base orthonormée dans $H_0^1(\Omega)$. Pour cela le plus simple est de prendre les fonctions propres du laplacien :

Théorème 4.5.8 (base hilbertienne du Laplacien)**.** *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné, alors il existe une base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(\Omega)$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $e_k \in H_0^1(\Omega)$ soit une solution faible de*

$$-\Delta e_k = \lambda_k^2 e_k,$$

pour un certain $\lambda_k > 0$. De plus $(\lambda_k^{-1} e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$.

Preuve. Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, par le théorème de Lax–Milgram, il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de $-\Delta u = f$, et de plus $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$ où C est une constante reliée à l'inégalité de Poincaré. Notons $\mathcal{A} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ l'opérateur qui à $f \in L^2(\Omega)$ associe la solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$. Cet opérateur est borné vu que $\|\mathcal{A}f\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$. De plus cet opérateur $\mathcal{A} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est compact : pour toute suite bornée $(f_k)_k$ dans $L^2(\Omega)$, alors la suite $(\mathcal{A}f_k)_k$ admet une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$. En effet par le théorème de Rellich–Kondrachov, la suite $(\mathcal{A}f_n)_n \subset H_0^1(\Omega)$ étant bornée, elle admet une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$. Finalement, l'opérateur est symétrique car pour tout $f, g \in L^2(\Omega)$, en notant $u = \mathcal{A}f$ et $v = \mathcal{A}g$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}g, f)_{L^2(\Omega)} &= (v, f)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \\ &= (\nabla v, \nabla u)_{L^2(\Omega)} = (g, u)_{L^2(\Omega)} = (g, \mathcal{A}f)_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

En résumant, on a obtenu que $\mathcal{A} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est un opérateur auto-adjoint compact, donc par le théorème spectral pour de tels opérateurs : il existe une suite $(\alpha_k)_k \subset \mathbb{R}$ tendant vers zéro et une base hilbertienne $(e_k)_k$ de $L^2(\Omega)$ telle que

$$\mathcal{A}e_k = \alpha_k e_k.$$

En notant $u = \mathcal{A}e_k$, alors

$$\alpha_k = (\mathcal{A}e_k, e_k)_{L^2(\Omega)} = (\nabla u, \nabla u)_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

si bien que $\alpha_k \geq 0$. De plus, comme $\mathcal{A}f = 0$ implique $f = 0$ par construction, alors $\alpha_k > 0$ donc il peut s'écrire comme $\alpha_k = \lambda_k^{-2}$, avec $\lambda_k > 0$. Ainsi on a montré que

$$-\Delta e_k = \lambda_k^2 e_k.$$

Comme $e_k \in H_0^1(\Omega)$, et

$$(\nabla e_k, \nabla e_l)_{L^2(\Omega)} = (-\Delta e_k, e_l)_{L^2(\Omega)} = (\lambda_k^2 e_k, e_l)_{L^2(\Omega)} = \lambda_k^2 \delta_{kl},$$

cela montre que $(\lambda_k^{-1} e_k)_k$ est bien orthonormée. Reste à montrer la densité : si $u \in H_0^1(\Omega)$ est tel que $(\nabla u, \nabla e_k)_{L^2(\Omega)} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$0 = (\nabla u, \nabla e_k)_{L^2(\Omega)} = (u, -\Delta e_k)_{L^2(\Omega)} = \lambda_k^2 (u, e_k),$$

et donc $u = 0$, puisque $(e_k)_k$ est une base de $L^2(\Omega)$. □

Ainsi toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ s'écrit comme

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k e_k,$$

où $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$. Notons P_n la projection orthogonale sur $E_n := \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$:

$$P_n u = \sum_{k=1}^{n} \omega_k e_k.$$

b. Construction d'une suite de solutions approchées L'idée est alors de construire une solution approchée u_n sur l'espace de dimension finie $E_n \simeq \mathbb{R}^n$:

Proposition 4.5.9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une solution approchée $u_n : [0,T] \to E_n$ définie comme une solution faible de l'équation projetée sur E_n :*

$$\partial_t u_n - \Delta u_n + P_n\left(\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}) \cdot \nabla u_n + c(t,\boldsymbol{x}) u_n\right) = P_n f$$

i.e.

$$u_n \in L^2(0,T;E_n), \qquad u_n' \in L^2(0,T;E_n), \qquad u_n(0) = P_n u_0,$$

et pour tout $v \in E_n$ et presque tout $t \in [0,T]$

$$\langle u_n'(t), v\rangle + a[u_n(t), v; t] = ((P_n f)(t), v)_{L^2(\Omega)}.$$

Preuve. Par linéarité la dernière équation est équivalente à demander que

$$\langle u_n'(t), e_k\rangle + a[u_n(t), e_k; t] = ((P_n f)(t), e_k)_{L^2(\Omega)},$$

pour tout $1 \leq k \leq n$. Pour presque tout temps

$$(P_n f)(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) e_k,$$

où $t \to \varphi_k(t)$ est dans $L^2([0,T])$ puisque $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. On cherche la solution sous la forme

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t) e_i.$$

Ainsi en utilisant l'orthogonalité de la base, l'équation devient

$$\omega_k'(t) + \sum_{i=1}^{n} a[e_i, e_k, t]\omega_i(t) = \varphi_k(t),$$

ou encore sous forme vectorielle

$$U_n'(t) + A_n(t) U_n(t) = F_n(t),$$

où

$$\begin{aligned} U_n(t) &:= \big(\omega_k(t)\big)_k \in \mathbb{R}^n, \\ F_n(t) &:= \big(\varphi_k(t)\big)_k \in \mathbb{R}^n. \\ A_n(t) &:= \big(a[e_i, e_k, t]\big)_{k,i} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

C'est une équation différentielle ordinaire dans $\mathbb{R}^n$, donc par le théorème de Cauchy–Lipschitz (ou plutôt une variante vu que la continuité en temps n'est pas supposée), il existe une solution $U_n \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, donc $u_n \in C([0,T],E_n)$. Par l'équation $U_n' \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$ donc $u_n' \in L^2(0,T;E_n)$. □

c. Bornes sur les solutions approchées Une fois une solution approchée u_n construite pour tout n, l'idée est de montrer que $(u_n)_n$ est convergente, pour cela montrons déjà qu'elle est bornée :

Proposition 4.5.10. *La suite de solutions $(u_n)_n$ construite dans la proposition précédente est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et la suite $(u_n')_n$ est bornée dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.*

Preuve. L'idée est de suivre ce qui a été fait dans le lemme 4.5.5. En multipliant l'équation sur u_n par u_n et en intégrant,

$$\langle u_n'(t), u_n(t)\rangle + a[u_n(t), u_n(t); t] = ((P_n f)(t), u_n(t))_{L^2(\Omega)},$$

ce qui avec l'inégalité de Gårding donne

$$\frac{1}{2}\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + c\|u_n(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_n(t)\|_{H^1_0(\Omega)} + \gamma\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

car

$$((P_n f)(t), u_n(t))_{L^2(\Omega)} \leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_n(t)\|_{H^1_0(\Omega)}.$$

Par ailleurs, en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz puis d'inégalité de Young,

$$(f(t), u_n(t))_{L^2(\Omega)} \leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_n(t)\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{c_0}{2}\|u_n(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{1}{2c_0}\|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

et donc ensemble cela donne

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{c_0}{2}\|u_n(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{1}{2c_0}\|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Pour se débarrasser du terme $\gamma\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$, l'idée est de multiplier cette inégalité par $\mathrm{e}^{-2\gamma t}$ et d'observer qu'elle est équivalente à

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-2\gamma t}\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \frac{c_0}{2}\mathrm{e}^{-2\gamma t}\|u_n(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{1}{2c_0}\mathrm{e}^{-2\gamma t}\|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

et en intégrant en temps, on obtient

$$\mathrm{e}^{-2\gamma t}\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + c_0\int_0^t \mathrm{e}^{-2\gamma s}\|u_n(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\,\mathrm{d}s \leq \|u_n(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{c_0}\int_0^t \mathrm{e}^{-2\gamma s}\|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s.$$

On peut supposer $\gamma \geq 0$, puisqu'une constante de Gårding peut toujours être remplacée par une constante plus grande. Ainsi

$$\|u_n(t)\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + c_0\|u_n\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \leq \mathrm{e}^{2\gamma T}\|u_n(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{c_0}\mathrm{e}^{2\gamma T}\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Comme $u_n(0) = P_n u_0$, alors $\|u_n(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$ ce qui donne une borne uniforme dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$.

Finalement pour la borne uniforme sur u_n', notons la définition

$$\|u_n'\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{v\in H^1_0(\Omega)} \frac{|\langle u_n', v\rangle|}{\|v\|_{H^1_0(\Omega)}}.$$

Or pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$, notant $v_n = P_n v$ et en utilisant l'équation

$$|\langle u_n'(t), v\rangle| = |\langle u_n'(t), v_n\rangle| \leq |a[u_n(t), v_n; t]| + |(P_n f(t), v_n)_{L^2(\Omega)}| \leq \left(C\|u_n\|_{H^1_0(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right)\|v\|_{H^1_0(\Omega)},$$

ce qui montre que $\langle u_n'(t), v\rangle$ est uniformément bornée en n dans $L^2((0,T))$, donc que la suite $(u_n')_n$ est bornée dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. □

d. Convergence vers une solution L'idée est d'utiliser une méthode de compacité faible : toute suite bornée $(u_n)_n$ dans un espace de Hilbert H admet une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ faiblement convergente $u_{\varphi(n)} \rightharpoonup u$, *i.e.* telle que pour tout $v \in H$,

$$(u_{\varphi(n)}, v)_H \to (u, v)_H.$$

Par la suite on note par simplicité aussi $(u_n)_n$ des sous-suites de $(u_n)_n$.

Proposition 4.5.11. *Il existe $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. De plus $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ et u est une solution faible.*

Preuve. Par le théorème de Banach–Alaoglu, ou plutôt son corollaire sur les espaces de Hilbert, il existe par la proposition 4.5.10 des fonctions $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et $\dot{u} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ telles que

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{dans} \qquad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \qquad \text{et} \qquad u_n' \rightharpoonup \dot{u} \qquad \text{dans} \qquad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Un passage à la limite dans la définition de la dérivée faible permet l'identification $u' = \dot{u}$. Reste donc à montrer que u est une solution faible. On sait que u_n est une solution approchée, c'est-à-dire que pour tout $v \in E_n$ et presque tout $t \in [0,T]$,

$$\langle u_n'(t), v\rangle + a[u_n(t), v; t] = \big((P_n f)(t), v\big)_{L^2(\Omega)}.$$

Fixons $m \in \mathbb{N}^*$. Ainsi pour tout $v \in E_m$, et tout $n \geq m$, on a l'identité précédente qui converge presque partout quand $n \to \infty$ vers

$$\langle u'(t), v\rangle + a[u(t), v; t] = (f(t), v)_{L^2(\Omega)}.$$

Vu que cela est vrai pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, cela montre que l'identité précédente est vraie pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. Il est facile de passer à la limite dans l'inégalité d'énergie obtenue sur u_n pour obtenir la borne annoncée sur u.

Il reste à prouver que $u(0) = u_0$. Pour cela choisissant une fonction de cutoff $\psi \in C^\infty([0,T])$ telle que $\psi(0) = 1$ et $\psi(T) = 0$. Alors pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_0^T \langle u'(t), v\psi(t)\rangle \,\mathrm{d}t = -\langle u(0), v\rangle - \int_0^T \langle u(t), v\psi'(t)\rangle \,\mathrm{d}t.$$

De nouveau en fixant $m \in \mathbb{N}^*$, la solution approchée vérifiant $u_n(0) = P_n u_0$, la même égalité pour la solution approchée donne

$$\int_0^T \langle u_n'(t), v\psi(t)\rangle \,\mathrm{d}t = -\langle P_n u_0, v\rangle - \int_0^T \langle u_n(t), v\psi'(t)\rangle \,\mathrm{d}t,$$

pour $n \geq m$ et tout $v \in E_m$. En prenant la limite $n \to \infty$, on obtient

$$\int_0^T \langle u'(t), v\psi(t)\rangle \,\mathrm{d}t = -\langle u_0, v\rangle - \int_0^T \langle u(t), v\psi'(t)\rangle \,\mathrm{d}t,$$

pour tout $v \in E_m$. En prenant la limite $m \to \infty$ et en comparant, cela donne $u(0) = u_0$. Par conséquent u est bien une solution faible. □

e. Égalité d'énergie et unicité

Proposition 4.5.12. *Pour $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $\boldsymbol{b}, c \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$, toute solution faible u vérifie l'égalité d'énergie*

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = (f(t), u(t))_{L^2} - a[u(t), u(t); t],$$

l'inégalité d'énergie

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-2\gamma t}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right) + \frac{c_0}{2}\mathrm{e}^{-2\gamma t}\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2c_0}\mathrm{e}^{-2\gamma t}\|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et est unique.

Preuve. On peut montrer que comme $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ alors

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle u'(t), u(t)\rangle.$$

En substituant l'équation, cela donne l'égalité d'énergie

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = (f(t), u(t))_{L^2} - a[u(t), u(t); t].$$

En utilisant les inégalités de Gårding, Cauchy–Schwarz et Young comme précédemment sur u_n, on obtient l'inégalité d'énergie.

Finalement en intégrant l'inégalité d'énergie, cela donne

$$\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + c_0 \int_0^t \mathrm{e}^{2\gamma(t-s)}\|u_n(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\,\mathrm{d}s \leq \mathrm{e}^{2\gamma t}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{c_0}\int_0^t \mathrm{e}^{2\gamma(t-s)}\|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s.$$

et donc si $f = u_0 = 0$, $u = 0$ est la seule solution faible ce qui démontre l'unicité. □

5. Équations des ondes

5.1. Modèle d'une corde vibrante

Le but est de modéliser l'évolution temporelle d'une corde vibrante.

Hypothèses

— au repos la corde est le segment $[0, L]$
— la corde est attachée aux deux bouts
— la corde est homogène
— les déformations sont petites

Quantités

— $u(t, x)$ déplacement vertical de la corde [m]
— $u_0(x)$ déplacement vertical de la corde à l'instant initial [m]
— $v_0(x)$ vitesse verticale de la corde à l'instant initial [$\mathrm{m\,s^{-1}}$]
— $f(t, x)$ densité de force appliquée à la corde [$\mathrm{N\,m^{-1}}$]
— μ masse linéique de la corde [$\mathrm{kg\,m^{-1}}$]
— k tension dans la corde [N]

Proposition 5.1.1. *Sous les hypothèses précédentes, la position de la corde est régie par l'équation d'onde :*

$$\begin{cases} \mu\partial_{tt}u - k\partial_{xx}u = f & \textit{dans} \quad (0,\infty)\times(0,L), \\ u(0,\cdot) = u_0 & \textit{sur} \quad (0,L), \\ \partial_t u(0,\cdot) = v_0 & \textit{sur} \quad (0,L), \\ u(\cdot,0) = u(\cdot,L) = 0 & \textit{sur} \quad (0,\infty). \end{cases}$$

Preuve. Considérons une portion de corde entre $x = x_1$ et $x = x_2$ à un instant t. La masse de ce segment est

$$m := \int_{x_1}^{x_2} \mu \,\mathrm{d}x = \mu(x_2 - x_1),$$

et son accélération

$$a := \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \partial_{tt}u \,\mathrm{d}x.$$

La force externe est

$$F_{\text{ext}} := \int_{x_1}^{x_2} f \,\mathrm{d}x,$$

et la seconde loi de Newton indique que

$$ma = F_{\text{ext}} + F_{\text{cont}},$$

où F_{cont} est la force de contact agissant aux extrémités de la portion de corde $[x_1, x_2]$. La force exercée en un point de la corde x est $k \sin\theta(x)$, où $\theta(x)$ est l'angle que fait la corde avec l'horizontale. Ainsi la force exercée sur la portion de corde $[x_1, x_2]$ est

$$F_{\text{cont}} := k\big(\sin\theta(x_2) - \sin\theta(x_1)\big).$$

Sous l'hypothèse de petites déformations

$$\sin\theta(x) \approx \tan\theta(x) = \partial_x u,$$

donc par le théorème fondamental de l'analyse

$$F_{\text{cont}} = k\big((\partial_x u)(x_2) - (\partial_x u)(x_1)\big) = k\int_{x_1}^{x_2} \partial_{xx} u \,\mathrm{d}x.$$

Ainsi la seconde loi de Newton devient

$$\int_{x_1}^{x_2} \mu\partial_{tt} u \,\mathrm{d}x = k\big((\partial_x u)(x_2) - (\partial_x u)(x_1)\big) + \int_{x_1}^{x_2} f \,\mathrm{d}x = k\int_{x_1}^{x_2} \partial_{xx} u \,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f \,\mathrm{d}x.$$

Comme x_1 et x_2 sont quelconques, le lemme de du Bois-Reymond donne

$$\mu\partial_{tt} u = k\partial_{xx} u + f.$$

Finalement les conditions initiales et conditions au bord sont évidentes. □

5.2. Modèle d'un tambour ou d'un solide élastique

Le but est de modéliser l'évolution temporelle de la membrane d'un tambour ($n = 2$) ou d'un solide élastique ($n = 3$) dans une seule direction.

Hypothèses

- au repos la membrane ou le solide est un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
- la membrane ou le solide est fixé sur tout son bord de manière à ne pas pouvoir se déplacer.
- la membrane ou le solide est homogène.
- les déformations sont petites.
- le solide se déforme dans une seule direction.

Quantités

- $u(t, \boldsymbol{x})$ déplacement vertical [m]
- $u_0(\boldsymbol{x})$ déplacement vertical à l'instant initial [m]
- $v_0(\boldsymbol{x})$ vitesse verticale à l'instant initial [$\mathrm{m\,s^{-1}}$]
- $f(t, \boldsymbol{x})$ densité de force appliquée [$\mathrm{N\,m^{-n}}$]
- μ masse surfacique de la membrane ou volumique du solide [$\mathrm{kg\,m^{-n}}$]
- k coefficient de rigidité de la membrane ou du solide [$\mathrm{N\,m^{-n+1}}$]

Proposition 5.2.1. *Sous les hypothèses précédentes, la position de la membrane ou la déformation du solide est régie par l'équation d'onde suivante :*

$$\begin{cases} \mu\partial_{tt} u - k\Delta u = f & \textit{dans} \quad (0,\infty)\times\Omega, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \textit{sur} \quad \Omega, \\ \partial_t u(0,\cdot) = v_0 & \textit{sur} \quad \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur} \quad (0,\infty)\times\partial\Omega. \end{cases}$$

Preuve. Considérons un morceau de membrane ou de solide $V \subset \Omega$. La masse de ce morceau est

$$m := \int_V \mu \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mu |V|,$$

son accélération

$$a := \frac{1}{|V|} \int_V \partial_{tt} u \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

et la force externe agissant dessus

$$F_{\text{ext}} := \int_V f \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Par ailleurs la force de contact sur le bord de ∂V est en appliquant le théorème de la divergence

$$F_{\text{cont}} := \int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

où $\boldsymbol{F}$ est la force, ou plutôt flux de force $[\mathrm{N\,m^{-n+1}}]$, agissant sur V par l'intermédiaire de son bord. La seconde loi de Newton donne

$$\int_V \mu \partial_{tt} u \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_V f \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

L'hypothèse de petites déformation implique que $\boldsymbol{F}$ est une fonction linéaire du gradient du déplacement ∇u :

$$\boldsymbol{F} = k \nabla u,$$

ce qui donne avec le lemme de du Bois-Reymond

$$\mu \partial_{tt} u = k \Delta u + f.$$

Les conditions initiales et au bord sont à nouveau évidentes. □

5.3. Méthode des séries de Fourier sur $[0, L]$

L'idée est de considérer l'équation des ondes sur $[0, L]$ sans force externe

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - c^2 \partial_{xx} u = 0 & \text{dans} \quad (0, \infty) \times (0, L), \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur} \quad (0, L), \\ \partial_t u(0, \cdot) = v_0 & \text{sur} \quad (0, L), \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, L) = 0 & \text{sur} \quad (0, \infty). \end{cases}$$

où $c^2 = \frac{k}{\mu}$ et de la résoudre comme cela a été fait pour l'équation de la chaleur par séries de Fourier.

Cherchons d'abord des solutions sous forme de séparation de variables

$$u(t, x) = T(t) X(x).$$

En mettant dans l'équation et supposant que X et T ne s'annulent pas

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Cela étant vrai pour tout t et x, cela veut dire que les deux quotients sont constants, disons égaux à $-\lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. L'équation sur X étant la même que pour la chaleur, la solution étant zéro en 0 et L est

$$X(x) = C \sin(\sqrt{\lambda} x),$$

pour autant que

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L},$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$. La solution pour T est

$$T(t) = A\cos(c\sqrt{\lambda}t) + B\sin(c\sqrt{\lambda}t).$$

Par conséquent par superposition

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\Big(\frac{n\pi ct}{L}\Big) + b_n \sin\Big(\frac{n\pi ct}{L}\Big)\right) \sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big),$$

est une solution. Reste à déterminer les coefficients a_n et b_n pour satisfaire les conditions initiales. On a

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big),$$

et

$$(\partial_t u)(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big).$$

Ce sont les développements en série de Fourier de u_0 et v_0 dont les coefficients sont donnés par

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,\mathrm{d}x,$$
$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L v_0(x)\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Par conséquent en prenant a_n et b_n définit ainsi, $u(t,x)$ est solution du problème initial, où $u(0,x)$ et $(\partial_t u)(0,x)$ sont les prolongements périodiques impaires de respectivement $u_0(x)$ et $v_0(x)$.

5.4. Formule de représentation sur $\mathbb{R}$ *

L'équation des ondes sur $\mathbb{R}$ se résout de façon très explicite :

Théorème 5.4.1 (Formule de représentation de D'Alembert). *Si $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ et $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$ alors*

$$u(t,x) := \frac{1}{2}\left[u_0(x+t) + u_0(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(y)\,\mathrm{d}y,$$

est une solution $C^2([0,\infty)\times\mathbb{R})$ de l'équation des ondes sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0 & \text{dans} \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0,\cdot) = v_0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Preuve. Il est possible de vérifier explicitement que l'expression résout bien l'équation et la donnée initiale. Mais pour trouver la solution explicitement, observons que

$$\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)\,u.$$

En définissant

$$v := (\partial_t - \partial_x)\,u,$$

∗. Provient essentiellement de EVANS (§2.4.1.a).

l'équation d'onde devient une équation de transport à vitesse constante sur v :

$$\partial_t v + \partial_x v = 0,$$

dont la solution est

$$v(t,x) = a(x-t),$$

pour $a(x) := v(0,x)$. Ainsi u satisfait aussi une équation de transport avec terme source :

$$\partial_t u - \partial_x u = a(x-t),$$

donc la solution est donnée par le théorème 2.3.7 :

$$\begin{aligned} u(t,x) &= u_0(x+t) + \int_0^t a(x+(t-s)-s)\,\mathrm{d}s \\ &= u_0(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Par définition

$$a(x) = v(0,x) = (\partial_t u)(0,x) - (\partial_x u)(0,x) = v_0(x) - u_0'(x),$$

et en substituant cela dans l'égalité précédente, cela donne le résultat. □

Preuve alternative. Alternativement, effectuons le changement de variable $(t,x) \mapsto (x_1,x_2) := (x+t, x-t)$. En posant $\bar{u}(x_1,x_2) = u(t,x)$, alors $\partial_{tt}u = \partial_{11}\bar{u} - \partial_{12}\bar{u} - \partial_{21}\bar{u} + \partial_{22}\bar{u}$ et $\partial_{xx}u = \partial_{11}\bar{u} + \partial_{12}\bar{u} + \partial_{21}\bar{u} + \partial_{22}\bar{u}$ donc $\bar{u}$ résout l'équation $\partial_{12}\bar{u} = 0$ et ainsi $\bar{u}$ et u sont de la forme :

$$\bar{u}(x_1,x_2) = a(x_1) + b(x_2), \qquad u(t,x) = a(x+t) + b(x-t),$$

avec $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions à déterminer. En notant V_0 la primitive de v_0 s'annulant en zéro :

$$V_0(x) = \int_0^x v_0(s)\,\mathrm{d}s,$$

et en utilisant la condition initiale, les fonctions a et b doivent vérifier

$$a + b = u_0, \qquad a - b = V_0,$$

ce qui donne

$$a = \frac{u_0 + V_0}{2}, \qquad b = \frac{u_0 - V_0}{2}.$$

Ainsi la solution générale de l'équation des ondes linéaire est :

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+t) + u_0(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[V_0(x+t) - V_0(x-t)\right],$$

ce qui donne l'expression annoncée. □

Remarque 5.4.2. Notons que si $u_0 \in C^k$ et $v_0 \in C^{k-1}$, alors $u \in C^k$ mais en général u ne sera pas plus régulier que cela. Cela est très différent de ce qui se passe pour l'équation de la chaleur, où instantanément en temps, la solution devient lisse.

Remarque 5.4.3. La formule de représentation de la solution indique que la solution $u(t,x)$ ne dépend que de u_0 et v_0 sur l'intervalle $[x-t, x+t]$. C'est une propriété des EDP hyperboliques, la solution en $u(t_0,x_0)$ ne dépend que de ce qui se passe dans le cône

$$K(t_0,x_0) := \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le t \le t_0,\ |x-x_0| \le t_0 - t\right\}.$$

Idem la valeur $u(t_0,x_0)$ influence uniquement ce qui se passe dans le cône $|x-x_0| \le t - t_0$ avec $t \ge t_0$.

Remarque 5.4.4. Contrairement à l'équation de Laplace ou de la chaleur, il n'y a pas de principe du maximum pour l'équation des ondes. Par exemple pour $u_0 = 0$ et v_0 non-triviale, alors la solution est non-triviale, et on n'a pas $\inf_{\mathbb{R}} u_0 \leq u(t,x) \leq \sup_{\mathbb{R}} u_0$.

La technique de preuve précédente permet également de construire une représentation du problème inhomogène :

Théorème 5.4.5 (formule de représentation pour le problème inhomogène sur $\mathbb{R}$)**.** *Si $f \in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R})$ alors*

$$u(t,x) := \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_{K(t,x)} f(s,y)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y,$$

est une solution $C^2([0,\infty)\times\mathbb{R})$ de l'équation des ondes inhomogène sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = f & \text{dans} \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(0,\cdot) = \partial_t u(0,\cdot) = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Preuve. La technique de preuve est identique, l'équation est équivalente à

$$\partial_t u - \partial_x u = v, \qquad\qquad \partial_t v + \partial_x v = f,$$

dont les solutions sont

$$u(t,x) = \int_0^t v(s, x+(t-s))\,\mathrm{d}s, \qquad\qquad v(t,x) = \int_0^t f(s, x-(t-s))\,\mathrm{d}s.$$

Comme

$$v(s, x+(t-s)) = \int_0^s f(r, x+(t-s)-(s-r))\,\mathrm{d}r,$$

la substitution donne

$$u(t,x) = \int_0^t \int_0^s f(r, x+(t-s)-(s-r))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s.$$

Finalement le changement de variable $(s,r) \mapsto (r,y)$ où $y = x+(t-s)-(s-r)$ donne le résultat. En effet le domaine d'intégration

$$\{(s,r) \,:\, 0 \leq s \leq t,\ 0 \leq r \leq s\}$$

est envoyé sur

$$K(t,x) = \{(r,y) \,:\, 0 \leq r \leq t,\ x-(t-r) \leq y \leq x+(t-r)\}$$

et $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s$. □

Preuve alternative. Alternativement il est possible d'utiliser le principe de Duhamel comme pour l'équation de la chaleur. Pour $s > 0$ fixé, soit $u^s(t,x)$ la solution de

$$\begin{cases} \partial_{tt}u^s - \partial_{xx}u^s = 0 & \text{dans} \quad (s,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u^s(s,\cdot) = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}, \\ \partial_t u^s(s,\cdot) = f(s,\cdot) & \text{sur} \quad \mathbb{R}, \end{cases}$$

qui est donc donnée par

$$u^s(t,x) = \frac{1}{2}\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(s,y)\,\mathrm{d}y,$$

et donc la solution du problème inhomogène est

$$u(t,x) = \int_0^t u^s(t,x)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s.$$

□

Une méthode de réflexion analogue à celle utilisée pour obtenir la fonction de Green dans un demi-espace permet de construire une représentation de la solution sur $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$:

Proposition 5.4.6 (Formule de représentation dans $\mathbb{R}^+$)**.** *La solution de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^+$:*

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \partial_{xx} u = 0 & \text{dans} \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}^+, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^+, \\ (\partial_t u)(0,\cdot) = v_0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot,0) = 0 & \text{sur} \quad (0,\infty). \end{cases}$$

est donnée par

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[u_0(x+t) + u_0(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(y)\,\mathrm{d}y, & x \geq t \geq 0, \\ \frac{1}{2}\left[u_0(x+t) - u_0(t-x)\right] + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t} v_0(y)\,\mathrm{d}y, & 0 \leq x \leq t. \end{cases}$$

Si $v_0 = 0$, la solution s'interprète comme une onde allant vers la droite, et une onde allant vers la gauche, réfléchie en $x = 0$, où il se produit un nœud de vibration. Remarquons que la solution n'est pas C^2 sauf si $u_0''(0) = 0$.

Preuve. L'idée est de se ramener au cas $\mathbb{R}$ par symétrie. Pour cela introduisons l'opérateur de réflexion impaire :

$$(\mathcal{R}u)(t,x) := \begin{cases} u(t,x) & \text{si } x \geq 0, \\ -u(t,-x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ainsi en définissant $\tilde{u} = \mathcal{R}u$, $\tilde{u}_0 = \mathcal{R}u_0$, et $\tilde{v}_0 = \mathcal{R}v_0$, l'équation devient

$$\begin{cases} \partial_{tt}\tilde{u} - \partial_{xx}\tilde{u} = 0 & \text{dans} \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ \tilde{u}(0,\cdot) = \tilde{u}_0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}, \\ (\partial_t\tilde{u})(0,\cdot) = \tilde{v}_0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}, \end{cases}$$

dont la solution est

$$\tilde{u}(t,x) = \frac{1}{2}\left[\tilde{u}_0(x+t) + \tilde{u}_0(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{v}_0(y)\,\mathrm{d}y,$$

par le théorème 5.4.1. En remplaçant les définitions de $\tilde{u}_0$ et $\tilde{v}_0$, cela donne le résultat. □

5.5. Méthode des moyennes sphériques *

Le but est de trouver une représentation de la solution de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \Delta u = 0 & \text{dans} \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n, \\ (\partial_t u)(0,\cdot) = v_0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

La stratégie est d'étudier le comportement de moyennes sphériques de u. Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} U(t,\boldsymbol{x},r) &:= \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} u(t,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) = \fint_{\partial B(\mathbf{0},1)} u(t,\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{z}), \\ U_0(\boldsymbol{x},r) &:= \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} u_0(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) = \fint_{\partial B(\mathbf{0},1)} u_0(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{z}), \\ V_0(\boldsymbol{x},r) &:= \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} v_0(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) = \fint_{\partial B(\mathbf{0},1)} v_0(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{z}). \end{aligned}$$

Pour $\boldsymbol{x}$ fixé, observons que $U(t,\boldsymbol{x},r)$ est solution de l'équation d'Euler–Poisson–Darboux :

∗. Provient essentiellement de EVANS (§2.4.1.b-c).

Lemme 5.5.1. *Pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ fixé, si $u \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ est solution de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^n$ alors $U(\cdot,\boldsymbol{x},\cdot) \in C^2([0,\infty)\times\bar{\mathbb{R}}^+)$ est solution de*

$$\begin{cases} \partial_{tt}U - \partial_{rr}U - \dfrac{n-1}{r}\partial_r U = 0 & \text{dans} \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}^+, \\ U(0,\boldsymbol{x},\cdot) = U_0(\boldsymbol{x},\cdot) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^+, \\ (\partial_t U)(0,\boldsymbol{x},\cdot) = V_0(\boldsymbol{x},\cdot) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

À noter que c'est l'équation des ondes pour des solutions radiales, car $\Delta U = \partial_{rr}U + \frac{n-1}{r}\partial_r U$ pour des solutions radiales.

Preuve. Explicitement, comme $|\partial B(\mathbf{0},1)| = n\alpha(n)$, on a, en utilisant le théorème de la divergence

$$\partial_r U = \fint_{\partial B(\mathbf{0},1)} (\nabla u)(t,\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{z})\cdot\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{z}) = \frac{r}{n\alpha(n)}\int_{B(\mathbf{0},1)} (\Delta u)(t,\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(\boldsymbol{x},r)} (\Delta u)(t,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

Ainsi

$$r^{n-1}\partial_r U = \frac{1}{n\alpha(n)}\int_0^r \int_{\partial B(\boldsymbol{x},s)} (\Delta u)(t,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s,$$

et donc

$$\partial_r(r^{n-1}\partial_r U) = \frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} (\Delta u)(t,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) = \partial_{tt}U.$$

Il est possible de montrer que U est bien C^2 y compris dans la limite $r \to 0$. □

Maintenant, l'idée est d'obtenir une formule de représentation pour $U(t,\boldsymbol{x},r)$ et d'en déduire une pour le problème original par

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \lim_{r\to 0} U(t,\boldsymbol{x},r).$$

5.5.1. Cas $n = 3$

De manière peut-être un peu paradoxale, résoudre l'équation d'Euler–Poisson–Darboux est plus simple lorsque $n = 3$. En effet pour $\boldsymbol{x}$ fixé, en posant $\tilde{U}(t,\boldsymbol{x},r) := rU(t,\boldsymbol{x},r)$, alors

$$\partial_{tt}\tilde{U} - \partial_{rr}\tilde{U} = r\left(\partial_{tt}U - \partial_{rr}U - \frac{2}{r}\partial_r U\right),$$

et donc U est solution de l'équation d'Euler–Poisson–Darboux si et seulement si $\tilde{U}$ est solution de l'équation des ondes 1d :

$$\begin{cases} \partial_{tt}\tilde{U} - \partial_{rr}\tilde{U} = 0 & \text{dans} \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}^+, \\ \tilde{U}(0,\boldsymbol{x},\cdot) = \tilde{U}_0(\boldsymbol{x},\cdot) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^+, \\ (\partial_t\tilde{U})(0,\boldsymbol{x},\cdot) = \tilde{V}_0(\boldsymbol{x},\cdot) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

où $\tilde{U}_0(\boldsymbol{x},r) := rU_0(\boldsymbol{x},r)$ et $\tilde{V}_0(\boldsymbol{x},r) := rV_0(\boldsymbol{x},r)$. En appliquant la proposition 5.4.6, nous obtenons que pour $0 \le r \le t$

$$\tilde{U}(t,\boldsymbol{x},r) = \frac{1}{2}\left[\tilde{U}_0(\boldsymbol{x},r+t) - \tilde{U}_0(\boldsymbol{x},t-r)\right] + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{r+t} \tilde{V}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

Par définition de U et de $\tilde{U}$, et de $\tilde{U}_0$ et $\tilde{V}_0$, on obtient

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \lim_{r\to 0} U(t,\boldsymbol{x},r) = \lim_{r\to 0}\frac{\tilde{U}(t,\boldsymbol{x},r)}{r} = (\partial_r\tilde{U}_0)(\boldsymbol{x},t) + \tilde{V}_0(\boldsymbol{x},t) = U_0(\boldsymbol{x},t) + t(\partial_r U_0)(\boldsymbol{x},t) + tV_0(\boldsymbol{x},t),$$

et par définition de U_0 et V_0

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},t)} \left[u_0(\boldsymbol{y}) + tv_0(\boldsymbol{y}) + (\nabla u_0)(\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\right]\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}).$$

C'est une formule de représentation pour la solution de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^3$, appelée formule de Kirchhoff. À noter qu'il faut supposer $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ et $v_0 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ pour obtenir une solution $u \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^3)$. Remarquons que $u(t,\boldsymbol{x})$ ne dépend que des valeurs sur $\partial B(\boldsymbol{x},t)$, c'est le principe de Huygens : si un son est émis à l'instant initial en $\boldsymbol{x}$, alors on l'entend uniquement dans le cône creux $\bigcup_{t\geq 0}\partial B(\boldsymbol{x},t) = \{(t,\boldsymbol{y}) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \,:\, |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| = t\}$ pas ailleurs.

5.5.2. Cas $n = 2$ *

Contrairement au cas $n = 3$, il n'existe pas de transformation reliant l'équation d'Euler–Poisson–Darboux au transport 1d. L'idée est juste de regarder le problème pour $n = 3$ en supposant que la troisième variable x_3 n'est pas présente. Si $u \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^2)$ est une solution de l'équation des ondes, alors

$$\bar{u}(t,\bar{\boldsymbol{x}}) := u(t,\boldsymbol{x}),$$

où $\bar{\boldsymbol{x}} := (x_1,x_2,x_3)$ et $\boldsymbol{x} := (x_1,x_2)$ est une solution de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi par la formule de représentation de Kirchhoff,

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \bar{u}(t,\bar{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B(\bar{\boldsymbol{x}},t)} [u_0(\boldsymbol{y}) + tv_0(\boldsymbol{y}) + (\nabla u_0)(\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})]\,\mathrm{d}\sigma(\bar{\boldsymbol{y}}).$$

Il s'agit maintenant de simplifier cette expression et d'enlever la dépendance artificielle en x_3. L'intégrant étant indépendant de y_3, il est possible de réécrire l'intégrale sur la sphère $\partial B(\bar{\boldsymbol{x}},t) \subset \mathbb{R}^3$, comme une intégrale sur la boule $B(\boldsymbol{x},t)\subset\mathbb{R}^3$ en projetant les deux hémisphères :

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \big(\boldsymbol{y}, \pm\gamma(\boldsymbol{y})\big), \qquad \text{où} \qquad \gamma(\boldsymbol{y}) := \sqrt{t^2 - |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}.$$

L'élément de surface est

$$\mathrm{d}\sigma(\bar{\boldsymbol{y}}) = \sqrt{1+|\nabla\gamma|^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \frac{t}{\sqrt{t^2-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

car

$$|\nabla\gamma| = \frac{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}{\sqrt{t^2-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}}.$$

Par conséquent, comme il y a deux hémisphères,

$$\begin{aligned} u(t,\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2\pi t^2}\int_{B(\boldsymbol{x},t)} [u_0(\boldsymbol{y}) + tv_0(\boldsymbol{y}) + (\nabla u_0)(\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})]\,\frac{t}{\sqrt{t^2-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ &= \frac{1}{2}\fint_{B(\boldsymbol{x},t)} \frac{tu_0(\boldsymbol{y}) + t^2v_0(\boldsymbol{y}) + t(\nabla u_0)(\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}{\sqrt{t^2-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}. \end{aligned}$$

C'est la formule de représentation de Poisson pour l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^2$. À remarquer que contrairement au cas $n = 3$, $u(t,\boldsymbol{x})$ dépend des valeurs sur toute la boule $B(\boldsymbol{x},t)$, et pas seulement sur le bord. Ainsi si un son est émis à l'instant initial à la position $\boldsymbol{x}$, alors on l'entend dans le cône plein $\bigcup_{t\geq 0} B(\boldsymbol{x},t) = \{(t,\boldsymbol{y}) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \,:\, |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| \leq t\}$.

5.5.3. Cas $n \geq 4$

Dans ce cas, l'idée est de d'abord résoudre l'équation d'Euler–Poisson–Darboux pour les n impairs, puis de réduire la dimension de un pour obtenir les n pairs. Voir Evans (§2.4.1, d. et e.).

∗. Cette section ne suit plus trop Evans, mais plutôt Mironescu (Chapitre 4).

5.6. Méthode de la transformée de Fourier

Une façon générale de résoudre une équation des ondes dans $\mathbb{R}^n$ est d'utiliser la transformée de Fourier. L'idée est de considérer la transformée de Fourier selon la variable d'espace $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\hat{u}(t, \boldsymbol{\xi}) := \int_{\mathbb{R}^n} u(t, \boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

La transformée de Fourier inverse permet de retrouver u en fonction de $\hat{u}$:

$$u(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(t, \boldsymbol{\xi}) \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

En agissant formellement avec le gradient, cela donne

$$(\nabla u)(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} i\boldsymbol{\xi} \hat{u}(t, \boldsymbol{\xi}) \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi},$$

et donc avec le Laplacien

$$(\Delta u)(t, \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\xi}|^2 \hat{u}(t, \boldsymbol{\xi}) \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{x}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

Par conséquent

$$(\partial_{tt} u - \Delta u)(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left((\partial_{tt} \hat{u})(t, \boldsymbol{\xi}) + |\boldsymbol{\xi}|^2 \hat{u}(t, \boldsymbol{\xi}) \right) \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi},$$

et en prenant la transformée de Fourier inverse l'équation des ondes est formellement équivalente à

$$\partial_{tt} \hat{u} + |\boldsymbol{\xi}|^2 \hat{u} = 0.$$

La solution de cette équation différentielle est

$$\hat{u}(t, \boldsymbol{\xi}) = A(\boldsymbol{\xi}) \cos(|\boldsymbol{\xi}| t) + B(\boldsymbol{\xi}) \sin(|\boldsymbol{\xi}| t).$$

En $t = 0$, il faut que $\hat{u}(0, \boldsymbol{x})$ donne la transformée de Fourier de u_0 :

$$\hat{u}_0(\boldsymbol{\xi}) := \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

et que $(\partial_t \hat{u})(0, \boldsymbol{x})$ donne celle de v_0 :

$$\hat{v}_0(\boldsymbol{\xi}) := \int_{\mathbb{R}^n} v_0(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

donc

$$A(\boldsymbol{\xi}) = \hat{u}_0(\boldsymbol{\xi}), \qquad B(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\hat{v}_0(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi}|}.$$

Par conséquent

$$\hat{u}(t, \boldsymbol{x}) = \hat{u}_0(\boldsymbol{\xi}) \cos(|\boldsymbol{\xi}| t) + \frac{\hat{v}_0(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi}|} \sin(|\boldsymbol{\xi}| t),$$

et la solution est donnée par la transformée de Fourier inverse :

$$u(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\hat{u}_0(\boldsymbol{\xi}) \cos(|\boldsymbol{\xi}| t) + \frac{\hat{v}_0(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi}|} \sin(|\boldsymbol{\xi}| t) \right] \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

Des calculs explicites permettent de retrouver les formules de D'Alembert, de Kirchhoff ou de Poisson.

Cette méthode présentée ici de manière formelle permet de définir des solutions faibles, voir par exemple GALLAGHER (Chapitre 4).

5.7. Méthode d'énergie *

Les formules de représentation donnent l'existence de solutions de l'équation des ondes et diverses propriétés. La méthode d'énergie permet d'obtenir facilement l'unicité des solutions et le cône de dépendance. On rappelle la notation pour le cylindre parabolique $Q_T := (0,T]\times\Omega$ et son bord parabolique $\Gamma_T := \bar{Q}_T \setminus Q_T$. Dans ce contexte, le cylindre parabolique est plutôt appelé cylindre espace-temps.

Théorème 5.7.1 (unicité). *Il existe au plus une solution $u \in C^2(\bar{Q}_T)$ de*

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u = f & \text{dans} \quad (0,\infty)\times Q_T, \\ u = u_0 & \text{sur} \quad \Gamma_T, \\ \partial_t u = v_0 & \text{sur} \quad \{t=0\}\times\Omega. \end{cases}$$

Preuve. Si u_1 et u_2 sont deux solutions, alors $u := u_1 - u_2$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u = 0 & \text{dans} \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_T, \\ \partial_t u = 0 & \text{sur} \quad \{t=0\}\times\Omega. \end{cases}$$

Considérons l'énergie

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \big((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

En dérivant par rapport au temps, on a en intégrant par parties

$$E'(t) = \int_\Omega \big((\partial_t u)(\partial_{tt}u) + \nabla u\cdot\nabla\partial_t u\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega (\partial_t u)\big((\partial_{tt}u) - \Delta u\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0,$$

car $u = 0$ donc $\partial_t u = 0$ sur $[0,T]\times\partial\Omega$.

Par conséquent, pour tout $t\in[0,T]$, $E(t) = E(0) = 0$ ce qui implique que $\partial_t u = 0$ et $\nabla u = 0$ dans Q_T. Comme u est zéro sur le bord, en on déduit que $u = 0$ dans Q_T. □

De manière beaucoup plus simple qu'avec les formules de représentation, il est possible de déduire la dépendance de la solution avec une méthode d'énergie.

Théorème 5.7.2 (domaine de dépendance). *Si $u \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ est solution de l'équation des ondes $\partial_{tt}u - \Delta u = 0$ sur $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ et que $u = \partial_t u = 0$ sur $\{t=0\}\times B(\boldsymbol{x}_0,t_0)$, alors $u = 0$ dans le cône*

$$K(t_0,\boldsymbol{x}_0) := \big\{(t,\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^{n+1},\ 0\le t\le t_0,\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\le t_0 - t\big\}.$$

Preuve. Définissons l'énergie locale pour $t\in[0,t_0]$ par

$$e(t) := \frac{1}{2}\int_{B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} \big((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

En dérivant par rapport au temps, et en utilisant le théorème de la divergence

$$\begin{aligned} e'(t) &= \int_{B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} \big((\partial_t u)(\partial_{tt}u) + \nabla u\cdot\nabla\partial_t u\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\int_{\partial B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} \big((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2\big)\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} (\partial_t u)\big((\partial_{tt}u) - \Delta u\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} (\partial_t u)(\boldsymbol{n}\cdot\nabla u)\,\mathrm{d}\sigma - \frac{1}{2}\int_{\partial B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} \big((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2\big)\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\partial B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)} \big((\partial_t u)(\boldsymbol{n}\cdot\nabla u) - \frac{1}{2}(\partial_t u)^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2\big)\,\mathrm{d}\sigma. \end{aligned}$$

Or

$$|(\partial_t u)(\boldsymbol{n}\cdot\nabla u)| \le |\partial_t u||\nabla u| \le \frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2,$$

ce qui prouve que $e'(t)\le 0$. Par conséquent $e(t)\le e(0) = 0$ pour tout $t\in[0,t_0]$ ce qui prouve que $u = 0$ dans le cône $K(t_0,\boldsymbol{x}_0)$. □

∗. Provient essentiellement de EVANS (§2.4.3).

A. Appendice

Lemme A.0.1 (volume de la boule de chaleur)**.** *En notant*

$$E(0,1) := \left\{(s,\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, \Phi(-s,\boldsymbol{y}) \geq 1\right\},$$

où Φ *est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur définie à la définition 4.3.1, alors*

$$\iint_{E(0,1)} \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{s^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s = 4.$$

Preuve. Premièrement remarquons que

$$I := \iint_{E(0,1)} \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{s^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s = \iint_{D} \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{t^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}t,$$

où

$$D = \left\{(t,\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, t \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-|\boldsymbol{y}|^2/(4t)} \geq (4\pi t)^{n/2}\right\}.$$

Il est possible d'intégrer d'abord sur $\boldsymbol{y}$ puis ensuite sur t, mais cela fait appel à des intégrales spéciales. Pour s'en passer, l'idée est de faire le changement de variable

$$\boldsymbol{y} = \sqrt{t}\boldsymbol{z}, \qquad\qquad \mathrm{d}\boldsymbol{y} = t^{n/2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z},$$

ce qui transforme la condition $\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{y}|^2/(4t)} \geq (4\pi t)^{n/2}$ en $\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{z}|^2/4} \geq (4\pi t)^{n/2}$ donc $0 \leq t \leq a(\boldsymbol{z})$ où

$$a(\boldsymbol{z}) := \frac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{z}|^2/(2n)},$$

et par conséquent

$$I = \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{a(\boldsymbol{z})} |\boldsymbol{z}|^2 t^{n/2-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}.$$

L'intégrale interne est élémentaire

$$\int_0^{a(\boldsymbol{z})} t^{n/2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n}a(\boldsymbol{z})^{n/2},$$

si bien que

$$I = \frac{2}{n}\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{z}|^2\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{z}|^2/4}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}.$$

Reste donc à calculer le moment de la gaussienne dans $\mathbb{R}^n$. On a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{z}|^2\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{z}|^2/4}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} z_i^2\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{z}|^2/4}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} = n\int_{\mathbb{R}^n} z_1^2\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{z}|^2/4}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z},$$

et en développant

$$\int_{\mathbb{R}^n} z_1^2\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{z}|^2/4}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \int_{\mathbb{R}} z_1^2\mathrm{e}^{-z_1^2/4}\,\mathrm{d}z_1 \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z_2^2/4}\,\mathrm{d}z_2\right)^{n-1} = 4\sqrt{\pi}\left(2\sqrt{\pi}\right)^{n-1} = 2(4\pi)^{n/2},$$

ce qui donne

$$I = \frac{2}{n}\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}n2(4\pi)^{n/2} = 4.$$

□

Lemme A.0.2 (intégrations par parties sur la boule de chaleur)**.** *En notant*

$$J(s,\boldsymbol{y}) := \partial_s u \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{2s} + \boldsymbol{y}\cdot\nabla u \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{4s^2},$$

et

$$\psi(s,\boldsymbol{y}) := \log\Phi(-s,-\boldsymbol{y}) + n\log r = -\frac{n}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{4s} + n\log r,$$

alors

$$\iint_{E(0,r)} J(s,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s = -n\iint_{E(0,r)} (\partial_s u - \Delta u)(s,\boldsymbol{y})\psi(s,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s.$$

Preuve. Premièrement,

$$\partial_s\psi = \frac{-n}{2s} - \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{4s^2}, \qquad \nabla\psi = \frac{\boldsymbol{y}}{2s},$$

ce qui permet de réécrire J en termes de ψ :

$$J(s,\boldsymbol{y}) = (\partial_s u)\boldsymbol{y}\cdot\nabla\psi - \boldsymbol{y}\cdot\nabla u\left(\partial_s\psi + \frac{n}{2s}\right) = (\partial_s u)\boldsymbol{y}\cdot\nabla\psi - (\partial_s\psi)\boldsymbol{y}\cdot\nabla u - n\nabla\psi\cdot\nabla u.$$

Ensuite introduisons le champ de vecteur en espace-temps suivant :

$$\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{y}) := (-\psi\boldsymbol{y}\cdot\nabla u, \psi(\boldsymbol{y}\partial_s u - n\nabla u)).$$

Remarquons qu'il est nul sur $\partial E(0,r)$ car ψ y est nul et de plus sa divergence en espace-temps est

$$\begin{aligned}\nabla_{s,\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{F} &= -(\partial_s\psi)\boldsymbol{y}\cdot\nabla u - (\boldsymbol{y}\cdot\nabla\partial_s u)\psi + (\partial_s u)\boldsymbol{y}\cdot\nabla\psi + n(\partial_s u)\psi + (\boldsymbol{y}\cdot\nabla\partial_s u)\psi - n\nabla\psi\cdot\nabla u - n(\Delta u)\psi\\ &= J + n(\partial_s u - \Delta u)\psi.\end{aligned}$$

Le théorème de la divergence fournit le résultat

$$\iint_{E(0,r)} J(s,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s = \iint_{E(0,r)} (\nabla_{s,\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s - n\iint_{E(0,r)} (\partial_s u - \Delta u)\psi\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}s.$$

□

Bibliographie

BOYER, Franck (2019-2020). “Equations Différentielles Ordinaires, Equations aux Dérivées Partielles”. Polycopié de cours M1, Université de Toulouse. URL : https://www.math.univ-toulouse.fr/~fboyer/_media/enseignements/m1edoedp/poly_edo-edp_m1.pdf.

EVANS, Lawrence C. (2010). *Partial differential equations*. English. 2nd ed. T. 19. Grad. Stud. Math. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). URL : https://bookstore.ams.org/gsm-19-r.

FOURIER, Joseph (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. French. Firmin Didot. URL : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1045508v/.

GALLAGHER, Isabelle (2024-2025). “Analyse des Équations aux Dérivées Partielles”. Polycopié de cours M1, ENS Paris. URL : https://webusers.imj-prg.fr/~isabelle.gallagher/ENS-EDP2024-2025.php.

MIRONESCU, Petru (2025). “Introduction aux équations aux dérivées partielles”. Polycopié de cours M1, Université Claude Bernard Lyon 1. URL : https://math.univ-lyon1.fr/~mironescu/enseignement/EDP_MG1.html.

ROYER, Julien (2021-2022). “Elliptic PDEs and Evolution Problems”. Polycopié de cours M2, Université de Toulouse. URL : https://www.math.univ-toulouse.fr/~jroyer/TD/TD/2021-22-M2/M2-Ch2.pdf.