Topologie générale et calcul différentiel

Notes de cours, en travaux, datées du 17 novembre 2026
Par construction, ces notes comportent au plus 120 pages

Département de mathématiques et applications (DMA)
École normale supérieure – PSL
45 rue d'Ulm, 75005 Paris

2026 – 2027

$$f(x_n) \to f(x)$$
$$K \subset \cup_{i=1}^{n} O_i$$
$$\overline{\cap_n O_n} = X$$
$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$
$$\ell^p(I, \mathbb{K})$$
$$||u(x)|| \leq ||u||||x||$$
$$x - p_F(x) \perp F$$
$$(a+h)^n = a^n + \sum_{k=0}^{n-1} a^k h a^{n-1-k} + o(h)$$
$$x(t) = R(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)\mathrm{d}s$$

Table des matières

Table des matières **2**

I Topologie générale 6

1 Introduction aux espaces topologiques **8**
1.1 Espaces à produit scalaire, espaces normés, espaces métriques, espaces topologiques 8
1.2 Fermés, fermeture, intérieur, frontière 12
1.3 Voisinages, convergence de suites, continuité de fonctions, homéos 13
1.4 Bases de topologies, bases de voisinages, séparabilité 15
1.5 Axiomes de séparation et espaces normaux 17
1.6 Définir une topologie : trace, produit, initiale, finale, quotient 18
1.7 Notions de variété et de groupe de Lie 24

2 Compacité **26**
2.1 Propriété de Borel–Lebesgue ou quasi-compacité 26
2.2 Théorème de Tikhonov sur les espaces produits 28
2.3 Compacité dans les espaces métriques 29
2.4 Espaces localement compacts et espaces dénombrables à l'infini 30
2.5 Compactification d'Alexandrov 32
2.6 Théorème de Baire pour les espaces compacts 33

3 Complétude **35**
3.1 Suites de Cauchy et complétude 35
3.2 Espaces polonais, de Banach, de Hilbert 38
3.3 Complétion 40
3.4 Théorème de Baire pour les espaces complets 41

4 Connexité **44**
4.1 Connexité, connexité par arc, composantes connexes, espaces totalement discontinus 44
4.2 Connexité dans les espaces métriques et espaces bien enchaînés 46

5 Espaces de fonctions continues sur un métrique compact **48**
5.1 Théorème de Dini et théorème de Heine 48
5.2 Théorème d'Arzelà–Ascoli 49
5.3 Théorème de Stone–Weierstrass 50

6 Opérateurs linéaires bornés sur les espaces vectoriels normés **54**
6.1 Définitions et propriétés de base, dualité 54
6.2 Théorème de Banach–Steinhaus 57
6.3 Théorème de Hahn–Banach 58
6.4 Théorème de Banach–Schauder (application ouverte, graphe fermé) 60
6.5 Algèbres de Banach, rayon spectral, inverse 61
6.6 Intégrale de Riemann pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans un Banach 62

7 Espaces de Hilbert **64**
7.1 Projection sur un convexe fermé 64
7.2 Théorème de représentation de Riesz 65
7.3 Bases hilbertiennes et identité de Parseval 67

II Calcul différentiel **69**

8 Dérivation dans les espaces vectoriels normés **71**
8.1 Dérivée, dérivées partielles, gradient . . . 71
8.2 Inégalité des accroissements finis, jacobienne . . . 74
8.3 Dérivées successives, lemme de Schwarz, formule de Taylor, extrema . . . 76
8.4 Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites . . . 85

9 Équations différentielles ordinaires (EDO) **89**
9.1 Théorème de Cauchy–Lipschitz et théorème de Cauchy–Peano . . . 91
9.2 Solutions globales et lemme de Grönwall . . . 93
9.3 Équations différentielles linéaires, résolvante, formule de Duhamel . . . 98
9.4 Dépendance à la condition initiale, notion de flot . . . 100
9.5 Systèmes hamiltoniens de la mécanique classique . . . 103
9.6 Stabilité au sens de Lyapounov des points stationnaires . . . 104

III Compléments **108**

A Autour des variétés **109**

B Autour de l'équation de la chaleur **113**

C Autour de l'équation des ondes non-linéaire **115**

D Rétrospective des principaux concepts et résultats abordés en cours **121**

E Lexique bilingue **123**

F Chronologie **124**

Bibliographie **125**

Équipe pédagogique associée à ce cours :

- 2024–2025, 2025–2026, 2026–2027 : Julien Guillod (cours), Corentin Gentil (travaux dirigés)
- 2023–2024 : Djalil Chafaï (cours), Corentin Gentil (travaux dirigés)
- 2022–2023 : Djalil Chafaï (cours), Lucas Vacossin (travaux dirigés)
- 2020–2021, 2021–2022 : Dmitry Chelkak (cours), Lucas Vacossin (travaux dirigés)

▼ compléments

Des mentions marginales indiquent des passages de compléments, non abordés pendant le cours oral. Le cours oral comprend par ailleurs des commentaires improvisés qui ne figurent pas dans ces notes.

▲ compléments

Par construction, ces notes de cours n'excèdent pas 120 pages, se concentrent sur l'essentiel, et proposent des ouvertures bibliographiques, c'est un parti pris, discutable, qui vise à laisser de la place aux autres cours et sources d'intérêt. Sur le plan stylistique, elles comprennent peu de définitions, pas de propositions, essentiellement des lemmes, théorèmes, corollaires, exemples, remarques, et commentaires flottants. Il n'est pas toujours évident de décider du statut d'un énoncé, certains théorèmes par exemple servent de définition, tandis que certains lemmes sont plus importants que bien des théorèmes. Les remarques voire les exemples peuvent devenir des théorèmes, et réciproquement. Réjouissant bouillonnement vivant de l'imperfection.

Par ailleurs, peu ou pas assez de dessins, mais ils sont faits au tableau en cours !

Un conseil, au-delà de ce cours, autour de l'inspiration, de l'élévation d'âme, et de l'humanisation : ne passez pas tout votre temps avec vos contemporains, intéressez-vous aux meilleurs esprits de tous les temps, à leurs écrits, à ce qu'on a écrit sur eux, à leur richesse et complexité, mais ne les idéalisez pas non plus, intéressez-vous aussi à leur vie, leurs doutes, leurs erreurs, leur temps. Les mathématiques des cours fondamentaux sont relativement anciennes, issues d'un long processus de digestion collective, par des milliers de mathématiciennes et mathématiciens à travers le temps et l'espace. Ce sont des mathématiques mortes, qu'il est tentant d'opposer aux mathématiques vivantes développées par les mathématiciennes et mathématiciens contemporains. Les mathématiques mortes sont forcément mieux construites et plus solides, mais il est possible de les aborder autrement que de manière scolaire ou académique, elles peuvent exciter la curiosité et la créativité.

Organisation de l'année

Créneaux horaires

— 3h de CM et 2h de TD par semaine
— Les CM ont lieu le lundi 10:45–12:15 (Galois) et le mercredi 10:45–12:15 (Cartan)
— Deux créneaux de TD : le mardi 15:45–17:45 (Noether) OU le jeudi 15:45–17:45 (Cartan)
Ne venir qu'à un seul !

Ressources pédagogiques

Les notes de cours, feuilles de TD, DM, et annales se trouvent sur `https://moodle.psl.eu/`

Calendrier prévisionnel des cours

— **Semaine 1**
`Lu 21/09` : Espaces topologiques, métriques, normés, et à produit scalaire
`Me 23/09` : Fermés, fermeture, intérieur, frontière, voisinages, convergence, continuité, bases, séparabilité
— **Semaine 2**
`Lu 28/09` : Axiomes de séparation et espaces normaux, topologies trace et produit
`Me 30/09` : Topologies initiale, finale et quotient, notions de variété et de groupe de Lie
— **Semaine 3**
`Lu 05/10` : Compacité, Théorème de Tikhonov, propriété de Bolzano-Weierstrass
`Me 07/10` : Théorème de Tikhonov métrique, compacité locale, dénombrabilité à l'infini, compactification
— **Semaine 4**
`Lu 12/10` : Théorème de Baire pour la compacité, complétude
`Me 14/10` : Espaces polonais, de Banach, et de Hilbert, complétion et théorème de Baire pour la complétude
— **Semaine 5**
`Lu 19/10` : Connexité et connexité par arcs, Théorème de Dini
`Me 21/10` : Théorèmes de Heine, d'Arzelà–Ascoli et de Stone–Weierstrass
— **Vacances (semaine du 26 octobre)**
— **Semaine 6**
`Lu 02/11` : Applications continues sur un Banach, théorème de Banach–Steinhaus
`Me 04/11` : Théorèmes de Hahn–Banach et de Banach–Schauder (application ouverte, graphe fermé)
— **Semaine 7**
`Lu 09/11` : Algèbre de Banach, rayon spectral et inverse, projection sur un convexe dans un espace de Hilbert
`Me 11/11` : **Férié**
— **Partiels (semaine du 16 novembre, durée : 1h30)**
— **PSL week (semaine du 23 novembre)**
— **Semaine 8**
`Lu 30/11` : Théorème de représentation de Riesz et conséquences, bases hilbertiennes
`Me 02/12` : Dérivation dans les espaces vectoriels normés, vecteur gradient, dérivées partielles
— **Semaine 9**
`Lu 07/12` : Inégalité des accroissements finis, matrice Jacobienne, dérivées successives
`Me 09/12` : Lemme de Schwarz sur les dérivées partielles croisées, formules de Taylor
— **Semaine 10**
`Lu 14/12` : Extrema, conditions d'optimalité locale, équations d'Euler–Lagrange, théorème de point fixe de Picard–Banach
`Me 16/12` : Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites, équations différentielles ordinaires
— **Semaine 11**
`Lu 04/01` : Théorèmes de Cauchy–Lipschitz et de Cauchy–Peano
`Me 06/01` : Solutions globales et lemme de Grönwall
— **Vacances (semaines du 22 et 29 décembre)**
— **Semaine 12**
`Lu 11/01` : Équations différentielles linéaires, principe de Duhamel et définition du flot
`Me 13/01` : Dépendance à la condition initiale, systèmes hamiltoniens
— **Semaine 13**
`Lu 18/01` : Stabilité au sens Lyapounov des points stationnaires
`Me 20/01` : Ouvertures thématiques
— **Examen (semaine du 25 janvier, durée : 3h)**

Première partie

Topologie générale

La topologie étudie les propriétés des transformations continues et les invariances par ces transformations, elle apporte un point de vue plus souple et moins rigide que la géométrie. Elle est construite sur une notion très générale d'espace topologique, qui fournit une notion de voisinage des points, ce qui permet de définir en particulier la convergence des suites et la continuité des fonctions :

— Une suite (x_n) converge vers x dans un espace topologique lorsque pour tout voisinage V de x, il existe un entier n_V tel que pour tout $n \geq n_V$, $x_n \in V$.
— Une fonction $f : X \to Y$ entre espaces topologiques est continue en $x \in X$ lorsque pour tout voisinage V de $f(x)$ il existe un voisinage W de x tel que $f(W) \subset V$.

Les notions de *topologie générale* présentées dans ce cours ont été surtout développées pour les besoins de l'analyse, notamment de l'analyse fonctionnelle. La topologie générale se marie bien avec la théorie de la mesure et l'intégrale de Lebesgue au travers de la tribu borélienne, et intervient dans la notion de convergence en loi et celle de principe de grandes déviations en théorie des probabilités. La topologie générale fait naturellement partie du bagage généraliste des mathématiciennes et mathématiciens contemporains.

Les notions de topologie plus avancées forment par ailleurs une branche importante des mathématiques appelée *topologie*, reliée à d'autres branches des mathématiques comme la géométrie différentielle, la topologie algébrique, la géométrie algébrique, la combinatoire, et l'analyse complexe. La topologie joue un rôle important et fondamental dans les mathématiques contemporaines, et en particulier dans les travaux de nombreux médaillés Fields et deux médaillées Fields, aussi bien à travers l'algèbre, l'analyse, la géométrie, et les probabilités. Enfin la topologie se marie bien, et de multiples façons, avec les sciences des données et la statistique mathématique.

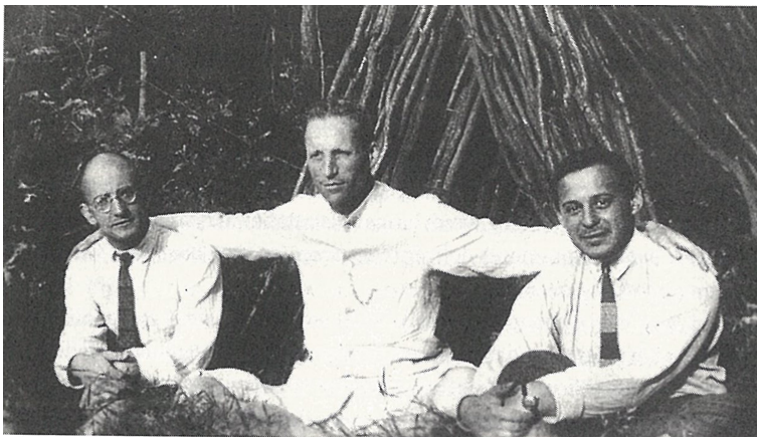


FIGURE 1 – Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966) vers 1924, entouré de Pavel Sergeyevich Alexandrov (1896 – 1982) à sa droite et de Pavel Samouïlovitch Urysohn (1898 – 1924) à sa gauche, trois grands mathématiciens et topologues. L. E. J. Brouwer, cf. [48], était tenant de l'*intuitionisme*, une approche constructiviste des mathématiques, qui revisite notamment le principe du tiers exclu.

Chapitre 1

Introduction aux espaces topologiques

Lu 21/09

Pour aller plus loin : [38], [16], [41], [36], [29], et en anglais [9, 8, 18]. Cours du DMA de topologie algébrique.

La notion d'espace topologique, précisée et étudiée plus loin, a été dégagée au début du vingtième siècle après une longue période de tâtonnements, par plusieurs générations de mathématiciennes et mathématiciens.

Nous présentons ci-dessous quatre notions fondamentales emboîtées :

$$\{\text{espaces à produit scalaire}\} \subsetneq \{\text{espaces normés}\} \subsetneq \{\text{espaces métriques}\} \subsetneq \{\text{espaces topologiques}\}$$

De gauche à droite, la richesse de structure diminue et la généralité augmente. Ces quatre notions abstraites sont toutes inspirées du concret visuel, bref de $\mathbb{R}^d$ avec $d \in \{1, 2, 3\}$. Ce type de généralisation fait la force des mathématiques : identifier des structures communes à des situations variées et disparates, pour raisonner universellement. En repérant ou en introduisant de telles structures dans un problème donné, on bénéficie de tout ce qui a déjà été démontré sur ces structures, sans avoir à réinventer la roue. De ce point de vue, les mathématiciennes et mathématiciens ont été structuralistes avant les philosophes et les sociologues !

Sur l'espace habituel $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ nous avons plusieurs notions :

— Un produit scalaire : $\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$.

— Des normes : $\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$.

— Des distances : $d_p(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p)^{1/p}$ (déformable par f croissante sous-additive).

1.1 Espaces à produit scalaire, espaces normés, espaces métriques, espaces topologiques

Définition 1.1.1. Espace à produit scalaire.

Un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \mapsto \mathbb{K}$ sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel X, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, vérifie :

— Symétrie ou hermitianité : pour tous $x, y \in X$, $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

— Linéarité : pour tous $x, y, z \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\langle \lambda x, y + z\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \lambda\langle x, z\rangle$.

— Positivité : pour tout $x \in X$, $\langle x, x\rangle \geq 0$, $= 0$ si et seulement si $x = 0$.

On dit alors que $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace à produit scalaire[a]. On note aussi $x \cdot y = \langle x, y\rangle$.

Quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on dit que $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ est sesquilinéaire : linéaire en x et anti-linéaire en y.

Quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on dit que $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ est bilinéaire : linéaire en x et linéaire en y.

a. Si la dimension est finie, on dit aussi plus précisément espace euclidien quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et espace hermitien quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et espace préhilbertien si la dimension est infinie. Un espace de Hilbert est de plus complet, ce qui n'est pas automatique en dimension infinie. La notion de complétude est étudiée plus loin.

Exemple 1.1.2. Des angles entre suites, fonctions, matrices.

— Pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ est un espace à produit scalaire : $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$.
De même, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{C}^n$ est un espace à produit scalaire : $\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$.

— Si I est un ensemble au plus dénombrable et $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, alors l'ensemble $\ell^2(I, \mathbb{K})$ des suites $(x_n)_{n\in I}$ dans $\mathbb{K}$, de carré sommable $\sum_{n\in I} |x_n|^2 < \infty$, est un espace vectoriel, qui admet le produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{n\in I} x_n\overline{y_n}$. C'est une généralisation du cas précédent à $d = \infty$.

— L'ensemble des fonctions continues bornées $[0, 1] \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, admet le produit scalaire donné par $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$. C'est l'analogue continu du cas précédent : $\sum$ devient $\int$. Cette analogie/généralisation est éclairée par le cours d'intégration et probabilités.

— L'ensemble des matrices réelles $n \times m$ admet le produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}(AB^\top)$.

Cela n'est rien d'autre que $\mathbb{R}^{mn}$ et sa structure euclidienne.

L'ensemble des matrices complexes $n \times m$ admet le produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}(A\overline{B}^{\top})$.
Cela n'est rien d'autre que $\mathbb{C}^{mn}$ et sa structure hermitienne.

— L'ensemble des matrices symétriques réelles $n \times n$ admet le produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}(AB)$, légèrement différent de celui de $\mathbb{R}^{n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}}$.
L'ensemble des matrices hermitiennes complexes $n\times n$ admet le produit scalaire donné par $\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}(A\overline{B})$, légèrement différent de celui de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}} = \mathbb{R}^{n+2\frac{n(n-1)}{2}=n^2}$.

Par analogie avec $\mathbb{R}^d$, les éléments d'un espace à produit scalaire $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sont des vecteurs. La longueur ou norme d'un vecteur $x \in X$ est donnée par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Par les axiomes de symétrie et de linéarité, on obtient la relation de Pythagore : pour tous $x, y \in X$,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathfrak{R}\langle x, y\rangle,$$

ce qui permet d'obtenir l'identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le discriminant de $P(t) = \|x + ty\|^2 = \|y\|^2t^2 + 2\langle x, y\rangle t + \|x\|^2$ vaut $\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$, et comme $P \geq 0$, on en déduit que $\Delta \leq 0$, ce qui donne l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

À noter que l'inégalité de Cauchy–Schwarz reste valide lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; il s'agit de rendre $\langle x, y\rangle$ réel en multipliant y par un nombre complexe de module un. De plus, par l'axiome de positivité, l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.
Quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $x, y \neq 0$, $\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} \in [-1, 1]$ joue du rôle du cosinus de l'angle entre les vecteurs x et y et on pose

$$\mathrm{angle}(x, y) := \arccos \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Lorsque $\langle x, y\rangle = 0$, on dit que x et y sont orthogonaux, et on note $x \perp y$.
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $y \neq 0$, l'équation $P'(t) = 0$ a pour unique solution $t_* = -\langle x, y\rangle/\|y\|^2$, ce qui indique que x a un unique projeté orthogonal sur $\mathbb{R}y$ donné par $\arg\min_{z\in\mathbb{R}y} \|x - z\| = -t_*y = \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}y = \langle x, \frac{y}{\|y\|}\rangle\frac{y}{\|y\|}$.

La notion d'espace vectoriel normé s'obtient en renonçant à la notion d'angle.

Définition 1.1.3. Espaces normés.

Une norme $\|\cdot\| : X \mapsto [0, \infty)$ sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel X, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, vérifie :
— Séparation : pour tous $x \in X$, $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
— Homogénéité : pour tous $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
— Sous-additivité : pour tous $x, y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
On dit alors que $(X, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Exemple 1.1.4. Espaces normés.

— Pour tout $d \geq 1$ et $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, et pour tout $p \in [1, \infty]$, le produit $\mathbb{K}^d$ est un espace vectoriel normé par $\|x\|_p := (|x_1|^p + \cdots + |x_d|^p)^{1/p}$, avec la convention $\|x\|_\infty := \max_{1\leq i\leq d} |x_i|$.
Par défaut on prend $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$. On dit que $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne.
— Si $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace à produit scalaire alors $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme qui en fait un espace vectoriel normé. La réciproque est fausse : les normes $\|\cdot\|_p$ ci-dessus ne dérivent pas d'un produit scalaire lorsque $p \neq 2$ (ne vérifient pas l'identité du parallélogramme).
— Pour tout $p \in [1, \infty)$, l'ensemble $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ telles que $\sum_n |x_n|^p < \infty$ est un espace vectoriel normé par $\|x\|_p := (\sum_n |x_n|^p)^{1/p}$. Pour $p = \infty$, l'es-

pace $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites bornées, normé par $\|x\|_\infty := \sup_n |x_n|$. On note parfois $\ell^p_n(\mathbb{K}) := \ell^p(\{1,\dots,n\},\mathbb{K})$, qui n'est rien d'autre que $\mathbb{K}^n$ muni de $\|\cdot\|_p$.
— Pour tout $p \in [1,\infty]$, l'ensemble des fonctions continues bornées $f : [0,1] \to \mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ est un espace vectoriel normé par $\|f\|_p := (\int_0^1 |f(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}$, avec convention $\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Généralisé par l'espace L^p de Lebesgue abordé dans le cours d'intégration et probabilités.
— Pour tout X, l'ensemble des $f : X \to \mathbb{K}$ bornées est un espace normé pour $\|f\|_\infty := \sup_{t\in X} |f(t)|$.
— L'ensemble $\mathcal{C}^k([0,1],\mathbb{K})$ est un espace normé pour $\|f\|_{\mathcal{C}^k} := \max_{0\le m\le k} \sup_{t\in[0,1]} |f^{(m)}(t)|$.

Dans un espace vectoriel normé, la quantité $\|x-y\|$ est la distance entre x et y.

La notion d'espace métrique s'obtient en renonçant à la structure d'espace vectoriel.

Définition 1.1.5. Espaces métriques.

Une distance ou métrique sur un ensemble X est une application $d : X \times X \mapsto [0,\infty)$ telle que :
— Séparation : pour tous $x,y \in X$, $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
— Symétrie : pour tous $x,y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$.
— Inégalité triangulaire[a] : pour tous $x,y,z \in X$, $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$.
On dit alors que (X,d) est un espace métrique.

a. Plus faible que l'inégalité ultratriangulaire $d(x,y) \le \max(d(x,z),d(z,y))$ qui donne les espaces ultramétriques.

Exemple 1.1.6. Espaces métriques.

— Si $(X,\|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé alors c'est un espace métrique pour $d(x,y) = \|x-y\|$. La réciproque est fausse : le cercle $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ est un espace métrique pour la distance d'arc mais n'est pas un espace vectoriel (et encore moins normé).
— L'ensemble des suites finies de 0 et de 1 est un espace métrique pour la distance définie comme le nombre de bits distincts (distance de Hamming) : $d(x,y) = \#\{n : x_n \neq y_n\} = \sum_n \mathbf{1}_{x_n\neq y_n}$. C'est aussi le nombre minimal de transformations élémentaires pour passer de x à y. Plus généralement, sur les espaces discrets ou continus, il est souvent possible de définir une distance comme longueur du plus court chemin entre deux points (géodésique).
— Pour un nombre premier p fixé, tout rationnel non nul $x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ s'écrit $x = p^n \frac{a}{b}$ où $n,a,b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, a et b premiers entre eux, et p ne divise ni a ni b. L'entier n est la valuation p-adique de x. La valeur absolue p-adique de $x \in \mathbb{Q}$ est définie par

$$|x|_p := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ p^{-n} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$

La formule $d_p(x,y) := |x-y|_p$ définit une métrique, et même une ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.
— La notion de semi-norme[a] s'obtient en renonçant au fait que $\|x\| = 0$ implique que $x = 0$. Elle joue un rôle important en analyse fonctionnelle, notamment à travers les espaces de Fréchet.

a. Vu en DM1.

Dans un espace métrique, on dispose de la notion de boule ouverte $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ de centre x et de rayon $r > 0$. Cette notion est inspirée de celle d'intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et permet de définir la convergence des suites et la continuité des fonctions. Décidons de dire qu'une partie de X est ouverte si elle est réunion quelconque de boules ouvertes. On peut vérifier alors que les boules ouvertes sont ouvertes ! D'autre part, on peut vérifier qu'une intersection finie de boules ouvertes est ouverte, mais il n'en va plus de même des intersections quelconques : $\cap_{n=1}^\infty (-1/n,1/n) = [0,0] = \{0\}$.

La stabilité par réunion quelconque fait tout reposer sur les boules de rayon arbitrairement petit.

La notion d'espace topologique s'obtient en renonçant à la notion de métrique.

Définition 1.1.7. Espace topologique – Axiomatisation de Kuratowski.

Une topologie $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ sur un ensemble X est une collection de parties de X telle que :
- $\emptyset \in \mathcal{O}$ et $X \in \mathcal{O}$
- Stabilité par réunion quelconque : si $O_i \in \mathcal{O}$ pour tout $i \in I$ alors $\cup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$.
- Stabilité par intersections finies : si $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ alors $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

Les éléments de $\mathcal{O}$ sont les ouverts, et $(X, \mathcal{O})$ est un espace topologique.

On a $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$, mais les parties de $\mathcal{P}(X)$ ne sont pas toutes des topologies. Dans la pratique, on omet souvent $\mathcal{O}$ par commodité, et on parle directement d'ouverts, tout comme on omet le Ω en probabilités et les coordonnées locales en géométrie : absorber du formalisme dans l'implicite simplifie.

Exemple 1.1.8. Topologies.

- La topologie euclidienne sur $\mathbb{R}$ est formée par l'ensemble des parties A de $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in A$, il existe un intervalle ouvert (a, b) tel que $x \in (a, b) \subset A$. C'est ce qui inspire le vocabulaire et les axiomes. Plus généralement, la topologie euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, est formée par l'ensemble des $A \subset \mathbb{R}^d$ tels que pour tout $x \in A$, il existe une boule ouverte $B(y, r) = \{z \in \mathbb{R}^d \ : \ \|y - z\| < r\}$ telle que $x \in B(y, r) \subset A$.
- Un espace métrique (X, d) possède une topologie naturelle formée par l'ensemble des parties A de X telles que pour tout $x \in A$, il existe une boule ouverte $B(y, r) = \{z \in X \ : \ d(y, z) < r\}$ telle que $x \in B(y, r) \subset A$. Notons que les boules ouvertes ont alors le bon goût d'être ouvertes car pour tout $y \in B(x, r)$ et $r' < r - d(x, y)$, $B(y, r') \subset B(x, r)$. On dit qu'une topologie est métrisable lorsqu'elle coïncide avec la topologie naturelle d'une métrique. Toute topologie métrisable est séparée[a] : si $x \neq y$ alors il existe des ouverts O_x et O_y tels que $x \in O_x$, $y \in O_y$, et $O_x \cap O_y = \emptyset$. En effet, il suffit de prendre $O_x = B(x, \frac{1}{2}d(x, y))$ et $O_y = B(y, \frac{1}{2}d(x, y))$ et d'utiliser les axiomes des métriques.
- La topologie cofinie sur un ensemble X infini est donnée par $\emptyset$ et l'ensemble des parties de X dont le complémentaire est fini. Cette topologie n'est pas métrisable car elle n'est pas séparée : deux ouverts non vides A et B ne peuvent pas être disjoints, puisque sinon $A^c \cup B^c = X$ serait fini.
- La topologie de Zariski sur $X = K^n$, où K est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et où $n \geq 1$, est formée par l'ensemble des $O \subset X$ telles qu'il existe une famille quelconque de polynômes à n variables $(P_i)_i \subset K[X_1, \dots, X_n]$ telle que $O^c = \cap_i \{x \in K^n \ : \ P_i(x_1, \dots, x_n) = 0\}$. L'axiome de stabilité par intersections finies se vérifie en utilisant des produits de polynômes, qui sont des polynômes. Cette topologie n'est pas métrisable car elle n'est pas séparée. Les zéros de polynômes sont les analogues des ensembles finis de la topologie cofinie !
- La topologie grossière sur X est formée par $\{\emptyset, X\}$.
  Il s'agit de la topologie la moins fine possible sur X (minimale). Elle n'est pas métrisable dès que X contient au moins deux points.
- La topologie discrète sur X est formée par l'ensemble des parties de X.
  Il s'agit de la topologie la plus fine possible sur X (maximale). Métrisable.
- Une intersection quelconque de topologies sur un ensemble X est encore une topologie. La topologie engendrée par une famille $\mathcal{C}$ de parties de X est l'intersection de toutes les topologies sur X contenant $\mathcal{C}$, c'est la plus petite (inclusion) topologie sur X contenant $\mathcal{C}$.

a. Ne pas confondre avec séparable, notion abordée plus loin, et qui n'a rien à voir.

Remarque 1.1.9. Audace récréative minimalisante.

Après s'être débarrassé du produit scalaire, de la norme, et de la distance, il est possible de se débarrasser des ouverts, en ne retenant que le treillis de leurs inclusions. On peut le faire !

Remarque 1.1.10. Pragmatisme historique.

Un grand nombre d'espaces topologiques utiles sont métriques ou métrisables. Mais bien des raisonnements topologiques ne nécessitent pas le caractère métrisable. Le formalisme des espaces topologiques est un compromis qui a survécu, pour l'instant, au sévère tri darwinien qu'opère l'histoire. À ce propos et à titre d'exemple, afin d'établir des existences, la logique propositionnelle fait intervenir des espaces compacts séparés non métrisables. La topologie générale, qui recherche la généralité, est forcément

riche en contre-exemples ([44] et `https://topology.pi-base.org/`). La généralité coûte en abstraction et contre-exemples peu intuitifs mais permet d'unifier les structures communes. Certaines tentatives ne tiennent qu'un temps avant d'être balayées par l'usage. La notion de filtre par exemple, mise en avant lors du siècle dernier, est peu utilisée aujourd'hui, car son rapport efficacité/lourdeur est finalement trop faible pour les humains. Elle redevient néanmoins utile pour les assistants de preuve comme Lean (`https://lean-lang.org/`), car elle permet d'abstraire certaines notions comme la convergence et ainsi d'éviter des redites. On pourrait penser la même chose de la notion de catégorie, mais il s'avère que le rapport efficacité/lourdeur n'est pas en sa faveur pour les assistants de preuve, pour l'instant !

1.2 Fermés, fermeture, intérieur, frontière

Me 23/09

Définition 1.2.1. Fermés, fermeture, intérieur, extérieur, frontière.

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, et $A \subset X$.

— A est fermé si et seulement si A^c est ouvert.

— La fermeture ou adhérence de A, noté $\overline{A}$, est le plus petit fermé le contenant :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F = \{x \in X : \forall O \in \mathcal{O}, x \in O \Rightarrow O \cap A \neq \emptyset\}^a.$$

— L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$, est le plus grand ouvert qu'il contient :

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{O \subset A \\ O \text{ ouvert}}} O = \{x \in X : \exists O \in \mathcal{O} : x \in O \subset A\}.$$

— La frontière de A est définie par $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap (\mathring{A})^c$ (c'est un fermé !).

— On dit que A est dense ou partout dense dans X si $\overline{A} = X$.

— On dit que A est nulle part dense si l'intérieur de $\overline{A}$ est vide.

a. La dernière formulation peut se voir via le complémentaire $\cup_{\substack{O \cap A = \emptyset \\ O \text{ ouvert}}} O = \{x \in X : \exists O \in \mathcal{O}, x \in O, O \cap A = \emptyset\}$.

Exemple 1.2.2. Fermés.

— Dans $\mathbb{R}$, les intervalles fermés sont fermés. Plus généralement, dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, les boules fermées $\overline{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|x-y\| \leq r\}$ sont fermées. Plus généralement encore, dans un espace métrique (X,d), les boules fermées $\overline{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ sont fermées. Attention : bien que $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r)$, l'égalité n'a pas toujours lieu en dehors de $\mathbb{R}^d$.

— Dans $\mathbb{R}$, les intervalles $[a,b)$ avec $a < b$ ne sont ni ouverts ni fermés. Idem pour $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

— $\emptyset$ et X sont à la fois ouverts et fermés, on dit parfois que ce sont des ofs.
Dans X muni de la topologie discrète, toute partie de X est un of.

Remarque 1.2.3. Propriétés des fermés.

— Une intersection quelconque de fermés est fermée.

— Une réunion finie de fermés est fermée.

— $\emptyset$ et X sont fermés.

Remarque 1.2.4.

— Une partie non ouverte n'est pas forcément fermée (et réciproquement).

— Une réunion quelconque de fermés n'est pas forcément fermée, par exemple sur $\mathbb{R}$ on a $\cup_{n=1}^{\infty}[1/n, 1] = (0,1]$, $\cup_{n=1}^{\infty}[1/n, +\infty) = (0, +\infty)$, et $\cup_{r \in \mathbb{Q}}[r,r] = \mathbb{Q}$.

Définition 1.2.5. Points intérieurs, adhérents, isolés, d'accumulation.

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, $A \subset X$, et $x \in X$. On dit que :
- x est intérieur à A lorsque $x \in \mathring{A}$.
- x est adhérent à A lorsque $x \in \overline{A}$, et un tel point est alors un point :
  - isolé lorsqu'il existe un voisinage ouvert O_x de x tel que $O_x \cap A = \{x\}$
  - d'accumulation lorsque pour tout voisinage ouvert O_x de x, $(O_x \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ ou de manière équivalente lorsque x est adhérent à $A \setminus \{x\}$.

La partie $A = \{1/n : n \geq 1\} \cup [2, 3)$ de $X = \mathbb{R}$ a pour adhérence $\{0\} \cup \{1/n : n \geq 1\} \cup [2, 3]$, pour points isolés $\{1/n : n \geq 1\}$ (ni ouvert ni fermé), et pour points d'accumulation $\{0\} \cup [2, 3]$.

L'ensemble des points d'accumulation n'est pas forcément fermé, comme le montre l'exemple de la topologie grossière $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ sur l'espace à deux points $X = \{a, b\}$, pour laquelle la partie $A = \{a\}$ admet a comme point isolé et b comme point d'accumulation, et $\{b\}$ n'est pas fermé (ni ouvert).

L'ensemble des points d'accumulation est toujours fermé lorsque la topologie est telle que tous les singletons sont fermés (ce qui n'est pas le cas de la topologie grossière). En effet, dans ce cas, soit A' l'ensemble des points d'accumulation de A, et $x \in \overline{A'} \setminus A'$. Comme $x \notin A'$, il existe un ouvert U tel que $x \in U$ et $U \cap A \subset \{x\}$. Or U doit contenir un $y \in A'$ car $x \in \overline{A'}$, et par hypothèse, $x \neq y$. D'autre part, comme le singleton $\{x\}$ est fermé par hypothèse, il existe un ouvert V tel que $y \in V$ et $x \notin V$. Maintenant l'ouvert $U \cap V$ contient $y \in A'$, donc il existe $z \in U \cap V \cap A$ tel que $z \neq y$. Vu que $x \notin V$, $x \neq z$, mais alors $z \in A \cap U$, ce qui contredit $U \cap A \subset \{x\}$.

1.3 Voisinages, convergence de suites, continuité de fonctions, homéomorphismes

Définition 1.3.1. Voisinages.

Dans un espace topologique $(X, \mathcal{O})$, un voisinage d'un point $x \in X$ est une partie $V \subset X$ qui contient un ouvert $O \in \mathcal{O}$ qui contient x, c'est-à-dire $x \in O \subset V$.

Notons qu'une partie de X est ouverte si et seulement si elle est voisinage de tous ses points.

Définition 1.3.2. Convergence des suites.

Une suite (x_n) d'éléments de X converge vers $x \in X$, pour une topologie $\mathcal{O}$ sur X, lorsque pour tout voisinage V de x, il existe un entier n_V tel que pour tout $n \geq n_V$, $x_n \in V$. On note $x_n \to x$.

Remarque 1.3.3. Approche séquentielle des fermés.

Si $x_n \in A$ et $x_n \to x$ alors $x \in \overline{A}$.
En effet, si V est un voisinage de x alors $x_n \in V$ pour n assez grand d'où $A \cap V \neq \emptyset$.
En particulier, si $x_n \in F$ fermé, et si $x_n \to x$, alors $x \in F$.
Dans les espaces métrisables (et plus généralement dans un espace à base dénombrable de voisinages, cf. plus loin), cette stabilité séquentielle caractérise les fermés. En effet, si $x \in \overline{A}$ et si V est un voisinage de x alors $V \cap A \neq \emptyset$ par définition de l'adhérence. Ensuite, en prenant $V = B(x, 1/n)$, il existe $x_n \in V \cap A$ et donc $x_n \in A \to x$. Par hypothèse $x \in A$, donc $\overline{A} = A$.

Exemple 1.3.4. Multiplicité de limites d'une suite dans un espace topologique.

Soit X infini muni de la topologie cofinie. Si $x_n \to x$ et si $I \subset X$ est fini et $x \notin I$, alors I^c est un ouvert voisinage de x et donc $x_n \in I^c$ pour n assez grand. En particulier (x_n) ne visite qu'un nombre fini de fois chaque élément de I. Comme I est arbitraire, il en découle que pour tout $y \in X$ avec $y \neq x$, la suite (x_n) ne visite qu'un nombre fini de fois y. Réciproquement, si une suite (x_n) visite chaque point de X au plus un nombre fini de fois, alors elle converge vers tout point de X.

Théorème 1.3.5. Convergence dans les espaces métriques.

Dans un espace métrique (X, d), $x_n \to x$ si et seulement si $d(x_n, x) \to 0$.

Preuve. $\Rightarrow$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $B(x,\varepsilon)$ est un voisinage de x, il existe un entier n_ε tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$, $x_n \in B(x,\varepsilon)$, d'où $d(x_n,x) < \varepsilon$. Donc $d(x_n,x) \to 0$. $\Leftarrow$. Soit un voisinage V de x. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset V$. Comme $d(x_n,x) \to 0$, il existe un entier n_ε tel que, pour tout $n \geq n_\varepsilon$, $x_n \in B(x,\varepsilon) \subset V$. Donc $x_n \to x$. □

Définition 1.3.6. Continuité et continuité séquentielle des fonctions.

Soient X et Y deux espaces topologiques. On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est :
- continue en $x \in X$ lorsque
  pour tout voisinage V de $f(x)$ il existe un voisinage W de x tel que $f(W) \subset V$.
- séquentiellement continue en $x \in X$ lorsque
  pour toute suite (x_n) d'éléments de X, si $x_n \to x$ alors $f(x_n) \to f(x)$.
- continue (respectivement séquentiellement continue) lorsqu'elle est continue (respectivement séquentiellement continue) en tout point de X.

Théorème 1.3.7. Continuité implique continuité séquentielle.

Si $f : X \to Y$ est continue en $x \in X$ alors f est séquentiellement continue en x.

Preuve. Soit $x_n \to x$ et soit V un voisinage de $f(x)$. Il existe un voisinage W de x tel que $f(W) \subset V$, et un entier n_W tel que pour tout $n \geq n_W$, $x_n \in W$, d'où $f(x_n) \in V$. Donc $f(x_n) \to f(x)$. □

Dans un espace métrique (X,d), pour tout $x \in X$, l'application $d(x,\cdot) : y \in X \mapsto d(x,y)$ est continue. En effet, par l'inégalité triangulaire, $|d(x,y) - d(x,y')| \leq d(y,y')$. Au passage, cela montre que $d(x,\cdot)$ est Lipschitz, et on voit poindre, au-delà du continu, le calcul différentiel ici !

Notons au passage que la notion de continuité ne dépend que de la topologie induite par la métrique.

Théorème 1.3.8. Caractérisation de la continuité avec les ouverts ou les fermés.

Soient $(X,\mathcal{O}_X)$ et $(Y,\mathcal{O}_Y)$ des espaces topologiques et $f : X \to Y$. Propriétés équivalentes :
- f est continue.
- les images réciproques par f des ouverts de Y sont des ouverts de X :
  pour tout $O \in \mathcal{O}_Y$ on a $f^{-1}(O) = \{x \in X : f(x) \in O\} \in \mathcal{O}_X$.
- les images réciproques par f des fermés de Y sont des fermés de X :
  pour tout $F = O^c$, $O \in \mathcal{O}_Y$, on a $(f^{-1}(F))^c = \{x \in X : f(x) \notin F\} \in \mathcal{O}_X$.

Preuve. L'équivalence des deux dernières propriétés découle de $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$. Démontrons l'équivalence des deux premières. $\Rightarrow$. Soit $O \in \mathcal{O}_Y$ et $x \in f^{-1}(O)$. Comme $f(x) \in O$ et que f est continue en x, il existe un voisinage V de x tel que $f(V) \subset O$, d'où $V \subset f^{-1}(O)$, et donc $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$. $\Leftarrow$. Soit $x \in X$ et V un voisinage de $f(x)$. Soit $O \in \mathcal{O}_Y$ tel que $f(x) \in O \subset V$, en particulier $W = f^{-1}(O)$ vérifie $f(W) \subset V$. Or comme W est ouvert et contient x, c'est un voisinage de x. Donc f est continue en x. □

Théorème 1.3.9. Équivalence entre continuité et continuité séquentielle.

Soit X un espace topologique vérifiant la propriété de Fréchet–Urysohn : pour tout $A \subset X$ et tout $x \in \overline{A}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle que $x_n \to x$. Alors pour tout espace topologique Y et tout $f : X \to Y$, la continuité est équivalente à la continuité séquentielle.

Preuve. Nous savons déjà que la continuité entraîne toujours la continuité séquentielle. Il reste donc à démontrer la réciproque lorsque l'espace de départ vérifie la propriété de Fréchet–Urysohn. Commençons par démontrer la contraposée quand X est métrisable. Supposons qu'il existe un voisinage V de $f(x)$ tel que pour tout voisinage W de x, $f(W) \not\subset V$. En particulier pour tout n il existe $x_n \in W = B(x,1/n)$ vérifiant $f(x_n) \notin V$. On a alors $d(x_n,x) \to 0$ donc $x_n \to x$, mais $f(x_n) \not\to f(x)$, et f n'est pas séquentiellement continue. Donnons à présent une preuve générale si X est Fréchet–Urysohn. Soit F un fermé de Y et $x \in \overline{f^{-1}(F)}$. La propriété de Fréchet–Urysohn donne une suite (x_n) d'éléments de $f^{-1}(F)$ telle que $x_n \to x$. Comme f est séquentiellement continue, $f(x_n) \to f(x)$, et comme $f(x_n) \in F$ et F est fermé, il vient que $f(x) \in F$. Donc $x \in f^{-1}(F)$ et donc $f^{-1}(F)$ est fermé, et f est continue. □

Définition 1.3.10. Homéomorphie : l'isomorphie de la topologie.

Une bijection $h : X \to Y$ est un homéomorphisme lorsqu'elle est continue et à inverse continu.

En particulier, l'ouverture et la fermeture sont stables par image directe et réciproque. Ceci définit une relation d'équivalence et donc une structure quotient sur l'ensemble des espaces topologiques.

Le cercle et le bord du carré, munis de la topologie métrique intrinsèque naturelle, sont homéomorphes.

La boule unité $\{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$ de $\mathbb{R}^d$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^d$ avec la bijection $x \mapsto \frac{x}{1-\|x\|}$, qui envoie la sphère de rayon $r \in [0,1)$ sur la sphère de rayon $r/(1-r) \in [0,+\infty)$.

On peut montrer que $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ si $n \neq m$. Lorsque $n = 1$, cela découle du fait que $\mathbb{R}^d$ privé d'un point est connexe (notion topologique abordée plus loin) si $d > 1$ et non connexe si $d = 1$. Un point reste un point sous l'action d'un homéomorphisme, stabilité que ne partagent pas les sous-espaces plus généraux. Il est possible d'utiliser la déformation d'une sphère. En fait la démonstration lorsque $n > 1$ et $m > 1$ est plus difficile et fait appel à la notion d'homologie de la topologie algébrique.

Un espace topologique est métrisable si et seulement si il est homéomorphe à un espace métrique. Attention : certaines propriétés ne dépendent que de la topologie engendrée par la métrique, tandis que d'autres sont spécifiques à une métrique donnée, et ne sont donc pas topologiques de ce point de vue.

1.4 Bases de topologies, bases de voisinages, séparabilité

Définition 1.4.1. Base de topologie.

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ une famille d'ouverts.
On dit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{O}$ quand pour tout $O \in \mathcal{O}$, il existe $(B_i)_{i\in I} \subset \mathcal{B}$ tel que $O = \cup_{i\in I} B_i$.
De manière équivalente : pour tout $O \in \mathcal{O}$ et tout $x \in O$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset O$.

Exemple 1.4.2. Boules dans les espaces métriques.

Dans un espace métrique (ou métrisable), les boules $(B(x,r))_{x\in X, r>0}$ forment une base.
Idem pour la sous-famille localement dénombrable $(B(x,1/n))_{x\in X, n\geq 1}$.
La topologie elle-même constitue toujours une base, qu'on peut qualifier de triviale ou maximale.
Par analogie avec les espaces vectoriels, on devrait parler de famille génératrice au lieu de base.

Théorème 1.4.3. Caractérisation des bases.

- Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ une base. Alors :
  - $X = \cup_{B\in\mathcal{B}} B$.
  - Pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et $x \in B_1 \cap B_2$, il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.
- Réciproquement, si une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ vérifie les deux propriétés ci-dessus alors la famille $\mathcal{O} = \{\cup_{B\in\mathcal{A}} B\}_{\mathcal{A}\subset\mathcal{B}}$ est une topologie sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base, appelée topologie engendrée par $\mathcal{B}$. C'est la plus petite topologie (pour l'inclusion) qui contient $\mathcal{B}$.

Preuve.

- Immédiat car $X \in \mathcal{O}$ et $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{O}$.
- Il est immédiat que $\varnothing \in \mathcal{O}$ et $X \in \mathcal{O}$. Idem pour la stabilité par réunion quelconque. Pour la stabilité par intersection finie, si $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ avec $O_1 = \cup_{B\in\mathcal{A}_1} B$ et $O_2 = \cup_{B\in\mathcal{A}_2} B$ alors

$$O_1 \cap O_2 = (\cup_{B\in\mathcal{A}_1} B) \cap (\cup_{B\in\mathcal{A}_2} B) = \cup_{B_1\in\mathcal{A}_1, B_2\in\mathcal{A}_2} (B_1 \cap B_2)$$

  Donc pour tout $x \in O_1 \cap O_2$, il existe $B_1 \in \mathcal{A}_1$ et $B_2 \in \mathcal{A}_2$ tel que $x \in B_1 \cap B_2$. Ensuite il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset B_1 \cap B_2 \subset O_1 \cap O_2$. Par conséquent $O_1 \cap O_2 = \cup_{x\in O_1\cap O_2} B_x$. Donc $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$. Donc $\mathcal{O}$ est une topologie. Sa minimalité pour l'inclusion est immédiate.

□

Définition 1.4.4. Base locale ou base de voisinages.

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $x \in X$. On dit qu'un ensemble de voisinages $\mathcal{B}_x$ de x est une base locale ou base de voisinages au point x lorsque :
- $x \in B$ pour tout $B \in \mathcal{B}_x$.
- Pour tout $O \in \mathcal{O}$ tel que $x \in O$, il existe $B \in \mathcal{B}_x$ tel que $x \in B \subset O$.

Définition 1.4.5. Base dénombrable et base dénombrable de voisinages.

On dit qu'un espace topologique est :
- à base dénombrable de voisinages si tout point possède une base dénombrable de voisinages.
- à base dénombrable lorsqu'il possède une base dénombrable (c'est plus fort !).

Exemple 1.4.6. Espaces métriques.

Tout espace topologique métrisable est à base dénombrable de voisinages : $\mathcal{B}_x = \{B(x, 1/n)\}_{n\geq 1}$.
En revanche un espace métrique n'est pas, en général, un espace topologique à base dénombrable.

Théorème 1.4.7. Caractérisation des espaces à base dénombrable.

Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ à base dénombrable est toujours séparable[a] [b] : il existe une partie dénombrable $A \subset X$ telle que $\overline{A} = X$. De plus, la réciproque est vraie pour tout espace métrisable[c].

a. À ne pas confondre avec la notion d'espace séparé (axiome T_2 de Hausdorff), qui n'a rien à voir.
b. C'est-à-dire que X contient une partie A dénombrable dense.
c. Sans l'hypothèse métrisable, la réciproque est fausse, prendre par exemple $\mathbb{R}$ muni de la topologie cofinie.

Preuve. $\Rightarrow$. Soit $\mathcal{B} = (B_n)$ une base dénombrable de $\mathcal{O}$. On peut supposer ces B_n non vides. Pour tout n, il existe $x_n \in B_n$. Posons $A = \cup_n \{x_n\}$. Soit $x \in X$ et $O \in \mathcal{O}$ avec $x \in O$. Il existe $B_n \in \mathcal{B}$ avec $x \in B_n \subset O$. Ainsi $x \in O \cap A$, i.e. $O \cap A \neq \emptyset$ et donc $x \in \overline{A}$.

$\Leftarrow$. Soit (x_n) une suite dans X telle que $\overline{\cup_n \{x_n\}} = X$. Posons $\mathcal{B} = \{B(x_n, 2^{-m})\}_{m,n}$. À présent, pour tout $O \in \mathcal{O}$ et tout $x \in O$, il existe m tel que $B(x, 2^{-m}) \subset O$, et un n tel que $d(x_n, x) < 2^{-(m+1)}$. Donc par l'inégalité triangulaire, $x \in B(x_n, 2^{-(m+1)}) \subset B(x, 2^{-m}) \subset O$. Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{O}$. □

Lu 28/09

Théorème 1.4.8. Espaces à base dénombrable de voisinage.

Tout espace topologique à base dénombrable de voisinages, et en particulier tout espace métrisable, est un espace de Fréchet–Urysohn. En particulier, dans un tel espace :
- l'adhérence est séquentielle[a] : $\overline{A} = \{x : \exists x_n \in A \to x\}$.
- les notions de continuité et de continuité séquentielle de fonctions coïncident.

a. La notion de convergence de suite définit la topologie via les fermés comme adhérences.

Preuve. Soit $A \subset X$ et $x \in \overline{A}$. Soit (B_n) une base dénombrable de voisinages ouverts de x. L'ouvert $U_n = \cap_{k=1}^{n} B_k$ décroît quand n croît. Comme $x \in \overline{A}$, pour tout n, il existe $x_n \in U_n \cap A$. Enfin $x_n \to x$ car pour tout voisinage ouvert O de x, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in U_n \subset U_N \subset O$. □

Exemple 1.4.9. Continuité séquentielle $\not\Rightarrow$ continuité : contre-exemple.

Considérons $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie codénombrable dont les fermés sont $\mathbb{R}$ et les parties (au plus) dénombrables de $\mathbb{R}$. Alors pour toute suite (x_n) d'élément de X, $x_n \to x$ si et seulement si (x_n) est stationnaire : $x_n = x$ à partir d'un certain rang sur n. Donc toute fonction $f : X \to X$ est séquentiellement continue. En revanche l'application $f(x) = \text{sign}(x)$ par exemple n'est pas continue. Un tel espace X n'est pas de Fréchet–Urysohn, et en particulier n'est pas métrisable.

▼ compléments

Exemple 1.4.10. Espaces topologiques séquentiels.

Pour un espace topologique X, les trois propriétés suivantes sont équivalentes, cf. [18, 6] :

1. X est séquentiel : pour tout $A \subset X$, si $A = \{x : \exists x_n \in A \to x\}$ alors A est fermé.
2. Pour tout Y et tout $f : X \to Y$, f est continue ssi elle est séquentiellement continue.
3. X est le quotient d'un espace métrique (la topologie quotient est étudiée plus loin).

{Métrisable} $\subsetneq$ {À base dénombrable de voisinages} $\subsetneq$ {Fréchet–Urysohn} $\subsetneq$ {Séquentiel}.

L'adhérence séquentielle $\{x : \exists x_n \in A \to x\}$ étant toujours inclue dans l'adhérence topologique $\overline{A}$, tant que l'inclusion est stricte, il faut parfois itérer cela une infinitié de fois, ce qui intuitivement distingue les espaces de Fréchet–Urysohn des espaces séquentiels.
Voir [18, Ex. 1.6.20] pour un espace non séquentiel, [18, Ex. 1.6.19] pour espace séquentiel qui n'est pas de Fréchet–Urysohn, et [18, Ex. 1.6.18] pour un espace de Fréchet–Urysohn qui n'est pas à base dénombrable de voisinages. La droite de Sorgenfrey[a] ([18, 44]) est un espace à base dénombrable de voisinage mais non métrisable.

a. Voir les TD.

▲ compléments

1.5 Axiomes de séparation et espaces normaux

Les axiomes de séparation permettent de distinguer ou séparer les points dans les espaces topologiques, ce que n'est pas toujours possible en général. En voici quelques uns, pour un espace topologique $(X, \mathcal{O})$, de plus en plus forts $(T_i) \Leftarrow (T_{i+1})$, et il existe des contre-exemples pour les réciproques[1].

- (T_0) Axiome de séparation de Kolmogorov : pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$, l'un au moins des deux points admet un voisinage qui ne contient pas l'autre point : il existe $O \in \mathcal{O}$ tel que $(x, y) \in O \times O^c$ ou $(x, y) \in O^c \times O$. Contre-exemple : avec la topologie $\mathcal{O} = \{\varnothing, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ sur $X = \{1, 2, 3\}$, les points 2 et 3 ne sont pas distinguables, et l'axiome (T_0) n'est pas vérifié.
- (T_1) Axiome de séparation de Fréchet : pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe $O \in \mathcal{O}$ tel que $(x, y) \in O^c \times O$. Cela revient à dire que pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ est fermé : pour tout x et tout $y \neq x$, il existe un ouvert O voisinage de y et ne contenant pas x. Les topologies cofinie et de Zariski vérifient cet axiome, mais ne vérifient pas le suivant (comme déjà mentionné).
- $(\mathbf{T_2})$ Axiome de séparation des espaces séparés de Hausdorff : pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe $O_x, O_y \in \mathcal{O}$ tels que $(x, y) \in O_x \times O_y$ et $O_x \cap O_y = \varnothing$. Cet axiome garantit l'unicité de la limite des suites convergentes. Il est à la fois important et naturel. On retrouve (T_1) car $x \in O_x \subset O_y^c$.
- (T_3) Axiome de séparation des espaces réguliers de Hausdorff : (T_1) est vérifié et on peut séparer tout point et tout fermé ne le contenant pas par deux ouverts disjoints. Cela revient à dire que tout point admet une base de voisinages fermés.
- (T_4) Axiome de séparation des espaces normaux de Hausdorff : (T_1) est vérifié et pour tous fermés non vides F_0 et F_1 avec $F_0 \cap F_1 = \varnothing$, il existe des ouverts O_0 et O_1 tels que $F_0 \subset O_0$, $F_1 \subset O_1$, et $O_0 \cap O_1 = \varnothing$, ce qui est une sorte que (T_2) pour les fermés plutôt que pour les points. Le lemme de Urysohn[2] affirme que cela est équivalent à l'existence de $f : X \to [0, 1]$ continue telle que $f(F_i) = i$.
- (T_5) Axiome de séparation des espaces complètement normaux de Hausdorff : (T_1) est vérifié et tous $A, B \subset X$ vérifiant $A \cap \overline{B} = \varnothing$ et $\overline{A} \cap B = \varnothing$ sont séparés par deux ouverts disjoints.
- $(\mathbf{T_6})$ Axiome de séparation des espaces parfaitement normaux de Hausdorff : (T_1) est vérifié et pour tous fermés F_0 et F_1 avec $F_0 \cap F_1 \varnothing$, il existe $f : X \to [0, 1]$ continue telle que

$$F_0 = f^{-1}(\{0\}) \quad \text{et} \quad F_1 = f^{-1}(\{1\}).$$

  L'intervalle $[0, 1]$ est muni de la topologie métrique usuelle. En prenant $O_0 = f^{-1}([0, 1/2))$ et $O_1 = f^{-1}((1/2, 1])$ on a $(T_6) \Rightarrow (T_4)$. Réciproquement, en utilisant le lemme de Urysohn, (T_4) implique qu'il existe $f : X \to [0, 1]$ continue telle que $f(x) = 0$ si $x \in F_0$ tandis que $f(x) = 1$ si $x \in F_1$, mais cela reste plus faible que (T_6) car $F_i \subset f^{-1}(\{i\})$.

Nous avons déjà vu que les espaces métriques vérifient (T_2). Le théorème suivant va plus loin.

1. En allemand, *séparation* se dit *Trennung*, d'où la notation.
2. Vu en TD3.

Théorème 1.5.1. Parfaite normalité des espaces métrisables.

Tout espace topologique métrisable, et en particulier tout espace métrique, vérifie l'axiome de séparation (T_6) des espaces parfaitement normaux de Hausdorff.

La preuve nécessite d'introduire la notion de distance entre un point x et une partie non vide $A \subset X$ et entre deux parties non vides $A, B \subset X$:

$$d(x,A) := \inf_{y\in A} d(x,y) \quad \text{et} \quad d(A,B) := \inf_{(x,y)\in A\times B} d(x,y).$$

On note que $d(\cdot, A)$ est continue : passer à l'infimum sur z dans l'inégalité triangulaire $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

La preuve fait appel au lemme suivant :

Lemme 1.5.2. Caractérisation de la fermeture dans les espaces métriques.

Dans un espace métrique (X,d), $F \subset X$ est fermé si et seulement si $d(x,F) = 0$ implique $x \in F$.

Mais $d(F_1,F_2) = 0 \not\Rightarrow F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, contre-exemple : $F_1 = \{(0,x), x \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{(x,1/x) : x > 0\}$.

Preuve. $\Rightarrow$. Soit F fermé. Si $d(x,F) = 0$ alors il existe (x_n) dans F telle que $d(x,x_n) \to 0$, donc $x_n \to x$, donc $x \in F$ car F est fermé.

$\Leftarrow$. L'espace métrique (X,d) est à base dénombrable de voisinages, donc de Fréchet–Urysohn. Donc pour tout $x \in \overline{F}$, il existe (x_n) dans F telle que $x_n \to x$, d'où $d(x_n,x) \to 0$ et $d(x,F) = 0$, donc $x \in F$. □

Preuve du théorème 1.5.1. Si $F_0 = F_1 = \emptyset$, on pose f constante $= \frac{1}{2}$. Si $F_0 \neq \emptyset$ et $F_1 = \emptyset$, on pose $f(x) = d(x,F_0)/(1+d(x,F_0))$ pour tout x, voir le lemme 1.5.2. Enfin si $F_0, F_1 \neq \emptyset$, alors on pose $f(x) = d(x,F_0)/(d(x,F_0)+d(x,F_1))$ pour tout x, et le lemme 1.5.2 assure que le dénominateur ne s'annule pas car $F_0 \cap F_1 = \emptyset$. □

1.6 Définir une topologie : trace, produit, initiale, finale, quotient

Nous avons déjà vu (théorème 1.4.8) que les topologies à base dénombrable de voisinages, et en particulier les topologies métrisables, sont caractérisées par la convergence des suites. En effet, pour ces topologies, la caractérisation de l'adhérence par la convergence des suites permet d'obtenir les fermés et donc les ouverts. Nous abordons à présent plusieurs autres manières de définir des topologies.

Topologie trace ou induite

Définition 1.6.1. Topologie trace (induite) ou sous-espaces topologiques.

Si $(X,\mathcal{O})$ est un espace topologique et $A \subset X$ alors $\{O \cap A : O \in \mathcal{O}\}$ est une topologie sur A appelée topologie trace (de celle de X sur A) ou topologie induite (par celle de X sur A).
C'est la topologie la moins fine sur A qui rend l'inclusion canonique continue[a].

a. Pour une application $f : X \to Y$, et à topologie $\mathcal{O}_Y$ fixée sur Y, la topologie discrète ou maximale $\mathcal{P}(X)$ est la plus fine sur X qui rend f continue. De même, à topologie $\mathcal{O}_X$ fixée sur X, la topologie grossière $\{\emptyset, Y\}$ est la moins fine sur Y qui rend f continue. C'est pourquoi, pour $f : X \to Y$ donnée, il est plus intéressant et naturel, à l'opposé, de rechercher la topologie la moins fine sur X à $\mathcal{O}_Y$ fixée (ou la plus fine sur Y à $\mathcal{O}_X$ fixée) qui rend f continue.

Exemple 1.6.2.

- Si $X = \mathbb{R}$ et $A = [0,1]$ alors $(0,1)$, $[0,1]$, $(0,1]$, et $[0,1)$ sont ouverts dans A, pas $[1/3,1/2]$.
- Si $X = \mathbb{R}^2$ et $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ alors la topologie trace sur A coïncide avec celle usuelle de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.6.3. Propriétés.

- Si (X,d) est un espace métrique et si $A \subset X$ alors la restriction $d_{A\times A}$ de la métrique d sur A est une métrique sur A dont la topologie est la topologie trace sur A de celle de X.
- La définition est emboîtable : si $B \subset A \subset X$ alors la topologie trace sur B de celle de X coïncide avec la topologie trace sur B de la topologie trace sur A de celle de X.
- Soit $A \subset X$ muni de la topologie trace. Alors $B \subset A$ est fermé dans A si et seulement si $B = A \cap F$

pour un fermé F de X. En effet $B = F \cap A$ équivaut à $A \setminus B = (X \setminus F) \cap A$.
— La fermeture d'un ensemble $B \subset A$ pour la topologie trace (sur A de celle de X) est la trace de sa fermeture dans la topologie de X. Cette propriété ne fonctionne pas pour l'intérieur, comme le montre l'exemple $X = \mathbb{R}^2$ et $A = B = \mathbb{R} \times \{0\}$: l'intérieur de B dans A vaut A, tandis que son intérieur dans X est vide.
— Si (x_n) et x sont dans $A \subset X$ alors $x_n \to x$ dans A si et seulement si $x_n \to x$ dans X.

Remarque 1.6.4. Propriétés conservées par la topologie trace.

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A \subset X$ équipé de la topologie trace $\mathcal{O}_A$.
— Si $\mathcal{O}$ est à base dénombrable de voisinages alors $\mathcal{O}_A$ l'est aussi.
— Si $\mathcal{O}$ est à base dénombrable alors $\mathcal{O}_A$ l'est aussi.
— Si $\mathcal{O}$ est séparée (axiome (T_2) de Hausdorff) alors $\mathcal{O}_A$ l'est aussi.
Ceci est aussi vrai pour l'axiome (T_1), mais pas pour l'axiome (T_4).
— Si $\mathcal{O}$ est métrisable et séparable, alors $\mathcal{O}_A$ est métrisable et séparable. Ceci n'est plus vrai sans la métrisabilité. Rappelons que d'après le théorème 1.4.7, pour un espace métrisable, la séparabilité est équivalente à être à base dénombrable.

Topologie produit

Définition 1.6.5. Produit d'espace topologiques ou topologie de Tikhonov.

Soit $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$ des espaces topologiques, et $X := \prod_{i\in I} X_i$. La topologie produit ou cylindrique sur X a pour base les $\prod_{i\in I} O_i$ où $O_i \in \mathcal{O}_i$ pour tout $i \in J$ et $O_i = X_i$ pour tout $i \notin J$ où $J \subset I$ est fini. C'est la topologie la moins fine sur X qui rend les projections canoniques $X \to X_i$ continues.

Voir Théorème 1.4.3 de caractérisation des bases de topologie.

Lemme 1.6.6. Caractérisation marginale de la convergence dans l'espace produit.

On a $x_n \to x^*$ dans $X = \prod_{i\in I} X_i$ si et seulement si $x_{n,i} \to x_i^*$ dans X_i pour tout $i \in I$.

Preuve. Si $x_n \to x^*$ dans $X = \prod_{i\in I} X_i$ alors en considérant un cylindre dont tous les facteurs sauf le i-ème sont maximaux on obtient $x_{n,i} \to x_i^*$ dans X_i. Réciproquement, si pour tout $i \in I$, $x_{n,i} \to x_i^*$ dans X_i, soit A un cylindre de la topologie produit, associé à un $J \subset I$ fini. Pour $i \notin J$, on a $x_{n,i} \in O_i = X_i$. Pour $i \in J$, on a $x_{n,i} \in O_i$ pour $n \geq N_i$, et donc pour tout $n \geq N := \max_{i\in J} N_i$ qui est fini car J est fini. Considérer les cylindres est suffisant car ils forment une base de la topologie produit, par la caractérisation des bases du théorème 1.4.3. □

Exemple 1.6.7.

— La topologie usuelle sur $\mathbb{R}^d$ est la topologie produit des topologies (usuelles) des facteurs. Attention : la plupart des ouverts de $\mathbb{R}^d$ ne sont pas des produits d'ouverts de $\mathbb{R}$, ce sont en revanche des réunions quelconques de ces produits d'ouverts. Déjà les boules !
— La topologie trace de $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ sur le « cube de Hilbert » $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ correspond à la convergence uniforme des coordonnées, elle est donc plus forte que la topologie produit.
— Plus généralement, si X est un espace topologique alors l'espace produit $X^I = \prod_{i\in I} X$ est identifiable à l'ensemble des fonctions $I \to X$ muni de la topologie de la convergence simple.

Remarque 1.6.8. Propriétés héritées par produit.

Soient $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$ des espaces topologiques et $X = \prod_{i\in I} X_i$ muni de la topologie produit $\mathcal{O}$.
— **Séparation.**
  — Si (T_1) ou (T_2) est vérifié par tous les X_i, alors il en est de même de X. En effet, si $x \neq y$ alors $x_i \neq y_i$ pour un i et on peut, à partir d'ouverts séparants, les étendre au produit en prenant des cylindres « pleins » sur les autres coordonnées.
  — L'axiome (T_4) n'est pas stable par passage au produit en revanche[a].
— **Dénombrabilité.**

— Si I est au plus dénombrable et si les X_i sont tous à base dénombrable de voisinage (ou tous à base dénombrable) alors c'est aussi le cas de X. Ceci découle du fait qu'une union finie d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
— En revanche, ce n'est plus vrai en général si I n'est pas dénombrable (Exercice **).

— **Séparabilité.**
— Si I est au plus dénombrable, et si les X_i sont tous séparables alors c'est aussi le cas de X. En effet, en numérotant, $I \subset \mathbb{N}$, et si pour tout $i \in I$, $A_i \subset X_i$ est dénombrable et dense, alors en fixant pour tout $i \in I$ un $x_i \in A_i$, il vient, en posant $B_i := \{y \in \prod_{i\in I} A_i : y_j = x_j \text{ si } j > i\}$, que $\cup_{i\in I} B_i$ est dénombrable et dense dans X.
— Reste vrai si I a le cardinal de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire $2^{\mathbb{N}}$. (Exercice ***)
— Cela n'est plus toujours vrai si I a un cardinal strictement supérieur à celui de $\mathbb{R}$.

— **Métrisabilité.** Supposons que pour tout i la topologie de X_i est métrisable par d_i.
— Si $I = \{1, \dots, n\}$ est fini, alors X est métrisable par (Exercice *)

$$d(x, y) := \max_i d_i(x_i, y_i).$$

Si d_i est associée à une norme $\|\cdot\|_i$ alors $\|x\| := \max_i \|x_i\|_i$ est une norme associée à d.
— Si $I = \mathbb{N}$ est infini dénombrable, alors X est métrisable par (Exercice *)[b]

$$d(x, y) := \max_i \min(d_i(x_i, y_i), 2^{-i}).$$

En revanche, un produit infini d'espace normés n'est pas toujours normable.
— Si I est non dénombrable, et si chaque X_i contient au moins deux points distincts, alors X n'est pas métrisable, car pas à base dénombrable de voisinages (cf. plus haut).

a. Un contre-exemple est donné par la topologie carré semi-ouverte de Sorgenfrey, cf. [44, Sec. 84 p. 103] et TD.
b. Le supremum est atteint. S'il vaut zéro, c'est immédiat. Sinon, en notant s sa valeur, pour i assez grand on a $2^{-i} < s/2$; les termes correspondants sont donc $< s/2$, et le supremum est le maximum d'un nombre fini de termes.

Exemple 1.6.9. Espace de fonctions lisses.

Soit $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}) = \cap_k \mathcal{C}^k([0,1],\mathbb{R})$, équipé de la topologie dont une base locale de voisinages est donnée par les boules $B(f, 2^{-n})$ pour une norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^k}$ pour un certain k. Par définition cette topologie est à base dénombrable de voisinages. On peut établir que $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ si et seulement si $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ pour tout k. Alternativement, il est possible de concevoir également $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ comme la diagonale de l'espace produit $\prod_k \mathcal{C}^k([0,1],\mathbb{R})$, et il se trouve que la topologie produit coïncide avec celle définie précédemment. Pour le voir, utiliser la caractérisation des suites convergentes, la caractérisation de la topologie des espaces à base dénombrable de voisinages par la convergence des suites, et la stabilité du caractère à base dénombrable de voisinage par passage à la topologie trace.

Topologies initiale et finale

Me 30/09

Définition 1.6.10. Topologie initiale et finale.

— Soient $f_i : X \to X_i$, $i \in I$, avec topologie prescrite sur chaque X_i.
La topologie engendrée sur X par les $f_i^{-1}(O_i)$ avec O_i ouvert dans X_i et $i \in I$ est appelée topologie initiale. C'est la moins fine qui rend f_i continue pour tout i.
— Soient $g_i : X_i \to X$, $i \in I$, avec topologie prescrite sur chaque X_i.
L'ensemble des $O \subset X$ tels que $g_i^{-1}(O)$ est ouvert dans X_i pour tout i constitue une topologie sur X appelée topologie finale. C'est la plus fine qui rend g_i continue pour tout i.

S'il existe une topologie vérifiant la propriété P, alors l'intersection de toutes les topologies vérifiant la propriété P est non vide et constitue une topologie, c'est la moins fine vérifiant P, ou la plus petite pour l'inclusion. À l'opposé, la construction d'une topologie la plus fine vérifiant P est moins évidente.

La topologie trace ou induite est la topologie initiale de l'inclusion canonique.

La topologie produit est la topologie initiale des projections canoniques.

La topologie de Zariski est inspirée de la notion de topologie finale. En fait on peut définir une topologie par les fermés en considérant les ensembles de zéros de fonctions continues notamment.

La topologie quotient ci-dessous est un exemple de topologie finale.

Topologie quotient

Définition 1.6.11. Topologie quotient.

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X, $[x]$ la classe d'équivalence de $x \in X$, et $X/\sim$ l'espace quotient formé par les classes d'équivalence. Munissons X d'une topologie. La topologie quotient sur $X/\sim$ est la plus fine qui rend continue la projection canonique $[\cdot] : x \in X \mapsto [x] \in X/\sim$.
En d'autres termes $O \subset X/\sim$ est ouvert ssi $[\cdot]^{-1}(O) := \{x \in X : [x] \in O\}$ est ouvert dans X.
En d'autres termes, il s'agit de la topologie finale de la projection canonique.

Si X est séparable, alors l'image par la projection canonique d'une suite dense est une suite dense, et donc le quotient est séparable. En revanche le passage au quotient peut faire perdre la séparation ($\neq$ séparabilité) et le caractère à base dénombrable, comme l'illustre les (contre-)exemples suivants.

Exemple 1.6.12. Contre-exemples.

- **Droite réelle avec deux origines.** Il s'agit d'un espace séparé dont un quotient ne l'est pas. Soit $X = \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} = \{(x,1) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,2) : x \in \mathbb{R}\}$ l'union disjointe de deux copies de la droite réelle, munies de la topologie usuelle, de sorte que $O \subset X$ est ouvert ssi à la fois $\{x : (x,1) \in O\}$ et $\{x : (x,2) \in O\}$ sont ouverts. Au passage, on comprend que l'union disjointe de deux espaces topologiques est un espace topologique. Définissons la relation d'équivalence $(x,1) \sim (x,2)$ pour $x \neq 0$. Toutes les classes d'équivalence ont deux éléments, et peuvent être identifiées à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sauf celles de $0_1 := (0,1)$ et de $0_2 := (0,2)$, les deux origines, qui restent distinctes. Dans la topologie quotient $X/\sim$, les bases locales de $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sont identiques à celles de $\mathbb{R}$, tandis qu'une base locale de voisinages ouverts de 0_1 est formée des ensembles $\{[x] : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : |x| < r\} \cup \{0_1\}$, idem pour 0_2. En particulier 0_1 et 0_2 ne peuvent pas être séparés par des ouverts !
- **Bouquet infini de cercles.**[a] Il s'agit d'un espace à base dénombrable de voisinages dont un quotient ne l'est pas. Soit $X = \mathbb{R}$ avec sa topologie usuelle, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, la relation d'équivalence $x \sim y$ ssi $x = y$ ou bien $x, y \in \mathbb{Z}$. Le quotient $X/\sim$ est formé par une classe infinie regroupant tous les entiers relatifs, et une infinité non dénombrable de singletons constitués de $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Les bases locales pour $[x]$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ sont celles de la topologie usuelle. Mais $[0]$ n'a pas de base dénombrable de voisinage (O_n). Si (O_n) est une base dénombrable de voisinage en $[0]$, il existe $0 < r_n < \frac{1}{4}$ tel que $[(n - r_n, n + r_n)] \subset O_n$. Ainsi $[\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}((n - \frac{1}{2}r_n, n + \frac{1}{2}r_n)]$ est un voisinage ouvert de $[0]$. Or en définissant $x_n := n + \frac{3}{4}r_n$, $[x_n] \in O_n$ mais $x_n \notin V$ donc $O_n \not\subseteq V$ pour tout n, ce qui contredit le fait que $(O_n)_n$ soit une base.

a. Imaginer un fil doublement infini, avec une infinité de marques régulièrement espacées, et qu'on enroule en le tenant par la main, en positionnant dans sa main toutes les marques, cela donne un bouquet infini de cercles.

Exemple 1.6.13. Topologies quotient.

- **Cercle.** $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Z}$. Le quotient $\mathbb{R}/\sim$ est homéomorphe au cercle $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, et l'homéomorphisme est donné par $x \mapsto e^{i2\pi x} = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$. Il est aussi possible de concevoir S^1 comme le quotient de $[0,1]$ par la relation d'équivalence $0 \sim 1$, c'est-à-dire

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1 \simeq [0,1]/(0 \sim 1).$$

  Il s'agit de topologie, ces espaces sont aussi homéomorphes au bord du carré $[0,1]^2$.
- **Tores.** De même, le tore à deux dimensions peut être construit comme suit

$$\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) \simeq S^1 \times S^1 \simeq [0,1]^2/((x,0) \sim (x,1), (0,y) \sim (1,y)).$$

  Plus généralement $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ est appelé tore à d-dimensions.
- **Cylindre, bande ou ruban de Möbius, bouteille de Klein.** Dans le même esprit :
  - cylindre : $[0,1]^2/((x,0) \sim (x,1))$
  - bande ou ruban de Möbius : $[0,1]^2/((0,y) \sim (1,1-y))$

— bouteille de Klein : $[0,1]^2/((x,0)\sim(x,1),(0,y)\sim(1,1-y))$.
Construction de la bouteille de Klein par étapes : recoller les extrémités du cylindre à l'envers, ou recoller la moitié du bord de la bande de Möbius avec l'autre moitié du bord.

— **Espace projectif bidimensionnel.**

$$[0,1]^2/((x,0)\sim(1-x,1),(0,y)\sim(1,1-y))\simeq\mathbb{R}\mathrm{P}^2$$

où

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\mathrm{P}^2 &:= (\mathbb{R}^3\setminus\{0\})/((x,y,z)\sim(\lambda x,\lambda y,\lambda z))\\ &= S^2/((x,y,z)\sim(-x,-y,-z))\end{aligned}$$

où $S^2 := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ est la sphère de dimension 2 ou sphère unité de $\mathbb{R}^3$. L'homéomorphisme avec $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ découle du fait que $(x,y)\mapsto(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$ envoie le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ sur l'hémisphère supérieur, en notant que $\overline{\mathbb{D}}$ est homéomorphe au carré $[0,1]^2$, et en vérifiant que l'identification antipodale $(x,y)\sim(-x,-y)$ au bord de $\overline{\mathbb{D}}$ coïncide avec l'identification au bord de $[0,1]^2$ utilisée ci-dessus.

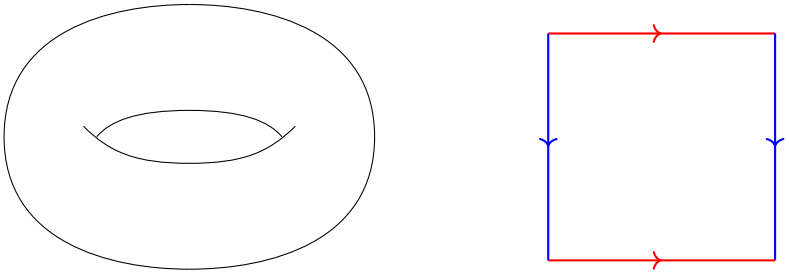


FIGURE 1.1 – Un tore en TikZ. Le genre est 1, le groupe fondamental est $\mathbb{Z}^2$. Le concept de groupe fondamental a été introduit par Henri Poincaré dans la douzième section de son article Analysis Situs, paru en 1895 et annoncé dans une note aux Comptes rendus de l'Académie des sciences, parue en 1892.

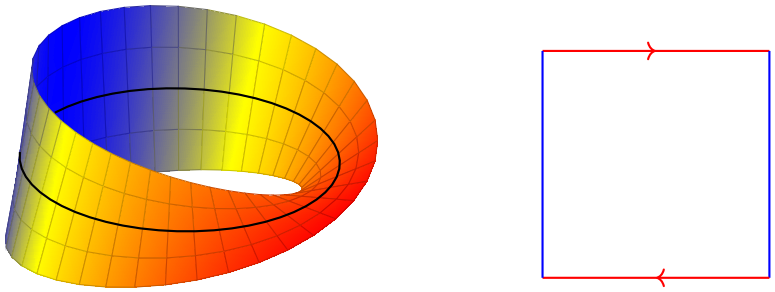


FIGURE 1.2 – Une bande de Möbius tracée par TikZ avec des courbes paramétrées. La surface a la particularité d'être réglée et non orientable. Elle a été décrite indépendamment en 1858 par les mathématiciens August Ferdinand Möbius (1790–1868) et Johann Benedict Listing (1808–1882). Le nom du premier fut retenu grâce à un mémoire présenté à l'Académie des sciences à Paris.

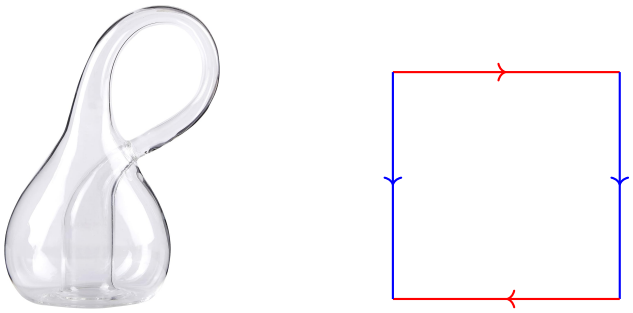


FIGURE 1.3 – Une bouteille de Klein en verre. Il n'y a pas assez de place en dimension 3 pour la matérialiser sans auto-intersection. On pourrait utiliser une vidéo 3D ! La bouteille de Klein a été décrite en 1882 par le mathématicien Felix Klein. Son nom provient possiblement d'un jeu de mots entre les termes Klein Fläche (« surface de Klein ») et Klein Flasche (« bouteille de Klein »).

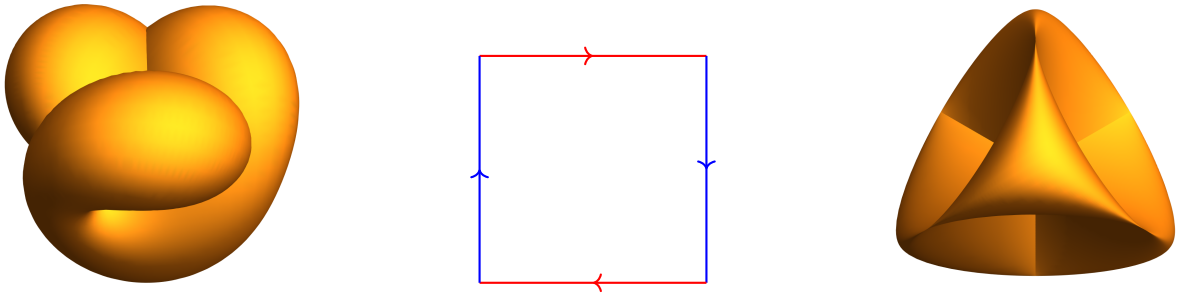


FIGURE 1.4 – Représentation de l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^2$. De même, il n'y a pas assez de place dans $\mathbb{R}^3$ pour la représentation, et il y a plusieurs options pour la projeter dans $\mathbb{R}^3$: la surface de Boy (du nom de Werner Boy) ou la surface romaine ou surface de Steiner (ainsi appelée parce que Jakob Steiner était à Rome quand il l'a conçue) est une projection de l'espace projectif réel dans $\mathbb{R}^3$.



FIGURE 1.5 – Vladimir I. Arnold (1937 – 2010) était un grand mathématicien tenant des mathématiques expérimentales. Un exposé exceptionnel : `https://www.youtube.com/watch?v=vBH6w09UYrg`.

1.7 Notions de variété et de groupe de Lie

Le tore, la bouteille de Klein, l'espace projectif de dimension 2, ainsi que le cylindre et la bande de Möbius considérés sans leur bord c'est-à-dire en quotientant $[0,1]\times(0,1)$ par les relations d'équivalence $(0,y)\sim(1,y)$ et $(0,y)\sim(1,1-y)$ respectivement, sont des exemples de variétés topologiques.

Le concept suivant correspond à ce qu'on appelle les variétés abstraites : définir des coordonnées locales sur un objet avec un atlas de cartes. Il existe également un concept de variétés plongées d'un espace ambiant, définies par des équations, comme les sphères et plus généralement les hypersurfaces de $\mathbb{R}^n$. Les variétés plongées sont des variétés grâce au théorème des fonctions implicites, et il existe une sorte de réciproque, abordée dans le chapitre A. Point de vue intrinsèque versus extrinsèque en géométrie.

Définition 1.7.1. Variétés abstraites.

Soit X un espace topologique séparé et à base dénombrable. On dit que X est une variété $\mathcal{C}^k$ de dimension n lorsqu'il existe une collection (atlas) d'ouverts $(O_i)_{i\in I}$ telle que :

- $X=\cup_{i\in I}O_i$
- pour tout $i\in I$, il existe un homéomorphisme f_i entre O_i et $\mathbb{R}^n$ (ou la boule unité de $\mathbb{R}^n$)
- si $O_i\cap O_j\neq\varnothing$ alors $f_j\circ f_i^{-1}:f_i(O_i\cap O_j)\to f_j(O_i\cap O_j)$ est C^k (toujours vrai si $k=0$).

L'application f_i est une carte, et l'application $f_j\circ f_i^{-1}$ est un changement de carte.
La variété est dite lisse lorsque la propriété est vraie pour tout k (changements de carte $\mathcal{C}^\infty$).

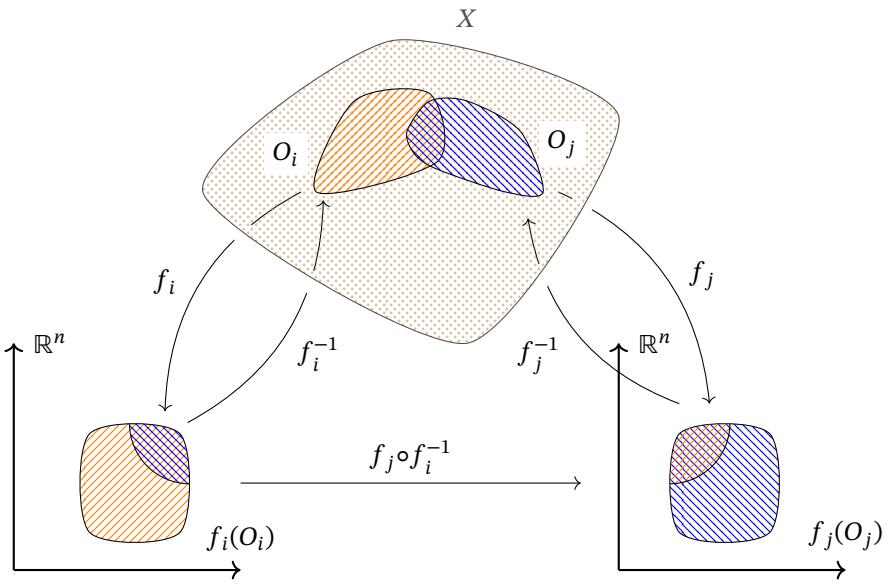


FIGURE 1.6 – Schéma visualisant le concept de variété.

Les cartes permettent d'obtenir des coordonnées locales, valable sur un morceau de la variété. Les changements de cartes sont bijectifs dérivables à inverses dérivables, ce sont donc des difféomorphismes. Cette notion, tout comme celle de fonction $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^{n>1}$, est abordée dans le chapitre A des annexes.

La définition ci-dessus procède par morceaux en patchwork, ce qui empêche de faire dépendre la dimension d de la position spatiale. Rappelons que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont homéomorphes que si $n=m$. En ne retenant que la notion de dimensionnalité, et au-delà des variétés, il existe une notion de dimension de Hausdorff qui constitue une manière d'attribuer localement une dimension, à valeur réelle positive, par analogie avec les propriétés locales de $\mathbb{R}^d$. Elle permet par exemple d'attribuer une dimension non entière à certains ensembles fractals. Il existe aussi une notion de multi-fractalité pour les courbes et les champs.

L'exemple le plus simple de variété lisse est celui des ouverts de $\mathbb{R}^n$, car on peut les recouvrir de boules, et les cartes sont triviales : $f_i(x)=x$. Un exemple plus intéressant est donné par la sphère $S^{d-1}:=\{x\in\mathbb{R}^d:\|x\|=1\}$, variété de dimension $d-1$, la projection stéréographique associée à deux points différents fournit un atlas à deux[3] cartes. Alternativement, il est possible d'extraire des cartes de l'équation $x_1^2+\cdots+x_d^2=1$, en passant par la formulation de S^{d-1} comme sous-variété de $\mathbb{R}^d$ sous forme de graphe de fonction : chaque coordonnée donne lieu

3. On ne peut pas faire moins car S^{d-1} et $\mathbb{R}^{d-1}$ ne sont pas homéomorphes. Pour $d=2$, épointer et considérer la connexité.

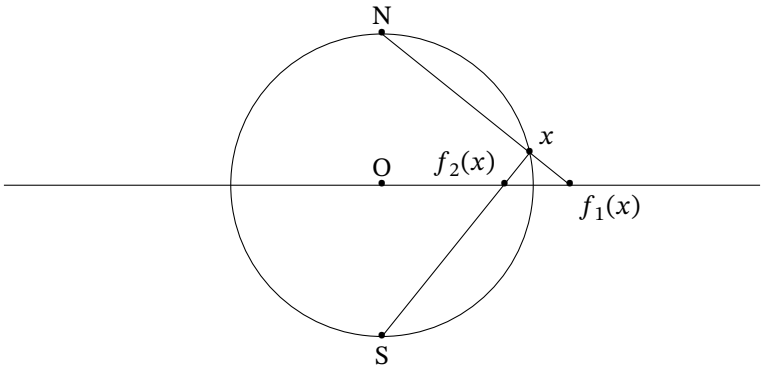


FIGURE 1.7 – Images d'un point par projections stéréographiques sur la droite de pôles nord et sud.

à deux cartes : pour x_d les projections $(x_1, \dots, x_d) \mapsto (x_1, \dots, x_{d-1})$ sur $x_d > 0$ et sur $x_d < 0$ sont des homéomorphismes locaux, tandis que les formules $x_d = \pm(1 - x_1^2 - \cdots - x_{d-1}^2)^{1/2}$ donnent des changement de carte lisses, et au total, cela donne $2d$ cartes, quatre cartes pour le cercle S^1. Voici enfin un exemple matriciel de variété : le groupe spécial linéaire

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,:\, \det(A) = 1\} = \{(a,b,c,d) \,:\, ad - bc = 1\} \subset \mathbb{R}^4,$$

muni de la topologie trace ou induite. C'est un exemple de groupe de Lie : groupe topologique + variété.

Définition 1.7.2. Groupe de Lie.

Un groupe G est un groupe de Lie lorsque c'est à la fois une variété lisse et un groupe topologique :

$$(g_1, g_2) \in G \times G \mapsto g_1 g_2 \in G \quad \text{et} \quad g \in G \mapsto g^{-1} \in G$$

sont continues. On dit que c'est un groupe de Lie matriciel lorsque c'est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ inversibles.

En effet, sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, on peut considérer huit ouverts $O_a^\pm, O_b^\pm, O_c^\pm, O_d^\pm$ définis par les conditions $\pm a > 0$, $\pm b > 0$, $\pm c > 0$, $\pm d > 0$. Soit $f_a^\pm : O_a^\pm \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_a^\pm(a,b,c,d) = (a,b,c)$, de sorte que $(f_a^\pm)^{-1}(a,b,c) = (a,b,c,(bc+1)/a)$. Il s'agit d'un homéomorphisme entre $O_a^\pm$ et $\mathbb{R}_\pm \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3$. Idem pour b, c, d. On peut vérifier que les changements de cartes sont rationnels et que la variété est lisse.

La variété de dimension 3 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ peut être vue comme homéomorphe (en fait difféomorphe) à une partie de $\mathbb{R}^4$, qui ressemble localement au graphe de la fonction $d = (bc+1)/a$, $c = (ad-1)/b$, etc.

Il existe des versions complexes plutôt que réelles des variétés et des groupes de Lie.

Le chapitre A propose quelques rudiments supplémentaires sur les variétés.

Remarque 1.7.3. Espaces vectoriels topologiques.

Dans le même esprit de compatibilité entre topologie et structure algébrique ou géométrique, un espace vectoriel topologique (evt) est un espace vectoriel X sur un corps $\mathbb{K}$ muni d'une topologie compatible : $(x,y) \in X \times X \mapsto x + y \in X$ et $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X \mapsto \lambda x \in X$ sont continues. Le corps $\mathbb{K}$, typiquement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est muni de sa topologie usuelle. Un espace vectoriel normé (evn) est toujours un evt, mais la réciproque est fausse en général comme le montrent l'espace des fonctions holomorphes sur un domaine ouvert, l'espace de fonctions infiniment dérivables, et l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide de la théorie des distributions. Le concept d'evt et notamment celui d'evt localement convexe (tout point admet une base de voisinages convexes) est utilisé en analyse fonctionnelle, et notamment en théorie des distributions, en rapport avec la notion de semi-norme.

Chapitre 2

Compacité

Lu 05/10

Pour aller plus loin : [38], [16], [41], [36], [29], et en anglais [9, 8, 18].

2.1 Propriété de Borel–Lebesgue ou quasi-compacité

Définition 2.1.1. Propriété de Borel–Lebesgue.

Un espace topologique X vérifie la propriété de Borel–Lebesgue lorsque de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. En d'autres termes, si $X = \cup_{i\in I} O_i$ avec O_i ouvert pour tout $i \in I$, alors il existe $I' \subset I$ fini tel que $X = \cup_{i\in I'} O_i$. De manière équivalente, si $\cap_{i\in I} F_i = \varnothing$ avec F_i fermé pour tout $i \in I$ alors il existe $I' \subset I$ fini tel que $\cap_{i\in I'} F_i = \varnothing$.

Définition 2.1.2. Espaces topologiques (quasi-)compacts.

En France[a] : un espace topologique est dit :
- quasi-compact lorsqu'il vérifie la propriété de Borel–Lebesgue
- compact lorsqu'il est quasi-compact et séparé

Dans le reste du monde : un espace topologique est :
- compact lorsqu'il vérifie la propriété de Borel–Lebesgue.

a. Et dans ces notes de cours, sauf mention explicite du contraire.

Ces deux définitions coïncident pour les espaces séparés notamment pour les espaces métrisables, mais diffèrent par exemple pour la topologie cofinie ou celle de Zariski, qui ne sont pas séparées, ce qui peut poser question dans un domaine où ce type de topologies apparaît comme la géométrie algébrique.

Définition 2.1.3. Sous-ensembles compacts.

Dans un espace topologique X, on dit que $K \subset X$ est quasi-compact si K, équipé de la topologie trace, est quasi-compact. En d'autres termes, si $K \subset \cup_{i\in I} O_i$ avec O_i ouvert dans X pour tout $i \in I$ alors il existe $I' \subset I$ fini tel que $K \subset \cup_{i\in I'} O_i$.

Exemple 2.1.4. Quasi-compacts.

- Tout ensemble fini est quasi-compact.
- Le segment $[0,1]$ est compact dans $\mathbb{R}$.

  Preuve. En effet, soit $[0,1] \subset \cup_{i\in I} O_i$ un recouvrement par des ouverts. Soit t_* le supremum de l'ensemble des $t \in [0,1]$ tels que $[0,t]$ possède un sous-recouvrement fini. Tout d'abord $t_* > 0$ car comme $0 \in O_i$ pour un certain i, et comme O_i est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $[0,r) \subset O_i$, donc $t_* \geq r$. De plus, on ne peut pas avoir $0 < t_* < 1$ car si c'était le cas, comme il existe i tel que $(t_* - r, t_* + r) \subset O_i$, le segment $[0, t_* + \frac{r}{2}]$ admettrait aussi un sous-recouvrement fini car il suffirait d'ajouter ce O_i au sous-recouvrement fini du segment $[0, t_* - \frac{r}{2}]$. Finalement, si $t_* = 1$, alors il existe $r > 0$ et i tels que $(1-r, 1] \subset O_i$, et on peut ajouter ce O_i au sous-recouvrement fini du segment $[0, 1 - \frac{r}{2}]$. Le sup est donc atteint. □

- Pour tout $K \subset \mathbb{R}^n$,
$$K \text{ est compact} \Leftrightarrow K \text{ est fermé et borné.}$$

Preuve. $\Rightarrow$. La bornitude s'obtient en considérant le recouvrement par les boules $B(0,m)$ avec m entier positif. La fermeture découle du fait topologique général suivant : les quasi-compacts sont toujours fermés dans les espaces séparés, cf. théorème 2.1.6.
$\Leftarrow$. Un fait topologique général (cf. théorème 2.1.6) affirme que les sous-ensembles fermés d'espaces compacts sont compacts. D'autre part le cube $[-m,m]^n$ est compact car produit d'ensembles compacts grâce au théorème de Tikhonov 2.2.1 et à l'item précédent. □

— Les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées. Toutes les réunions finies d'intervalles fermés finis sont compactes, mais la réciproque est fausse comme le montre l'ensemble compact $\{1/n : n \geq 1\} \cup \{0\}$ qui n'est pas réunion finie d'intervalles.

Lemme 2.1.5. Stabilité de la quasi-compacité par réunion finie.

Si $K_1, K_2 \subset X$ sont quasi-compacts alors $K_1 \cup K_2$ est quasi-compact[a].

a. Attention, si X n'est pas séparé, il se peut que K_1 et K_2 soient séparés tandis que $K_1 \cup K_2$ ne l'est pas. Exemple : $K_i = [-1,0) \cup 0_i \cup (0,1]$ dans la droite à deux origines de l'exemple 1.6.12.

Preuve. Découle immédiatement de la définition par les recouvrements d'ouverts. □

Théorème 2.1.6. Fermés et quasi-compacts.

— Si K est quasi-compact et si $F \subset K$ est fermé alors F est quasi-compact.
— Si X est séparé et si $K \subset X$ est quasi-compact alors K est fermé.

Preuve.
— Si $F \subset \cup_{i\in I} O_i$ est un recouvrement de F par des ouverts alors $K = (K \setminus F) \cup \cup_{i\in I} O_i$. Comme $K \setminus F$ est ouvert dans K et K est quasi-compact, il existe un sous-recouvrement $K = (K \setminus F) \cup \cup_{i\in I'} O_i$ avec $I' \subset I$ fini, qui donne un sous-recouvrement fini de F, donc F est quasi-compact.
— Soit $x \in X \setminus K$. Comme X est séparé, pour tout $y \in K$ il existe des voisinages ouverts $x \in O_x^{(y)}$ et $y \in O_y^{(x)}$ tels que $O_x^{(y)} \cap O_y^{(x)} = \emptyset$. On a $K \subset \cup_{y\in K} O_y^{(x)}$, et comme K est quasi-compact, il existe un sous-recouvrement fini $K \subset \cup_{i=1}^n O_{y_i}^{(x)}$. Il en découle que $K \cap O_x = \emptyset$ où $O_x := \cap_{i=1}^n O_x^{(y_i)}$ est un voisinage ouvert de x car intersection finie de voisinages ouverts de x. Ainsi $X \setminus K$ est ouvert.

□

Exemple 2.1.7. Quasi-compact non fermé.

Pour construire un ensemble quasi-compact non fermé, il faut se placer dans un espace non séparé, comme par exemple la topologie cofinie sur un ensemble infini X, topologie quasi-compacte pour laquelle toute partie $K \subset X$ est quasi-compacte. En effet, si $K \subset \cup_{i\in I} O_i$ est un recouvrement de K par des ouverts, alors n'importe quel O_i couvre déjà tous les éléments de X sauf un nombre fini !

Définition 2.1.8. Compacité relative.

Si X est séparé, $A \subset X$ est relativement compact quand il existe un compact $K \subset X$ tel que $A \subset K$, ou de manière équivalente lorsque $\overline{A}$ est compact (Théorème 2.1.6).

Théorème 2.1.9. Continuité et compacité.

— Si $f : X \to Y$ continue et X quasi-compact alors $f(X)$ est quasi-compact[a].
— Si $f : X \to \mathbb{R}$ continue et $X \neq \emptyset$ quasi-compact alors : $\exists x_* \in X : f(x_*) = \sup_{x\in X} f(x) < \infty$.
Plus généralement[b], cela est encore vrai si $f : X \to \mathbb{R}$ est seulement semi-continue supérieurement (c'est-à-dire que les ensembles de sur-niveau $\{x \in X : f(x) \geq r\}$, $r \in \mathbb{R}$, sont fermés).

a. Attention : on peut très bien avoir $f : X \to Y$ continue avec X séparé et Y non séparé.
b. Idem : les fonctions semi-continues inférieurement atteignent leur minimum sur les quasi-compacts non vides.

Plus généralement, on peut se passer de l'hypothèse de quasi-compacité de X et imposer à la place que les ensembles de sur-niveau de f sont quasi-compacts (notons que lorsque X est séparé, cela implique qu'ils sont fermés, et donc que la fonction est semi-continue supérieurement). Ce genre de chose est courant en analyse variationnelle, et, dans sa version semi-continue inférieurement, en théorie des grandes déviations.

Preuve.
- Si $f(X) \subset \cup_{i\in I} O_i$ est un recouvrement d'ouverts de $f(X)$ dans Y alors, comme f est continue, $X \subset \cup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$ est un recouvrement d'ouverts de X, et comme X est quasi-compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $X \subset \cup_{i=1}^{n} f^{-1}(O_i)$ qui donne $f(X) \subset \cup_{i=1}^{n} O_i$.
- Par la première partie, $f(X)$ est un compact de $\mathbb{R}$, il est donc fermé et borné (et non vide). La bornitude donne $S := \sup_{x\in X} f(x) < \infty$. Ensuite, pour tout n, il existe $x_n \in X$ tel que $f(x_n) > S - 1/n$. Donc $f(x_n) \to S$, et comme $f(X)$ est fermé, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = S$. Le sup est donc atteint, c'est un max. Pour la généralisation, pour r assez petit, l'ensemble $\{f \geq r\}$ est non vide, et fermé de X quasi-compact, donc quasi-compact non vide, et on procède ensuite de la même manière.

□

Théorème 2.1.10. Continuité automatique de l'inverse.

Soit $f : X \to Y$ une bijection continue avec X quasi-compact et Y séparé. Alors l'application inverse $f^{-1} : Y \to X$ est continue, autrement dit f est un homéomorphisme.

Notons que $Y = f(X)$ est compact par le théorème 2.1.9.

Preuve. Il suffit d'établir que pour tout fermé F de X, $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ est fermé dans Y. Or comme X est quasi-compact, le théorème 2.1.6 indique que F est quasi-compact, donc par le théorème 2.1.9, $f(F)$ est quasi-compact, et par le théorème 2.1.6, $f(F)$ est fermé car Y est séparé. □

2.2 Théorème de Tikhonov sur les espaces produits

Théorème 2.2.1. Théorème de Tikhonov sur le produit d'espaces quasi-compacts.

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'espaces topologiques quasi-compacts. Alors leur produit $\prod_{i\in I} X_i$ est quasi-compact. Idem avec « compact » au lieu de « quasi-compact ».

- La seconde partie découle de la première car un produit quelconque d'espaces séparés est séparé.
- Le théorème n'est pas simple, même dans le cas d'un produit de deux compacts, cf. ci-dessous !
- Il se trouve que le théorème de Tikhonov pour les quasi-compacts est équivalent à l'axiome du choix, en liaison avec les ultrafiltres et le lemme de Zorn [1]. En revanche la version pour les compacts est strictement plus faible que l'axiome du choix, cf. [25].
- Nous allons nous contenter dans la suite de donner une preuve du théorème de Tikhonov dans le cas où tous les espaces sont métrisables (théorème 2.3.4). Un produit non dénombrable d'espaces métrisables n'est en général pas métrisable, cela force I à être au plus dénombrable.

Preuve quand I est fini. Par récurrence, on se ramène au cas du produit $X \times Y$ de deux espaces quasi-compacts X et Y. Soit $\cup_{k\in K} O_k$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$. Comme les pavés forment une base de la topologie produit, pour tout $(x, y) \in X \times Y$, il existe $k = k(x, y)$ et un pavé $U_{x,y} \times V_{x,y}$ tel que $(x, y) \in U_{x,y} \times V_{x,y} \subset O_{k(x,y)}$. Fixons $x \in X$ et faisons varier $y \in Y$. Comme Y est quasi-compact, du recouvrement ouvert $\cup_{y\in Y} V_{x,y}$ de Y, on tire un sous-recouvrement fini $\cup_j V_{x,y_j(x)}$. L'intersection finie $U_x := \cap_j U_{x,y_j(x)}$ est un ouvert de X, et comme X est quasi-compact, on tire du recouvrement ouvert $\cup_{x\in X} U_x$ de X un sous-recouvrement fini $\cup_i U_{x_i}$. Cela donne le sous-recouvrement fini $\cup_{i,j} O_{k(x_i,y_j(x_i))}$ de $X \times Y$. □

Avant d'aborder une preuve dans le cadre métrique, nous allons étudier les compacts dans ces espaces. Comme ils sont séparés, il n'y a pas de différence entre compacts et quasi-compacts.

1. Vu en DM2.

2.3 Compacité dans les espaces métriques

Dans un espace métrique (X,d), pour tout réel $\varepsilon > 0$, on dit que $A \subset X$ fini est un ε-réseau lorsque pour tout $x \in X$ il existe $a \in A$ tel que $d(x,a) < \varepsilon$, c'est-à-dire que X est recouvert par un nombre fini de boules de rayon arbitrairement petit : $X \subset \cup_{a\in A} B(a,\varepsilon)$.

Lemme 2.3.1. Discrétisation des espaces métriques compacts.

Si (X,d) est métrique compact alors X est séparable et pré-compact ($\neq$ relativement compact) : pour tout $\varepsilon > 0$ X admet un ε-réseau fini.

Ce lemme est complété par le théorème 3.1.6.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\cup_{x\in X} B(x,\varepsilon)$ est un recouvrement de X, et comme X est compact, il existe un sous-recouvrement ouvert $\cup_{a\in A_\varepsilon}^{n_\varepsilon} B(a,\varepsilon)$ où $A_\varepsilon := \cup_{i=1}^{n_\varepsilon}\{x_{\varepsilon,i}\}$. Donc A_ε est un ε-réseau. Enfin pour établir que X est séparable, il suffit d'observer que $A := \cup_{m=1}^{\infty} A_{1/m}$ est dénombrable et dense. □

Théorème 2.3.2. Espaces métrisables : caractérisation séquentielle de la compacité.

Soit (X,d) un espace métrisable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) X est compact

(ii) propriété de Bolzano–Weierstrass :
pour toute suite (x_n) dans X il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ et $x \in X$ tels que $x_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Lorsqu'elles ont lieu, elles entraînent la suivante :

(iii) Lemme de Lebesgue : pour tout recouvrement de X par des ouverts $\cup_{i\in I} O_i$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe i_x tel que $B(x,r) \subset O_{i_x}$. Note : r ne dépend pas de x.

Il s'agit d'une généralisation du théorème de Bolzano–Weierstrass de $\mathbb{R}$ aux espaces métriques.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Par l'absurde, supposons que (x_n) n'a pas de sous-suite convergente. Alors pour tout $x \in X$, une boule centrée en x de rayon assez petit, disons r_x, contient un nombre fini de termes de la suite (sinon il y aurait une sous-suite convergente). Comme X est compact, du recouvrement $X = \cup_{x\in X} B(x,r_x)$, on peut extraire un sous-recouvrement fini de X, formé d'ouverts qui ne contiennent chacun qu'un nombre fini de termes de la suite. C'est une contradiction car la suite prend une infinité de valeurs.

▼ compléments

Alternativement, pour tout $\varepsilon > 0$, la compacité de X permet d'extraire du recouvrement $X = \cup_{y\in X} B(y,\varepsilon)$ un sous-recouvrement fini $X = \cup_{i=1}^{N} B(y_i,\varepsilon)$, donc l'une des boules, disons $B(y_i,\varepsilon)$, contient alors une infinité de termes de (x_n). En répétant le procédé pour le fermé (donc compact) $\overline{B}(y_i,\varepsilon)$, et en itérant la construction, avec $\varepsilon = \varepsilon_n \to 0$, on obtient une suite de fermés emboîtés, dont le diamètre tend vers 0, et qui contiennent tous une infinité de termes de (x_n). On en déduit l'existence d'une sous-suite convergente comme suit[2] :

Lemme 2.3.3. Fermés emboîtes décroissant vers un singleton.

Soit X métrique compact et $X =: F_0 \supset F_1 \supset \cdots$ une suite décroissante de fermés non vides telle que $\operatorname{diam}(F_n) := \sup_{x,y\in F_n} d(x,y) \to 0$ quand $n \to \infty$, alors $F := \cap_{n=0}^{\infty} F_n = \{x\}$ pour un certain $x \in X$.

Preuve. Comme $\operatorname{diam}(F) \le \operatorname{diam}(F_n) \to 0$, il vient que $\operatorname{diam}(F) = 0$, et donc F contient au plus un élément, et il suffit ainsi d'établir que $F \neq \varnothing$. Par l'absurde, si $\cap_{n=0}^{\infty} F_n = \varnothing$ alors $\cup_{n=0}^{\infty} F_n^c = X$, et comme F_n^c est ouvert et X est compact, il existe N tel que $F_N^c = \cup_{n=0}^{N} F_n^c = X$, d'où $F_N = \varnothing$, contradiction. □

▲ compléments

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Par l'absurde, supposons que pour tout n il existe $x_n \in X$ tel que $B(x_n, 2^{-n}) \not\subset O_i$ pour tout $i \in I$. D'après (ii), il existe $(x_{\varphi(n)})$ telle que $x_{\varphi(n)} \to x$ quand $n \to \infty$. Comme $x \in O_{i_x}$ pour un $i_x \in I$, il existe m tel que $B(x,2^{-m}) \subset O_{i_x}$, et donc pour n assez grand $B(x_{\varphi(n)}, 2^{-\varphi(n)}) \subset O_{i_x}$, contradiction.

(ii) $\Rightarrow$ (i) via (iii). Soit $X \subset \cup_{i\in I} O_i$ un recouvrement d'ouverts avec I infini, et $r > 0$ comme en (iii). Par l'absurde, s'il n'existe pas de sous-recouvrement fini, alors on peut construire récursivement une suite (x_n) de X et une suite d'ouverts (O_{i_n}) issue du recouvrement tels que $x_n \notin \cup_{k=0}^{n-1} O_{i_k}$ et $B(x_n,r) \subset O_{i_n}$. En effet, il suffit de choisir x_0 arbitrairement, de trouver i_0 avec (iii), puis x_1, puis i_1, etc. Par construction $d(x_n,x_k) \ge r > 0$ pour $n \neq k$ donc (x_n) ne peut pas avoir de sous-suite convergente, contradiction. □

2. Généralisé aux espaces métriques complets par le lemme 3.1.5. Généralisé car tout espace métrique compact est complet.

Théorème 2.3.4. Théorème de Tikhonov métrique-dénombrable.

Soit (X_n, d_n), $n \in \mathbb{N}$ une famille dénombrable d'espaces topologiques métrisables compacts.
Alors leur produit $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est compact et métrisable.

Preuve. Nous avons déjà abordé la métrisabilité : $d(x, y) := \max_{n\in\mathbb{N}} \min(d_n(x_n, y_n), 2^{-n})$ convient par exemple. Établissons la compacité. Notons $\pi_m : X \to X_m$ la projection canonique. Pour établir la compacité de X, nous allons utiliser la caractérisation séquentielle fournie par le théorème 2.3.2 et un argument diagonal à la Cantor. Soit donc (x_n) une suite de X. Comme X_0 est compact, on peut extraire une sous-suite $(x_n^{(0)})$ telle que son image par π_0 converge. Comme X_1 est compact, on peut à nouveau extraire une sous-suite $(x^{(1)})_n$ telle que son image par à la fois π_0 et π_1 converge, etc. On utilise ici le fait que toutes les sous-suites d'une suite convergente convergent, vers la même limite. On obtient la matrice infinie suivante :

$$\begin{matrix} \boldsymbol{x}_0^{(0)} & x_1^{(0)} & x_2^{(0)} \cdots \\ x_0^{(1)} & \boldsymbol{x}_1^{(1)} & x_2^{(1)} \cdots \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & \boldsymbol{x}_2^{(2)} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

Chaque ligne est une sous-suite de la précédente[3]. La suite diagonale[4] $(\boldsymbol{x}_n) := (x_n^{(n)})$ est incluse dans chacune des sous-suites à partir d'un certain rang (qui dépend de la sous-suite). Donc pour tout m, son image par π_m converge. Il en découle, grâce au Lemme 1.6.6, qu'elle converge dans l'espace produit X. □

2.4 Espaces localement compacts et espaces dénombrables à l'infini

Il nous faudrait dire localement quasi-compact au lieu de localement compact. Rappelons que compact et quasi-compact sont synonymes pour les espaces séparés, en particulier pour les espaces métrisables.

Définition 2.4.1. Espaces topologiques localement compacts.

Un espace topologique X est localement compact lorsque pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert O_x et un quasi-compact K_x tels que $x \in O_x \subset K_x$. Lorsque X est séparé, cela revient à dire que tout point possède un voisinage relativement compact, c'est-à-dire à adhérence compacte.

Il s'agit de la définition la plus courante à l'international, elle n'incorpore pas la séparation.
Lorsque X est métrique, on peut faire en sorte que ces voisinages sont des boules ouvertes.

Remarque 2.4.2. Espaces métriques non localement compacts.

De nombreux espaces métriques ne sont pas localement compacts, notamment les espaces vectoriels normés de dimension infinie, comme par exemple $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Pour le voir, il suffit de mettre en défaut la conclusion du lemme 2.3.1 sur la discrétisation des espaces métriques compacts, en établissant que la boule fermée $\overline{B}(0, r) := \{x : \|x\| \leq r\}$ ne peut pas contenir de ε-réseau. Notons que toutes les boules fermées de même rayon sont homéomorphes par translation. Dans ℓ^p par exemple, $x_n := re_n = r\mathbf{1}_n$ vérifie $\|x_n\| = r$ et $\|x_n - x_m\| = r2^{1/p}$ si $n \neq m$. Si $\overline{B}(0, r)$ était couvrable par un nombre fini de boules de rayon ε, alors l'une des boules contiendrait au moins deux points x_n et x_m vérifiant $r2^{1/p} = \|x_n - x_m\| \leq 2\varepsilon$, impossible dès que $\varepsilon < r2^{1/p-1}$. Ce qui compte ici est d'avoir un nombre arbitrairement grand d'éléments suffisamment distants, ce qui provient de la dimension infinie. Pour $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$, on peut passer par la famille des fonctions triangulaires de valeur maximale 1, à support dans $[k/n, (k + 1)/n]$, $0 \leq k \leq n - 1$, avec n choisi assez grand (en fonction de ε).

Lemme 2.4.3. Formulation alternative pour les espaces séparés.

Un espace séparé est localement compact ssi tout point admet une base de voisinages quasi-compacts.

3. Chaque case du tableau est un élément de l'espace produit, c'est-à-dire une suite indexée par I.
4. Autrement dit, en utilisant la notation fonctionnelle φ pour les sous-suites : $\boldsymbol{x}_n = x_{\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)}$.

Preuve. $\Leftarrow$ immédiat. $\Rightarrow$. Soit $x \in X$ et U un voisinage ouvert de x. Montrons que x possède un voisinage quasi-compact V inclus dans U. Par hypothèse, il existe un ouvert O et un quasi-compact K tels que $x \in O \subset K$. À présent $F := K \setminus (U \cap O)$ est quasi-compact car fermé dans K quasi-compact. Comme X est séparé, K est séparé, donc pour tout $y \in F$, il existe des voisinages ouverts dans K, O_x^y de x et O_y^x de y tels que $O_x^y \cap O_y^x = \emptyset$. Par Borel–Lebesgue, $F \subset O_F := \cup_{i=1}^n O_{y_i}^x$ et donc $O_x := \cap_{i=1}^n O_x^{y_i} \subset K \setminus O_F$. Ainsi $\overline{O_x} \subset \overline{K \setminus O_F} = K \setminus O_F \subset K \setminus F \subset U \cap O$. Finalement $\overline{O_x}$ est compact car fermé dans K compact. □

▼ compléments

Alternativement, il est possible de montrer que les espaces localement compacts séparés sont réguliers :

Lemme 2.4.4. Régularité des espaces localement compact séparés.

Si X est localement compact séparé alors X est régulier (T_3) : tout point et tout fermé ne le contenant pas sont séparables par des ouverts.

Or tout espace régulier admet une base de voisinages fermés. Et si un espace localement compact admet base de voisinages fermés, alors il admet une base de voisinages quasi-compacts.

Preuve. Soit F fermé et $x \notin F$. Comme X est localement compact, il existe K quasi-compact avec $x \in \mathring{K}$, et comme X est séparé, K est fermé. Posons $F' := F \cap K$ qui est fermé dans K quasi-compact, donc quasi-compact. Comme X est séparé, pour tout $y \in F'$, il existe des ouverts disjoints $O_x^{(y)}$ et O_y tels que $x \in O_x^{(y)}$ et $y \in O_y$. Par compacité de F', le recouvrement $F' \subset \cup_{y \in F'} O_y$ possède un sous-recouvrement fini $F' \subset \cup_{i=1}^n O_{y_i}$. Ainsi $O'_x := \cap_{i=1}^n O_x^{(y_i)}$ est un voisinage ouvert de x qui ne rencontre pas $O_{F'} := \cup_{i=1}^n O_{y_i}$ qui est un voisinage ouvert de F'. Alors $O_x := O'_x \cap \mathring{K}$ et $O_F := O_{F'} \cup (X \setminus K)$ sont deux ouverts disjoints avec $x \in O_x$ et $F \subset O_F$. □

▲ compléments

Définition 2.4.5. Espaces topologiques dénombrables à l'infini.

Un espace topologique X est dénombrable à l'infini s'il admet un recouvrement dénombrable par des quasi-compacts : il existe une suite (K_n) de quasi-compacts de X telle que $X = \cup_n K_n$. De plus, quitte à remplacer le quasi-compact K_n par le quasi-compact $\cup_{m \leq n} K_m$, on peut supposer sans perte de généralité que (K_n) est croissante : $K_n \subset K_{n+1}$ pour tout n.

L'espace usuel $\mathbb{R}^d$ est à la fois localement compact et dénombrable à l'infini.

Lemme 2.4.6. Des espaces localement compacts et dénombrables à l'infini à foison.

Si (X, d) est métrisable compact alors il est localement compact et dénombrable à l'infini, et cela est vrai plus généralement pour tout ouvert $O \subset X$ muni de la topologie induite.

Preuve. Pour tout $x \in X$, et $r > 0$ arbitraire, le fermé $\overline{B}(x, r)$ dans X compact est compact, d'où la compacité locale de X. D'autre part, pour $x \in X$ fixé quelconque, on a $X = \cup_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x, n)$, d'où la dénombrabilité à l'infini de X. Mais il y a nettement plus simple : X lui-même constitue un voisinage compact de tous ses points, et une suite (constante) de compacts le recouvrant.

Pour O au lieu de X, considérer la métrique induite ne ramène pas au cas précédent car O n'est pas compact. Si $X \setminus O \neq \emptyset$, soit $\varphi(x) := d(x, X \setminus O)$. On a $x \in O$ ssi $\varphi(x) > 0$ car $X \setminus O$ est fermé. Pour tout $x \in O$, il existe n tel que $2^{-n} < \varphi(x)$ et donc $\overline{B}(x, 2^{-n}) \subset O$, et $\overline{B}(x, 2^{-n})$ est compacte car sous-ensemble fermé du compact X, donc O est localement compact. Ensuite, on a $O \subset \cup_n K_n$ où $K_n := \varphi^{-1}([2^{-n}, \infty)) \subset O$, qui est fermé dans X car φ continue, donc compact, et inclus dans O, donc O est dénombrable à l'infini. □

Théorème 2.4.7. Espaces localement compacts et dénombrables à l'infini.

Si X est localement compact et dénombrable à l'infini[a] alors il existe une suite de quasi-compacts (K_n) croissante pour l'inclusion, $K_n \subset K_{n+1}$ pour tout n, telle que $X = \cup_n K_n$ et pour tout quasi-compact $K \subset X$, il existe n tel que $K \subset K_n$. On parle de suite exhaustive de compacts.

a. Un espace dénombrable à l'infini est qualifié de σ-compact.

Preuve. Soit $X = \cup_n K'_n$ un recouvrement de X avec une suite de quasi-compacts. Construisons (K_n) par récurrence. On pose $K_0 := K'_0$. Ayant construit $K_0, \dots, K_n$, on pose $L_n := K_n \cup K'_{n+1}$. Pour tout point $x \in L_n$, la compacité locale de X assure l'existence d'un ouvert $U_n^{(x)}$ et d'un quasi-compact $K_{n+1}^{\prime(x)}$ tels que $x \in U_n^{(x)} \subset K_{n+1}^{\prime(x)}$. Comme L_n est quasi-compact, il existe un sous-recouvrement fini

$$L_n \subset U_n := \cup_{k=1}^{m} U_n^{(x_k)}.$$

On pose alors $K_{n+1} := \cup_{k=1}^{m} K_{n+1}^{\prime(x_k)}$, qui est quasi-compact. On a $K_0 \subset U_0 \subset K_1 \subset U_1 \subset K_2 \subset \cdots$ et $X = \cup_n K_n = \cup_n U_n$ par construction. Comme chaque quasi-compact $K \subset X$ admet un sous-recouvrement fini parmi les ouverts (croissants) U_n, il existe en particulier un entier $n = n_K$ tel que $K \subset U_n \subset K_{n+1}$. □

Remarque 2.4.8. Espaces de fonctions continues sur un quasi-compact.

Soit K quasi-compact et soit (Y, d) métrique. Alors l'ensemble $\mathcal{C}(K, Y)$ des fonctions continues $K \to Y$ muni de $d_{\mathcal{C}(K,Y)}(f, g) := \max_{x \in K} d(f(x), g(x))$ est un espace métrique. Notons que $x \mapsto d(f(x), g(x))$ est continue car composée de fonctions continues.
De plus, si d dérive d'une norme alors c'est aussi le cas de $d_{\mathcal{C}(K,Y)}$

Remarque 2.4.9. Espaces de fonctions continues sur un localement compact.

Soit X localement compact et dénombrable à l'infini et (Y, d) métrique. On peut munir l'espace $\mathcal{C}(X, Y)$ des fonctions continues $X \to Y$ de la distance $d_{\mathcal{C}(X,Y)}(f, g) := \max_{m \in \mathbb{N}} \min(d_{\mathcal{C}(K_m,Y)}(f, g); 2^{-m})$ où $K_0 \subset K_1 \subset \cdots$ est une suite exhaustive de quasi-compacts de X (théorème 2.4.7). Même si la distance $d_{\mathcal{C}(X,Y)}$ dépend du choix de la suite exhaustive, la notion de convergence de suite sur $\mathcal{C}(X, Y)$ n'en dépend pas. En effet, $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}(X, Y)$ si et seulement si pour tout m, $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}(K_m, Y)$, ce qui équivaut à dire que pour tout quasi-compact $K \subset X$, $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}(K, Y)$.

2.5 Compactification d'Alexandrov

Intuitivement, on peut compactifier $\mathbb{R}^d$ en lui ajoutant un point à l'infini, plus précisément le transformer avec la projection stéréographique en la sphère S^d de $\mathbb{R}^{d+1}$. Le procédé est en fait plus général :

Théorème 2.5.1. Compactification d'Alexandrov.

Soit X un espace topologique et un « point à l'infini » $\infty \notin X$. Soit $X^* := X \cup \{\infty\}$, et $\mathcal{O}^* \subset \mathcal{P}(X^*)$ formé par les ouverts de X et les complémentaires dans X^* des quasi-compacts fermés de X. Alors :

1. $\mathcal{O}^*$ est une topologie sur X^*
2. X^* est quasi-compact
3. l'injection canonique $i : X \to X^*$ est continue et ouverte
4. X^* est séparé si et seulement si X est séparé et localement compact
5. X est dense dans X^* si et seulement si X n'est pas quasi-compact fermé, autrement dit X est fermé dans X^* si et seulement si X est quasi-compact fermé.

Attention, les fermés de X ne sont pas forcément fermés dans X^* (sinon X serait quasi-compact !).

Preuve.

1. Notons $\mathcal{O}$ la topologie de X.
   — Comme $\varnothing$ est quasi-compact fermé, on a bien $X^* \in \mathcal{O}^*$.
   — Stabilité de $\mathcal{O}^*$ par intersection. Soient $O_1, O_2 \in \mathcal{O}^*$.
      — Si $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ alors $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O}^*$.
      — Si $O_1, O_2 \notin \mathcal{O}$ alors $O_1 = X^* \setminus K_1$ et $O_2 = X^* \setminus K_2$ et donc $O_1 \cap O_2 = X^* \setminus (K_1 \cup K_2) \in \mathcal{O}^*$.
      — Si $O_1 \in \mathcal{O}$ et $O_2 \notin \mathcal{O}$, posons $O_2 = X^* \setminus K_2 = (X \setminus K_2) \cup \{\infty\}$. Comme $\infty \notin O_1$, on a $\infty \notin O_1 \cap O_2$. Comme $X \setminus K_2 \in \mathcal{O}$ car K_2 est fermé, il vient $O_1 \cap O_2 = O_1 \cap (X \setminus K_2) \in \mathcal{O}$.
   — Stabilité de $\mathcal{O}^*$ par réunions quelconques. Soit $O = \cup_{i \in I} O_i$ avec $O_i \in \mathcal{O}^*$ pour tout $i \in I$. Soit J l'ensemble des $i \in I$ tels que $O_i \in \mathcal{O}$ et J_∞ l'ensemble des $i \in I$ tels que $O_i = X^* \setminus K_i$ où K_i est un quasi-compact fermé de X. On a $O_J := \cup_{i \in J} O_i \in \mathcal{O}$, et d'autre part, $O_{J_\infty} := \cup_{i \in J_\infty} O_i = X^* \setminus \cap_{i \in J_\infty} K_i \in \mathcal{O}^*$ car $\cap_{i \in J_\infty} K_i$ est quasi-compact fermé car intersection de fermés incluse dans un quasi-compact fermé. Il reste à établir

que si $O \in \mathcal{O}$ et K quasi-compact fermé de X alors $O \cup (X^* \setminus K) \in \mathcal{O}^*$, cet ensemble contient ∞. Or $X \setminus (O \cup (X \setminus K)) = (X \setminus O) \cap K$ qui est fermé dans un quasi-compact fermé donc quasi-compact fermé.

2. Soit $X^* = \cup_{i\in I} O_i$ un recouvrement, et $i_\infty \in I$ tel que $\infty \in O_{i_\infty}$. Alors $O_{i_\infty} = X^* \setminus K$, et comme $K \subset \cup_{i\in I} O_i$, il existe $I' \subset I$ fini tel que $K \subset \cup_{i\in I'} O_i$. Ainsi $X^* \subset \cup_{i\in I'\cup\{i_\infty\}} O_i$.
3. Relativement immédiat.
4. Supposons que X est séparé et localement compact. Soient $x, y \in X^*$ avec $x \neq y$. Si $x, y \neq \infty$ alors ils sont séparés par des ouverts de X donc de X^*. Si disons $y = \infty$ et donc $x \neq \infty$, comme X est localement compact, il existe un voisinage compact K de x dans X, alors $X^* \setminus K$ est un voisinage ouvert de $y = \infty$ qui ne contient pas x. Donc X^* est séparé. Réciproquement, supposons que X^* est séparé et $x, y \in X^*$ avec $x \neq y$. Si $x, y \neq \infty$ alors x et y sont séparés dans X. Si disons $y = \infty$ et donc $x \neq \infty$, et si O est un ouvert de X tel que $x \in O$ et K un quasi-compact fermé de X tel que $y \in X^* \setminus K$, et tels que $O \cap (X^* \setminus K) = \emptyset$, alors $O \subset K$, donc x possède un voisinage quasi-compact dans X.
5. Immédiat avec la reformulation.

□

Remarque 2.5.2. Compactifiés.

La compactification ne se réduit pas à celle d'Alexandrov, et peut s'appuyer sur des propriétés de l'espace, par exemple la droite à deux infinis $[-\infty, +\infty]$ compactifie $\mathbb{R}$ en prolongeant l'ordre usuel. Le compactifié de Stone–Čech d'un espace topologique X est un espace compact (quasi-compact séparé) noté souvent βX, muni d'une application continue $i : X \to \beta X$, de sorte que pour tout espace compact K et toute application continue $f : X \to K$, il existe une unique application continue $\beta f : \beta X \to K$ telle que $f = \beta f \circ i$. Un espace compact coïncide avec son compactifié de Stone–Čech.

TD et DM

Remarque 2.5.3. Utilitarisme : à quoi peuvent bien servir les compacts.

Les quasi-compacts permettent de démontrer, de manière non constructive, des résultats d'existence, par les sous-suites qui convergent ou par l'optimisation de fonctions continues. Il est possible d'affaiblir les topologies (réduire le nombre d'ouverts) pour obtenir moins de recouvrements et plus de suites convergentes, donc plus de compacts. Dans les espaces vectoriels normés de dimension infinie, la boule unité n'est pas compacte, mais peut devenir faiblement relativement compacte.

2.6 Théorème de Baire pour les espaces compacts

Lu 12/10

Lemme 2.6.1. Caractérisation de la quasi-compacité.

Pour un espace topologique X, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) X est quasi-compact

(ii) pour toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcap_{i\in I'} F_i \neq \emptyset$ pour tout $I' \subset I$ fini, on a $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

Preuve. Passage au complémentaire, et à la contraposée ! □

Notons que la condition du (ii) est automatiquement vérifiée pour une suite décroissante de fermés non vides pour l'inclusion (emboîtement). De plus, pour ce type de famille, le (i) ⇒ (ii) est utilisé dans la preuve du lemme 2.3.3, abordée précédemment, ainsi que dans le lemme ci-dessous.

Lemme 2.6.2. Suite décroissante de compacts.

Dans un espace topologique séparé, l'intersection de toute suite décroissante de compacts non vides est compacte non vide.

Preuve. Soit (K_n) une suite décroissance de compacts non vides. Comme l'espace est séparé, chaque compact K_n est fermé. Ainsi (K_n) est une suite décroissante de fermés dans K_0 compact, donc $\cap_n K_n$ est non-vide par le lemme 2.6.1. De plus $\cap_n K_n$ est fermé comme intersection de fermés, donc $\cap_n K_n$ est compact. □

Lemme 2.6.3. Compact d'intérieur non vide.

Si X est localement compact séparé alors tout ouvert non vide contient un compact d'intérieur non vide.

Preuve. Si O est un ouvert non vide, il existe $x \in O$. Par le lemme 2.4.3, X admet une base de voisinages compacts, donc il existe un voisinage compact K_x de x avec $x \in K_x \subset O$. Comme K_x est un voisinage de x, il est d'intérieur non vide. □

Théorème 2.6.4. de Baire pour les espaces localement compacts séparés.

Si X est localement compact séparé alors il est de Baire : toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense, autrement dit toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide :

$$\forall n,\ \overline{O_n} = X \quad \Rightarrow \quad \overline{\cap_n O_n} = X \qquad \text{ou} \qquad \forall n,\ \mathring{F_n} = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \cup_n \mathring{F_n} = \varnothing.$$

Cette version du théorème de Baire est utilisée dans le cours de logique du DMA.

Preuve. Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses. Il suffit de montrer que pour tout ouvert non vide O, $O \cap (\cap_n O_n) \neq \varnothing$.

Comme O_0 est dense, $U_0 := O \cap O_0$ est un ouvert non vide et le lemme 2.6.3 fournit un quasi-compact $K_0 \subset U_0$ d'intérieur non vide. Ainsi $U_1 := O_1 \cap \mathring{K_0}$ est un ouvert non vide, qui contient un quasi-compact $K_1 \subset U_1$ d'intérieur non vide. En continuant, on obtient une suite décroissante de quasi-compacts (K_n) avec $K_n \subset O_n$. Alors $O \cap (\cap_n O_n)$ contient $\cap_n K_n$ qui est non vide par le lemme 2.6.2. □

Chapitre 3

Complétude

Pour aller plus loin : [38], [16], [41], [36], [29], et en anglais [9, 8, 18].

3.1 Suites de Cauchy et complétude

Peut-on formuler la notion de convergence en s'affranchissant de l'explicitation de la limite ?

Définition 3.1.1. Suite de Cauchy dans les espaces métriques.

Dans un espace métrique (X, d), on dit qu'une suite (x_n) dans X est une suite de Cauchy lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N_\varepsilon$ tel que pour tous $n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

— Toute suite convergente est de Cauchy (inégalité triangulaire).
— Mais la réciproque est fausse, comme le montre par exemple $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
— Toute suite de Cauchy est bornée [1].
— Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente est elle-même convergente.

Définition 3.1.2. Espaces métriques complets.

On dit qu'un espace métrique est complet lorsque toute suite de Cauchy converge.

Remarque 3.1.3. Questions de métriques.

Cette notion n'est pas topologique : l'espace peut être complet pour une métrique et non complet pour une métrique topologiquement équivalente. On dit que deux métriques d_1 et d_2 sur X sont :
— *topologiquement équivalentes* quand elles définissent la même topologie
— *métriquement équivalentes* quand $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X, d_{1,2}(x, y) < \delta \Rightarrow d_{2,1}(x, y) < \varepsilon$
— *Lipschitz équivalentes* quand $\exists C, c > 0, \forall x, y \in X, c d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C d_1(x, y)$.

Ces trois notions sont de plus en plus fortes. Métriquement équivalentes (resp. Lipschitz équivalentes) signifie que l'application identité et son inverse sont uniformément continues (resp. Lipschitz).
Les notions de suites de Cauchy et de complétude sont stables par l'équivalence métrique.
Sur $\mathbb{R}^n$, les normes $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty]$, sont Lipschitz équivalentes avec $c = 1/n$ et $C = n$.
Sur $\mathbb{R}$, les distances $|x - y|$ et $|x^3 - y^3|$ sont équivalentes topologiquement mais pas métriquement.
Sur l'espace produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\max_{n\in\mathbb{N}} \min(d_n(x_n, y_n), 2^{-n})$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \min(d_n(x_n, y_n), 2^{-n})$ sont topologiquement et même métriquement équivalentes, mais ne sont en général pas Lipschitz équivalentes.
Un théorème d'Ostrowski affirme que toute valeur absolue non triviale sur $\mathbb{Q}$ est topologiquement équivalente à la valeur absolue usuelle ou à la p-adique introduite dans l'exemple 1.1.6.

Lemme 3.1.4. Sous-espaces complets.

— Si X est complet et $F \subset X$ est fermé alors F est complet.
— Si $A \subset X$ est complet alors A est fermé.

1. A borné ssi $\mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y) < \infty$ ssi $A \subset \overline{B}(x, r)$ pour un x et un $r = r_x$ (et donc pour tout x).

Preuve.
— Si une suite (x_n) dans F est de Cauchy dans F, elle l'est aussi dans X, et elle converge donc dans X car X est complet, donc elle converge dans F car F est fermé, donc F est complet.
— Si $x_n \in A \to x$ alors (x_n) est de Cauchy, donc converge dans A car A est complet, donc $x \in A$.

□

Le lemme suivant est la généralisation aux espaces complets du lemme 2.3.3.

Lemme 3.1.5. Fermés emboîtés décroissant vers un singleton.

Soit X complet et $X =: F_0 \supset F_1 \supset \cdots$ une suite décroissante de fermés non vides telle que $\operatorname{diam}(F_n) := \sup_{x,y\in F_n} d(x,y) \to 0$ quand $n \to \infty$, alors $F := \cap_{n=0}^{\infty} F_n = \{x\}$ pour un certain $x \in X$.

Sans l'hypothèse sur le diamètre, la complétude de X ne suffit pas à assurer que l'intersection soit non vide : si $F_n := [n, +\infty)$ alors $F := \cap_{n=0}^{\infty} F_n = \varnothing$.

Si F_0 est compact, en revanche, toute suite décroissante de fermés non vides $F_n \subset F_0$ possède une intersection non vide. Si, de plus, $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, cette intersection est réduite à un singleton.

Mais la simple bornitude de F_0 ne suffit pas à remplacer sa compacité : dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, qui est complet (exemple 3.1.7), $F_n := \{e_n, e_{n+1}, ...\}$ est fermé, borné, non vide, mais $\operatorname{diam}(F_n) = \sqrt{2}$ pour tout n, et $\cap_{n=0}^{\infty} F_n = \varnothing$.

Preuve. Comme $\operatorname{diam}(F) \leq \operatorname{diam}(F_n) \to 0$, il vient que $\operatorname{diam}(F) = 0$. Donc F contient au plus un point, et il suffit à présent d'établir que $F \neq \varnothing$. Comme $F_n \neq \varnothing$, soit $x_n \in F_n$. Pour tout $m \geq n$ on a $d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(F_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc (x_n) est de Cauchy, donc $x_n \to x$ pour un $x \in X$ car X est complet. Comme F_n est fermé et $x_m \in F_m \subset F_n$, il vient $x \in F_n$, donc $x \in F$. □

Théorème 3.1.6. Compacité et complétude.

Un espace métrique X est compact ssi il est complet et pour tout $\varepsilon > 0$ il admet[a] un ε-réseau.

a. Un espace métrique qui admet un ε-réseau pour tout ε est qualifié de pré-compact ($\neq$ relativement compact).

Ce théorème complète le lemme 2.3.1.

Preuve. $\Rightarrow$. Si (x_n) est une suite de Cauchy, alors comme X est compact, il existe une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$, mais ceci implique la convergence de la suite initiale (x_n) car elle est de Cauchy. D'autre part le lemme 2.3.1 assure l'existence d'un ε-réseau pour tout $\varepsilon > 0$ car X est compact.

$\Leftarrow$. Soit (x_n) une suite prenant une infinité de valeurs (sinon il est immédiat de trouver une sous-suite convergente). Pour tout m, soit A_m un ε-réseau avec $\varepsilon = 1/m$. Comme dans la preuve du théorème 2.3.2, cela permet de construire par récurrence une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers zéro, et qui contiennent tous une infinité de valeurs différentes de la suite, en on utilise alors le lemme 3.1.5 (exploite la complétude) pour obtenir une sous-suite convergente. Alternativement, on peut observer que cette sous-suite est de Cauchy et invoquer la complétude directement. Concrètement, la sous-suite finale peut être obtenue par extraction diagonale à partir de la suite des sous-suites.

□

Exemple 3.1.7. $\mathbb{R}^n$ et ℓ^p.

— L'espace métrique $[0,1]^n$ est compact donc complet.
— L'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$ est complet car toute suite de Cauchy est bornée, donc incluse dans un fermé borné qui est donc compact. Idem pour $\mathbb{C}^n$.
— L'espace vectoriel normé $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $p \in [1, \infty]$, est complet. En effet, pour le cas $p \in [1, \infty)$, si $(x^{(n)})$ est de Cauchy dans ℓ^p, la complétude de $\mathbb{R}$ entraîne qu'il existe une suite $x^{(*)}$ telle que $x_m^{(n)} \to x_m^{(*)}$ quand $n \to \infty$, pour tout m. Ensuite, comme $(x^{(n)})$ est bornée dans ℓ^p,

$$\sum_{k=0}^{K} |x_k^{(*)}|^p = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{K} |x_k^{(n)}|^p \leq \sup_n \|x^{(n)}\|_p^p < \infty,$$

d'où $x^{(*)} \in \ell^p$ en passant à la limite $K \to \infty$, et

$$\sum_{k=0}^{K} |x_k^{(n)} - x_k^{(*)}|^p = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{K} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p \leq \overline{\lim_{m\to\infty}} \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p^p,$$

ce qui implique, quand $K \to \infty$, que $x^{(n)} \to x^{(*)}$ dans ℓ^p, car $x^{(n)}$ est de Cauchy !

Remarque 3.1.8. Critère séquentiel de convergence dans les métriques compacts.

Soit K un espace métrique compact. Si une suite (x_n) à valeurs dans K n'a qu'une seule valeur d'adhérence, c'est-à-dire une seule limite possible de sous-suite, alors elle converge vers cette valeur d'adhérence. Pour le voir, il suffit d'établir qu'elle est de Cauchy. Et pour cela, on peut procéder par l'absurde : $\exists \varepsilon > 0$, $\forall N$, $\exists n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) > \varepsilon$, ce qui permet de fabriquer deux sous-suites écartées de $\varepsilon > 0$, mais qui contiennent alors chacune, par la propriété de Bolzano–Weierstrass (théorème 2.3.2), une sous-suite convergente, d'où deux valeurs d'adhérence distinctes, contradiction avec l'unicité.

Théorème 3.1.9. Espaces de fonctions continues.

(i) Si K est compact et Y métrique complet alors $\mathcal{C}(K, Y)$ est métrique complet.

(ii) Si X est localement compact et dénombrable à l'infini et Y métrique complet alors $\mathcal{C}(X, Y)$ est métrisable complet.

Preuve.

(i) Rappelons que $d_{\mathcal{C}(K,Y)}(f, g) = \sup_{x \in K} d_Y(f(x), g(x))$. Si (f_n) est de Cauchy, pour tout $x \in K$, $(f_n(x))$ est de Cauchy dans Y complet, donc converge vers $f(x)$. Ensuite [2]

$$\begin{aligned}\sup_{x \in K} d_Y(f_n(x), f(x)) &= \sup_{x \in K} \lim_{m \to \infty} d_Y(f_n(x), f_m(x)) \\ &\leq \overline{\lim_{m \to \infty}} \sup_{x \in K} d_Y(f_n(x), f_m(x)) = \overline{\lim_{m \to \infty}} d_{\mathcal{C}(K,Y)}(f_n, f_m) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0\end{aligned}$$

car (f_n) est de Cauchy dans $\mathcal{C}(K, Y)$. Ceci montre que f_n converge uniformément vers f. Une limite uniforme d'applications continues à valeurs dans un espace métrique est continue, ainsi $f \in \mathcal{C}(K, Y)$ et $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}(K, Y)$.

(ii) Comme en (i) on obtient la convergence ponctuelle de f_n vers une limite f continue. Ensuite par le (i) pour tout compact $K \subset X$, on a $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}(K, Y)$ et donc $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}(X, Y)$. Rappelons que cette topologie sur $\mathcal{C}(X, Y)$ est métrisable par $d_{\mathcal{C}(X,Y)} := \sup_m \min(d_{\mathcal{C}(K_m,Y)}, 2^{-m})$ où (K_m) est une suite exhaustive de compacts de X dont l'existence est garantie par le théorème 2.4.7.

□

▾ compléments

Définition 3.1.10. Distance de Hausdorff entre fermés.

Soit (X, d) un espace métrique borné au sens où $\operatorname{diam}(X) := \sup_{x,y \in X} d(x, y) < \infty$. Si ça n'est pas le cas, il est possible de considérer la métrique bornée $\min(d, 1)$ qui est métriquement équivalente à d. Soit $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fermés non vides de X et $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{F}(X)$ l'ensemble des compacts non vides de X. On munit $\mathcal{F}(X)$ de la distance de Hausdorff définie par

$$d_H(F_1, F_2) := \inf\{r > 0 : \forall x \in F_{1,2}, \exists y \in F_{2,1}, d(x, y) < r\},$$

ou de manière équivalente

$$d_H(F_1, F_2) := \max\Big(\sup_{x_1 \in F_1} d(x_1, F_2), \sup_{x_2 \in F_2} d(F_1, x_2) \Big).$$

Notons que $\mathcal{F}(X) = \mathcal{K}(X)$ si X est compact.

Théorème 3.1.11. Distance de Hausdorff.

(i) Si X est complet alors $\mathcal{F}(X)$ et $\mathcal{K}(X)$ sont complets.

(ii) Si X est compact alors $\mathcal{K}(X)$ est compact.

2. Car si $\lim_{n \to \infty} a_n(x)$ existe alors $a_n(x) \leq \sup_x a_n(x)$ d'où $\sup_x \lim_{n \to \infty} a_n(x) \leq \overline{\lim}_{n \to \infty} \sup_x a_n(x)$.

Preuve. Démontrons tout d'abord que (i)⇒(ii). Par le théorème 3.1.6, il suffit d'établir que si X admet un ε-réseau pour tout $\varepsilon > 0$ alors il en est de même pour $\mathcal{K}(X)$. Or si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ est un ε-réseau de X alors $\mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$ (parties non vides de A) est un ε-réseau de $\mathcal{K}(X)$.

Démontrons à présent (i). Supposons que X est complet, et soit (F_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{F}(X)$. Notre premier but est d'obtenir une sous-suite convergeant vers un fermé $F_* \subset X$. Notre second but est d'établir que si les F_n sont compacts, alors F_* est aussi compact.

Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $d_H(F_n, F_m) < 2^{-n}$, pour tous $m \geq n$. Soit

$$F_* := \{x_* \in X \,:\, \exists x_m \in F_m, x_m \to x_*\}.$$

À ce stade, on observe les faits suivants :

— Pour tout $x_* \in F_*$ et tout n il existe $x_n \in F_n$ tel que $d(x_n, x_*) < 2^{-n+1}$.
En effet, si $x_* = \lim_{m\to\infty} x_m$ avec $x_m \in F_m$ alors on peut prendre m assez grand pour que $d(x_m, x_*) < 2^{-n}$, puis trouver $x_n \in F_n$ tel que $d(x_n, x_m) < 2^{-n}$ via $d_H(F_n, F_m) < 2^{-n}$.

— Pour tout $x_n \in F_n$, il existe $x_* \in F_*$ tel que $d(x_n, x_*) < 2^{-n+1}$.
En effet, si $x_n \in F_n$, alors il existe $x_{n+1} \in F_{n+1}$ tel que $d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n}$, puis $x_{n+2} \in F_{n+2}$ tel que $d(x_{n+1}, x_{n+2}) < 2^{-n-1}$, etc. Par l'inégalité triangulaire, $(x_{n+m})_m$ est de Cauchy et donc $\lim_{m\to\infty} x_{n+m} = x_*$.
Par définition $x_* \in F_*$, et on a $d(x_n, x_*) < 2^{-n} + 2^{-n-1} + \cdots = 2^{-n+1}$.

On a donc $d_H(F_n, F_*) \leq 2^{-n+1} \to 0$ quand $n \to \infty$. Pour établir la complétude de $\mathcal{F}(X)$, il ne reste plus qu'à établir que F_* est fermé. C'est immédiat car si $x_*^{(n)} \in F_* \to x_*$, alors, comme ci-dessus, pour tout n il existe $x_n^{(n)} \in F_n$ tel que $d(x_n^{(n)}, x_*^{(n)}) \leq 2^{-n+1}$. Donc $x_n^{(n)} \to x_*$, et donc $x_* \in F_*$.

Il ne reste plus qu'à établir que F_* est compact si les F_n sont compacts. On procède comme suit :

— Soit $(x_*^{(n)})$ une suite de F_*. Soit $x_m^{(n)} \in F_m$ tel que $d(x_m^{(n)}, x_*^{(n)}) \leq 2^{-m+1}$, comme ci-dessus.

— La compacité de F_m et une extraction diagonale fournissent une sous-suite $(x_m^{(\varphi(n))})$ et $x_m^* \in F_m$ tels que $x_m^{(\varphi(n))} \to x_m^*$, pour tout m.

— La suite (x_m^*) est de Cauchy car pour tous $m' \geq m$,

$$d(x_{m'}^{(n)}, x_m^{(n)}) \leq 2^{-m'+1} + 2^{-m+1} \leq 2^{-m+2} \Rightarrow d(x_{m'}^*, x_m^*) \leq 2^{-m+2}.$$

— Comme X est complet, $\lim_{m\to\infty} x_m^* = x_*^*$. Note : $d(x_m^*, x_*^*) \leq 2^{-m+2}$, en particulier $x_*^* \in F_*$.

— Il reste à établir que les limites en n et m sont permutables : $x_*^{(\varphi(n))} \to x_*^*$. Cela découle du fait que $x_m^{(\varphi(n))} \to x_*^{(\varphi(n))}$ est uniforme en n. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe m tel que $2^{-m+3} < \varepsilon$, et $d(x_*^{(\varphi(n))}, x_*^*) \leq d(x_m^{(\varphi(n))}, x_m^*) + 2^{-m+1} + 2^{-m+2}$, or $d(x_m^{(\varphi(n))}, x_m^*) \leq 2^{-m+1}$ pour n assez grand.

□

On peut munir l'ensemble des espaces métriques compacts d'une métrique appelée distance de Gromov–Hausdorff : la distance entre deux espaces compacts X et Y est par définition l'infimum sur les espaces métriques Z de la distance dans $\mathcal{K}(Z)$ entre les plongements isométriques à X et Y dans Z. Elle intervient aussi bien pour l'étude des groupes que pour celle des graphes et surfaces aléatoires.

▲ compléments

Me 14/10

3.2 Espaces polonais, de Banach, de Hilbert

Définition 3.2.1. Espaces polonais, de Banach, de Hilbert.

Un espace topologique X est
— polonais[a] lorsqu'il est séparable et métrisable complet
— de Banach lorsque c'est un espace vectoriel (réel ou complexe) normé complet
— de Hilbert lorsque c'est un espace vectoriel (réel ou complexe) à produit scalaire complet

a. *«Abréviation que, pour rire, j'ai suggérée à N. Bourbaki en 1949 après avoir appris le sujet dans la Topologie de Casimir Kuratowski (Acad. des sciences de Varsovie, 1933, en français, réédité ... dans les années 1950) et constaté la contribution des Polonais ; j'aurais du reste aussi bien pu les appeler « polono-russes ». La plaisanterie, qui n'en était pas entièrement une, fut prise au sérieux et tous les experts ont depuis adopté cette étrange terminologie, généralement sans mentionner N. Bourbaki à l'exception de Kuratowski lui-même qui, dans un petit livre paru en 1974 sur l'histoire des mathématiques polonaises, y voit à juste titre un hommage à celles-ci. De même qu'on distingue les espaces métriques et métrisables, il faudrait distinguer les espaces polonais (dans lesquels une métrique complète est donnée) des espaces polonisables (dans lesquels une telle métrique existe).»* Roger Godement (1921 – 2016), in [19, p. 67].

Hilbert ⇒ Banach, Banach séparable ⇒ polonais, mais réciproques fausses.

Exemple 3.2.2. Espaces polonais, de Banach, de Hilbert.

— Le « cube de Hilbert » $[0,1]^\infty = [0,1]^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit et de la métrique $\max_n \min(d_n, 2^{-n})$ est polonais (la séparabilité a déjà été abordée, les suites de Cauchy sont de Cauchy sur chaque facteur, donc convergent sur chaque facteur, donc convergent). Ce n'est pas un espace vectoriel normé et encore moins un espace de Hilbert ! Un résultat important de la théorie descriptive des ensembles indique que tout espace polonais est homéomorphe à une partie G_δ (intersection dénombrable d'ouverts) du cube de Hilbert, et réciproquement toute partie G_δ du cube de Hilbert est un espace polonais. Les espaces polonais sont donc des espaces relativement petits (utile pour la théorie de la mesure). On prendra garde à ne pas confondre la topologie produit du cube de Hilbert avec la topologie trace de $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Dans cette dernière, les suites convergent ssi les suites marginales convergent uniformément.

— L'espace vectoriel normé $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$, $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, est complet, c'est donc un Banach, mais il n'est pas séparable, ce n'est donc pas un espace polonais. Pour le voir, si on note $e_I = \sum_{i\in I} e_i$ pour tout $I\subset\mathbb{N}$, et si $I,J\subset\mathbb{N}$ avec $I\neq J$, alors $\|e_I - e_J\|_\infty = 1$, donc $B(e_I,\frac{1}{2})\cap B(e_J,\frac{1}{2}) = \emptyset$, et donc $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est recouvert par une famille non dénombrable de boules disjointes car l'ensemble des $I\subset\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable. De même l'espace vectoriel normé $L^\infty([0,1],\mathbb{K})$ est complet donc de Banach, mais n'est pas séparable, pour essentiellement la même raison. Notons que l'argument utilisé pour ℓ^∞ ne fonctionne plus pour ℓ^p avec $p\in[1,\infty)$ car $e_I\in\ell^p$ impose que I soit fini, et l'ensemble des $I\subset\mathbb{N}$ finis est dénombrable.

— Pour tout $p\in[1,\infty)$, les espaces vectoriels normés $\mathbb{K}^n$, $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{K})$ et $L^p([0,1],\mathbb{K})$, équipés de $\|\cdot\|_p$, sont des Banach séparables, donc polonais, et des Hilbert ssi $p=2$ (pour $p\neq 2$ l'identité du parallélogramme est mise en défaut). La séparabilité de $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{K})$ s'obtient en considérant $A := \cup_n A_n$ avec $A_n := \{\sum_{i=0}^n q_i e_i : q\in\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}^{n+1}\}$, de sorte que pour tout $x\in\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{K})$ et $\varepsilon>0$, en notant $\pi_n(x) := \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $\|x-\pi_n(x)\|_p<\varepsilon$ pour n assez grand, puis $\|\pi_n(x)-y_n\|_p<\varepsilon$ pour un $y_n\in A_n$ par densité de $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$. Notons que pour ℓ^∞ l'argument d'approximation par une suite à support fini $\|x-\pi_n(x)\|_\infty<\varepsilon$ ne fonctionne plus et cela est relié au fait que l'adhérence dans ℓ^∞ de l'ensemble des suites à support fini est l'ensemble ℓ_0^∞ des suites nulles à l'infini, strictement plus petit que ℓ^∞. Au passage, on obtient que le sous-espace fermé ℓ_0^∞ de ℓ^∞ est séparable. Note : $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K}) = \mathcal{C}_b(\mathbb{N},\mathbb{K})$ et $\ell_0^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K}) = \mathcal{C}_0(\mathbb{N},\mathbb{K})$, où $\mathbb{N}$ est muni de la topologie discrète.

— L'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme est un Banach séparable donc polonais (densité des polynômes à coefficients rationnels via théorème de (Stone–)Weierstrass) mais n'est pas un espace de Hilbert (mise en défaut de l'identité du parallélogramme).

Remarque 3.2.3. Espaces localement compacts versus espaces polonais.

> « Le choix du cadre général dans lequel développer la théorie de la mesure abstraite n'est pas anodin. Traditionnellement, les ouvrages à tendance probabiliste (comme ceux de Billingsley) insistent sur la théorie des probabilités dans les espaces polonais (métriques séparables complets), tandis que ceux qui sont plus centrés sur l'analyse fonctionnelle, tout en recherchant une grande généralité, préfèrent le cadre localement compact, non nécessairement métrique (c'est le cas des ouvrages de Rudin, Halmos, Bourbaki, etc.). Ce dernier point de vue paraît aujourd'hui difficile à soutenir, étant donné le très faible nombre de personnes intéressées à faire de l'intégration dans des espaces localement compacts non Polonais, en regard de la quantité prodigieuse de personnes (dont beaucoup de non mathématiciens) qui utilisent la théorie de la mesure et de l'intégration dans des espaces polonais non localement compacts tels que l'espace de Wiener.
>
> C'est donc le point de vue des espaces polonais qui est ici développé prioritairement, et en particulier toutes les preuves seront effectuées dans un cadre métrique. J'ai cependant conservé les hypothèses de compacité locale, non nécessairement métrique, dans les énoncés où elles semblent naturelles, en particulier le théorème de Riesz. Les rappels nécessaires de topologie générale (lemme d'Urysohn, théorème de Tychonov) sont donc énoncés sans démonstration dans leur version générale, et démontrés dans le cadre métrique. J'ai tenté par là de satisfaire à la fois les lecteurs novices qui auront ainsi accès à des démonstrations complètes dans un cadre métrique séparable, sans avoir jamais à manipuler de topologie abstraite ; et les lecteurs amateurs de topologie, qui pourront facilement reconstituer les preuves d'énoncés plus abstraits. »
>
> Avant-propos du cours *Intégration et séries de Fourier*
> Cédric Villani, École normale de Lyon, 13 juin 2010.

Théorème 3.2.4. Caractérisation des espaces de Banach.

Un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ réel ou complexe est un espace de Banach ssi toute série absolument convergente converge dans X c'est-à-dire que $\sum_n \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_n x_n < \infty$.

Preuve. $\Rightarrow$. Si $\sum_n \|x_n\| < \infty$, le critère de Cauchy s'écrit $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=m}^{m+k} \|x_n\| = 0$ pour tout k, or $\|\sum_{n=m}^{m+k} x_n\| \leq \sum_{n=m}^{m+k} \|x_n\|$, donc $\sum_n x_n$ vérifie le critère de Cauchy, donc converge car X est complet.

$\Leftarrow$. Soit (y_n) de Cauchy. Donc pour tout n il existe $\varphi(n)$ tel que $p, q \geq \varphi(n)$ entraîne $\|y_p - y_q\| \leq 2^{-n}$. Posons à présent $x_n := y_{\varphi(n+1)} - y_{\varphi(n)}$, de sorte que $\sum_n \|x_n\| < \sum_n 2^{-n} < \infty$. Par hypothèse, cela donne $\sum_n x_n < \infty$, donc $y_{\varphi(n)}$ converge. Ainsi (y_n) admet une sous-suite convergente, et comme elle est de Cauchy, elle converge. □

3.3 Complétion

La complétion est à la complétude ce que la compactification est à la compacité.
On suppose ici déjà acquis le fait que $\mathbb{R}$ est complet, construit « à la main » comme complété de $\mathbb{Q}$.

Définition 3.3.1. Procédé de complétion d'un espace métrique.

Soit (X, d) un espace métrique non complet. Son complété (X', d') est un espace métrique complet tel que $X \subset X'$ (injection) et X est dense dans X'. On le construit comme suit :

- Soit $\widetilde{X}$ l'ensemble des suites de Cauchy de X (énorme ensemble, sous-ensemble de $X^{\mathbb{N}}$).
- On munit $\widetilde{X}$ de la relation d'équivalence suivante :
  $(x_n) \sim (y_n)$ ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N_\varepsilon$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, y_n) < \varepsilon$.
- On considère l'ensemble quotient $X' := \widetilde{X}/\sim$. Si (x_n) et (y_n) sont de Cauchy alors $d(x_n, y_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet, et la quantité

$$d'((x_n),(y_n)) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

  est bien définie et ne dépend que de la classe d'équivalence de (x_n) et (y_n) dans X'. On peut vérifier que cela définit une métrique sur X'.
- À chaque point $x \in X$, on peut associer la suite de Cauchy triviale constante et égale à x, ce qui permet de concevoir X comme isométrique à un sous-espace topologique naturel de X'.
- X est dense dans X' car si $x = [(x_n)] \in X'$ alors on peut considérer la suite $(x^{(n)})$ de suites de Cauchy dans X telle que pour tout n, $x^{(n)}$ est constante et égale à x_n.
- Montrons que X' est complet. Soit $([x^{(n)}])$ de Cauchy dans X'. Par définition, pour tout n, $x^{(n)} = (x_p^{(n)})_p$ est une suite de X. Pour établir qu'une suite de Cauchy converge, il suffit d'établir qu'elle possède une sous-suite convergente. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $d'(x^{(n)}, x^{(n+1)}) < 2^{-n}$ pour tout n. En utilisant la définition de d' et le fait que $(x_p^{(n)})_p$ est de Cauchy dans X, on peut trouver $m_{-1} := 0 < m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$ tels que

$$d(x_p^{(n)}, x_p^{(n+1)}) \leq 2^{-n} \quad \text{et} \quad d(x_p^{(n)}, x_q^{(n)}) \leq 2^{-n}, \text{ pour tous } q \geq p \geq m_n.$$

  Définissons à présent la suite[a] (x_p^*) par $x_p^* := x_p^{(n)}$ si $m_{n-1} \leq p < m_n$. Donc pour tout k,

$$d(x_p^*, x_p^{(n)}) = d(x_p^{(n+k+1)}, x_p^{(n)}) \leq d(x_p^{(n+k+1)}, x_p^{(n+k)}) + \cdots + d(x_p^{(n+1)}, x_p^{(n)}) \leq 2^{-n+1}$$

  si $m_{n+k} \leq p < m_{n+k+1}$, et donc, pour tous $q \geq p \geq m_n$,

$$d(x_p^*, x_q^*) \leq d(x_p^*, x_p^{(n)}) + d(x_p^{(n)}, x_q^{(n)}) + d(x_q^{(n)}, x_q^*) \leq 2^{-n+1} + 2^{-n} + 2^{-n+1} = 5 \times 2^{-n}.$$

  Donc (x_p^*) est de Cauchy dans X, et donc $x^{(n)} \to x^*$ dans X'.

a. Procédé diagonal par blocs en quelque sorte, pas surprenant dans ce contexte de suite de suites de Cauchy !

Remarque 3.3.2. Caractérisation du complété.

Si X'' est complet tel que $X \subset X''$ et X est dense dans X'' alors X'' est isométrique au complété X' de X construit ci-dessus. En effet, comme toute suite de Cauchy dans X a une limite dans X'', cela définit une inclusion isométrique $i : X' \to X''$. D'un autre côté, comme X est dense dans X'', chaque point de X'' est une limite dans X'' de points de X, donc $i(X') = X''$. En particulier, le complété de $A \subset X$ dans X complet est $\overline{A}$, car A est dense dans $\overline{A}$ et $\overline{A}$ est complet car fermé dans X complet.

Exemple 3.3.3. Complétés.

- Soit $\ell_c(\mathbb{N},\mathbb{K}) \subsetneq \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K}) \subsetneq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ à support fini. Notons que $\ell_c(\mathbb{N},\mathbb{K}) = \mathcal{C}_c(\mathbb{N},\mathbb{K})$ où $\mathbb{N}$ est muni de la topologie discrète, dont les compact sont les parties finies. Pour tout $p \in [1,\infty)$, son complété pour la norme $\|\cdot\|_p$ est $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{K})$: suites réelles (x_n) telles que $\sum_n |x_n|^p < \infty$, la densité de ℓ_c dans ℓ^p est immédiate.
- Le complété de ℓ_c pour $\|\cdot\|_\infty$, noté ℓ_0^∞, est formé par les suites réelles nulles à l'infini :

$$\ell_0^\infty := \left\{(x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}.$$

  On observe que ℓ_0^∞ est strictement plus petit que l'ensemble $\ell^\infty = \{(x_n) : \|(x_n)\|_\infty < \infty\}$ des suites réelles bornées. Malgré tout l'espace vectoriel ℓ^∞ normé par $\|\cdot\|_\infty$ est complet.
- Pour tout $p \in [1,\infty)$, le complété de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ pour la norme

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

  est l'espace de Lebesgue $L^p([0,1],\mathbb{R})$. L'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ équipé de la norme $\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ est déjà complet. Notons par ailleurs que $L^\infty([0,1],\mathbb{R})$ est complet.
- Soit X un espace complet et soit $\mathcal{K}_0(X)$ l'ensemble de ses parties finies non vide. Il se trouve que le complété de $\mathcal{K}_0(X)$ pour la distance de Hausdorff d_H est $\mathcal{K}(X)$, l'ensemble des parties compactes non vides de X, cf. théorème 3.1.11. Cela donne corps à l'idée intuitive selon laquelle les parties compactes sont des généralisations topologiques des parties finies.
- Le complété de $\mathbb{Q}$ pour la distance usuelle $|\cdot|$ est l'espace usuel $\mathbb{R}$. Le complété de $\mathbb{Q}$ pour la métrique p-adique $|\cdot|_p$ introduite dans d'exemple 1.1.6 est l'espace métrique $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques, identifiable aux séries formelles $\sum_{n=m}^\infty a_n p^n$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \{0,1,\dots,p-1\}$.

Lemme 3.3.4. Prolongement au complété de fonctions uniformément continues.

Si $f : X \to Y$ est uniformément continue et Y est complet alors il existe une unique fonction continue $f' : X' \to Y$ telle que $f'|_X = f$ où X' est le complété de X.

Preuve. Si $x := (x_n)$ est une suite de Cauchy dans X, alors la continuité uniforme de f implique que $(f(x_n))$ est de Cauchy dans Y, qui est complet, donc elle converge vers une limite, notée $f(x)$, qui ne dépend que de la classe $[x]$ de x dans $X' = \widetilde{X}/\sim$, où $\widetilde{X}$ désigne l'ensemble des suites de Cauchy de X. Ceci permet de définir $f' : X' \to Y$ par $f'([x]) := f(x)$. La continuité uniforme de f' découle de la continuité uniforme de f. □

3.4 Théorème de Baire pour les espaces complets

Théorème 3.4.1. de Baire pour les espaces complets.

Si X est complet alors il est de Baire : toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense, autrement dit toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide :

$$\forall n,\ \overline{O_n} = X \quad\Rightarrow\quad \overline{\cap_n O_n} = X \qquad \text{ou} \qquad \forall n,\ \mathring{F_n} = \varnothing \quad\Rightarrow\quad \mathring{\cup_n F_n} = \varnothing.$$

Voir le théorème 2.6.4 pour une version pour les espaces quasi-compacts séparés pas forcément métrisables[3].

3. Pour les liens avec (les formes faibles de) l'axiome du choix, on pourra consulter par exemple [46]. Le théorème de Baire a de nombreuses

Preuve. Soit O_n ouvert dense pour tout n. Montrons que $\cap_n O_n$ est dense. Il suffit d'établir que pour tout ouvert non vide $O \subset X$, on a $O \cap (\cap_n O_n) \neq \varnothing$. Comme O_0 est dense, $O \cap O_0 \neq \varnothing$, et comme $O \cap O_0$ est ouvert et X métrique, il existe un fermé $F_0 := \overline{B(x_0, r_0)} \subset O \cap O_0, r_0 > 0$. Similairement, comme O_1 est dense et ouvert, il existe un fermé $F_1 := \overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_0, \frac{1}{2}r_0)$ tel que $F_1 \subset B(x_0, r_0) \cap O \cap O_0 \cap O_1$. En itérant cette construction, on obtient une suite de fermés (F_n) telle que

$$F_n \supset F_{n+1}, \quad F_n \subset O \cap (\cap_{k=0}^{n} O_k), \quad \operatorname{diam}(F_n) \leq 2^{1-n} r_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Comme X est complet, le lemme 3.1.5 donne $\cap_n F_n \neq \varnothing$, d'où $O \cap (\cap_n O_n) \supset \cap_n F_n \neq \varnothing$. □

Remarque 3.4.2. Ensembles maigres.

On dit que $A \subset X$ est maigre si $A \subset \cup_n F_n$ où les F_n sont fermés d'intérieur vide ce qui fait sens intuitivement, autrement dit $X \setminus A \supset \cap_n O_n$ où les O_n sont des ouverts denses. De ce point de vue, le théorème de Baire affirme que le complémentaire d'un ensemble maigre est dense.

Remarque 3.4.3. Généricité.

Le théorème de Baire suggère, dans les espaces métriques complets, de qualifier une propriété de générique lorsqu'elle est vérifiée sauf sur un ensemble maigre. C'est une sorte d'analogue topologique du presque partout de la théorie de la mesure, en particulier du presque sûrement de la théorie des probabilités. Rappelons qu'une réunion dénombrable d'ensembles mesurables de mesure nulle est de mesure nulle. Lorsqu'une propriété est trop difficile voire impossible à démontrer partout, on peut envisager la généricité, transformer le négatif d'un échec en un théorème positif.

Exemple 3.4.4. Application du théorème de Baire à la dérivabilité.

L'ensemble $\{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) : \exists x \in [0,1] : f \text{ est dérivable en } x\}$ est maigre.
Donc l'ensemble des fonctions dérivables nulle part est dense dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $n \geq 1$, posons

$$F_n := \{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) : \exists x \in [0,1], \forall y \in [0,1], |f(y) - f(x)| \leq n|x - y|\}.$$

Si f est dérivable en x alors $y \mapsto |f(y) - f(x)|/|y - x|$ est continue, donc $f \in F_n$ si $n \geq \max_{y\in[0,1]} |f(y) - f(x)|/|y - x|$. Montrons que F_n est fermé. Si $f_m \in F_n \to f$ dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, soit $x_m \in [0,1]$ les points fournis par la définition de F_n. Comme $[0,1]$ est séquentiellement compact, il existe une sous-suite convergente $x_{\varphi(m)} \to x_*$ dans $[0,1]$. À présent, en utilisant la propriété des $x_{\varphi(m)}$,

$$\begin{aligned} |f_{\varphi(m)}(y) - f_{\varphi(m)}(x_*)| &\leq |f_{\varphi(m)}(y) - f_{\varphi(m)}(x_{\varphi(m)})| + |f_{\varphi(m)}(x_*) - f_{\varphi(m)}(x_{\varphi(m)})| \\ &\leq n(|y - x_{\varphi(m)}| + |x_* - x_{\varphi(m)}|) \to n|y - x_*|. \end{aligned}$$

Donc $|f(y) - f(x_*)| \leq n|y - x_*|$, et donc $f \in F_n$. Montrons que F_n est d'intérieur vide. Tout ouvert O de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ contient une fonction linéaire par morceaux g. Soit $B(g, r) \subset O$, et soit $M < \infty$ la valeur maximale de la valeur absolue de la dérivée de g. Considérons la fonction linéaire par morceaux

$$\widetilde{g}(x) := g(x) + r\varphi((M + n + 1)xr^{-1})$$

où $\varphi : \mathbb{R} \to [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est définie par $\varphi(x) := \int_0^x (\mathbf{1}_{[0,1/2]} - \mathbf{1}_{(1/2,1]})\,\mathrm{d}t$, de sorte que $\|\varphi\|_\infty \leq 1/2$ et $|\varphi'| = 1$. Maintenant $\tilde{g} \in B(g, r)$, mais d'autre part $\widetilde{g}$ ne peut pas appartenir à F_n, car en chaque point de $[0,1]$, la valeur absolue de sa dérivée dépasse $n + 1$. Donc $O \not\subset F_n$.

▾ compléments

Remarque 3.4.5. Nombres de Liouville et subtilités des généricités.

Un réel x est un nombre de Liouville quand pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une infinité de dénominateurs $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $0 < |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^m}$ pour un certain $p = p(q)$. On montre que les nombres de Liouville

conséquences, dans ce cours le théorème 6.2.1 de Banach–Steinhaus et le théorème 6.4.1 de Banach–Schauder.

sont irrationnels, par construction bien approchés par des rationnels. Leur ensemble est

$$L := \bigcap_{m,n\in\mathbb{N}} U_n^{(m)} \quad \text{où} \quad U_n^{(m)} := \bigcup_{q>n, p\in\mathbb{Z}} \Big((\tfrac{p}{q} - \tfrac{1}{q^m}, \tfrac{p}{q} + \tfrac{1}{q^m}) \setminus \{\tfrac{p}{q}\} \Big).$$

— $\mathbb{R} \setminus L = \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} F_n^{(m)}$ où $F_n^{(m)} := \mathbb{R} \setminus U_n^{(m)}$, est maigre, car chaque $U_n^{(m)}$ est un ouvert dense.
— D'un autre côté, L est de mesure de Lebesgue zéro pour $m \geq 3$, en effet

$$\mathrm{Leb}(U_n^{(m)} \cap [0,1]) \leq 2 \sum_{q>n} q^{1-m} = O(n^{2-m}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi $\mathbb{R} = L \cup (\mathbb{R} \setminus L)$ est une partition de $\mathbb{R}$ en un ensemble de mesure de Lebesgue nulle et un ensemble maigre. Chacun d'eux est négligeable à sa façon : au sens de la mesure pour le premier et au sens de la topologie pour le second. Cela souligne les subtilités des notions de généricité.

▲ compléments

Chapitre 4

Connexité

Lu 19/10

Pour aller plus loin : [38], [16], [41], [36], [29], et en anglais [9, 8, 18].

4.1 Connexité, connexité par arc, composantes connexes, espaces totalement discontinus

Définition 4.1.1. Connexité et connexité par arc.

Un espace topologique X est
- connexe lorsque l'espace n'est pas partitionnable par deux ouverts non vides :
  si $X = O \cup O'$ avec $O \cap O' = \emptyset$ alors $O = \emptyset$ ou $O' = \emptyset$
- connexe par arcs lorsque les points de l'espace sont reliés par des arcs :
  pour tous $x_0, x_1 \in X$, il existe $\gamma : [0,1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$.

Une partie $A \subset X$ est connexe / par arcs lorsqu'elle l'est en tant que sous-espace topologique.

Exemple 4.1.2. Espaces connexes.

- Le segment $[0,1]$ est connexe. En effet, soit $O \subset [0,1]$ ouvert et fermé tel que $0 \in O$, et soit $x_* := \sup\{x \in [0,1] : [0,x] \subset O\}$. Comme O est fermé, on doit avoir $x_* \in O$. Si $x_* < 1$ alors on obtient une contradiction vers le fait que O est ouvert. Donc $x_* = 1$.
- Le segment $[0,1]$ et $\mathbb{R}^n$ sont connexes par arcs car on peut prendre $\gamma(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$.
- Dans $\mathbb{R}$ les parties $A \subset \mathbb{R}$ connexes sont les intervalles finis ou infinis qui sont ouverts, fermés, ou semi-ouverts/fermés. En effet, d'une part on sait que les intervalles sont connexes, cf. ci-dessus, et réciproquement, si $A \subset \mathbb{R}$ est connexe avec $x_0, x_1 \in A$ et $x \notin A$ pour un certain $x \in (x_0, x_1)$ alors $O_0 := (-\infty, x) \cap A$ et $O_1 := (x, +\infty) \cap A$ contredisent la connexité de A.

Théorème 4.1.3. Propriétés de base.

(i) X est connexe ssi $\emptyset$ et X sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées (ofs).

(ii) X est connexe ssi X n'est pas partitionnable en deux fermés disjoints non vides.

(iii) X est connexe ssi $f : X \to \{0,1\}$ continue implique f constante.

(iv) Si $f : X \to Y$ est continue et X connexe (resp. par arc), alors $f(X)$ est connexe (resp. par arcs).

(v) Si X est connexe par arcs alors il est connexe, et la réciproque est fausse.

(vi) Si $\cap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ avec A_i connexes (resp. par arcs) alors $\cup_{i\in I} A_i$ est connexe (resp. par arcs).

(vii) Si X_i est connexe (resp. par arcs) pour tout $i \in I$ alors $\prod_{i\in I} X_i$ est connexe (resp. par arcs).

Preuve.

(i) Si X est connexe et s'il existe $A \subset X$ à la fois ouvert et fermé distinct de $\emptyset$ et X, alors c'est aussi le cas de $X \setminus A$, et $X = A \cup (X \setminus A)$ ce qui contredit la connexité. Réciproquement, si X n'est pas connexe, alors $X = O \cup O'$ avec O, O' ouverts non vides disjoints. Or $O = X \setminus O'$ et $O' = X \setminus O$ sont fermés, donc O et O' sont à la fois ouverts, fermés, et distincts de $\emptyset$ et X.

(ii) Si X n'est pas connexe alors $X = O \cup O'$ avec O, O' ouverts disjoints non vides, alors $O = X \setminus O'$ et $O' = X \setminus O$ sont fermés disjoints non vides. Réciproquement, si $X = F \cup F'$ avec F, F' fermés disjoints non vides alors $F = X \setminus F'$ et $F' = X \setminus F$ sont ouverts disjoints non vides.

(iii) Si $f : X \to \{0,1\}$ est continue, alors X est l'union des ouverts (et fermés) disjoints $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$, qui sont tous deux non vides ssi f n'est pas constante. Réciproquement, de toute partition de X en deux ouverts disjoints non vides, on tire une fonction continue non constante de ce type (indicatrice !).

(iv) *Connexité.* Si $f(X) = O \cup O'$ avec O et O' ouverts dans la topologie trace sur $f(X)$ tels que $O \neq \emptyset$, $O' \neq \emptyset$, $O \cap O' = \emptyset$, alors $f^{-1}(O)$ et $f^{-1}(O')$ vérifient les mêmes conditions pour X, impossible.
Connexité par arcs. Soit $y_0, y_1 \in f(X)$. Soit $x_0, x_1 \in X$ tel que $f(x_i) = y_i$. Soit $\gamma : [0,1] \to X$ continue telle que $\gamma(i) = x_i$. Alors $f \circ \gamma : [0,1] \to f(X)$ est continue et vérifie $(f \circ \gamma)(i) = y_i$.

(v) Par l'absurde : supposons que X est connexe par arcs mais pas connexe. Soit donc $X = O_0 \cup O_1$ avec O_0, O_1 ouverts (et fermés) non vides disjoints. Soit $x_i \in O_i$ et $\gamma : [0,1] \to X$ continue telle que $\gamma(i) = x_i$. Alors en considérant les ouverts $O_i \cap \gamma([0,1])$ il vient que $\gamma([0,1])$ n'est pas connexe dans X, ce qui contredit la stabilité de la connexité par image continue (item précédent). Contre-exemple pour réciproque :

— **Sinus du topologue.** Dans $X = \mathbb{R}^2$, $A := \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x > 0\} \cup \{(0,y) : y \in [-1,1]\}$, cf. figure 4.1. Alors A est connexe en vertu de la caractérisation de la connexité dans les espaces métriques (théorème 4.2.2). En revanche A n'est pas connexe par arcs car si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ est continue avec par exemple $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = (1/\pi, 0)$ alors elle est uniformément continue et elle ne peut donc pas osciller une infinité de fois entre les droites horizontales $y = \pm 1$.

(vi) *Connexité.* Par l'absurde : supposons que $A := \cup_{i \in I} A_i = (O \cup O') \cap A$ où $O \cap A$ et $O' \cap A$ sont deux ouverts disjoints non vides de la topologie trace. Soit $x \in \cap_{i \in I} A_i$. On peut supposer sans perte que $x \in O$. Comme A_i est connexe et rencontre $O \cap A$ en x, il est donc contenu dans O, d'où $A \subset O \cap A$, contradiction.
Connexité par arcs. Soient $x, y \in \cup_{i \in I} A_i$, $x \in A_j$ et $y \in A_k$, et $z \in A_j \cap A_k \supset \cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Il suffit de concaténer les arcs entre x et z puis z et y fournis par la connnexité par arcs de A_j et A_k.

(vii) *Connexité.* Considérons d'abord le cas d'un produit de deux facteurs : $I = \{0,1\}$. Soit $x_0 \in X_0$. L'ensemble « en croix » $C_{x_0,x_1} := \{(x_0', x_1') : x_0' = x_0 \text{ ou } x_1' = x_1\}$ est une réunion de parties connexes dont l'intersection est non vide, il est donc connexe par l'item précédent. Ensuite, comme $X_0 \times X_1 = \cup_{x_1 \in X_1} C_{x_0,x_1}$ et que ces ensembles en croix sont connexes et ont une intersection non vide, leur réunion est connexe d'après l'item précédent. Par récurrence, ceci montre qu'un produit fini d'espaces connexes est connexe. Considérons le cas où I est infini, et où $X := \prod_{i \in I} X_i = O \cup O'$ avec O, O' ouverts non vides disjoints. Comme les cylindres forment une base de la topologie produit, les ouverts O et O' contiennent chacun un cylindre, il en découle qu'il existe $x \in O$ et $x' \in O'$ tels que $J := \{i \in I : x_i \neq x_i'\}$ est fini. À présent le sous-espace $H := \{y \in X : y_i = x_i, i \notin J\}$ (égal à $\prod_{i \in I} Y_i$ avec $Y_i = \{x_i\}$ si $i \notin J$ et $Y_i = X_i$ si $i \in J$) est connexe, car homéomorphe à un produit fini d'espaces connexes. Or $O \cap H$ et $O' \cap H$ sont ouverts disjoints dans H, non vides (car contenant respectivement x et x'), contradiction.
Connexité par arcs. Rappelons que la continuité d'une fonction réelle définie sur un espace produit est équivalente à la continuité de toutes les coordonnées. Si $x^{(0)}$ et $x^{(1)} \in X$ et si pour tout $i \in I$, $\gamma_i : [0,1] \to X_i$ est continue et relie $x_i^{(0)}$ à $x_i^{(1)}$ alors $\gamma : [0,1] \to X$ dont les applications coordonnées sont les γ_i est continue par définition de la topologie produit et relie $x^{(0)}$ à $x^{(1)}$.

□

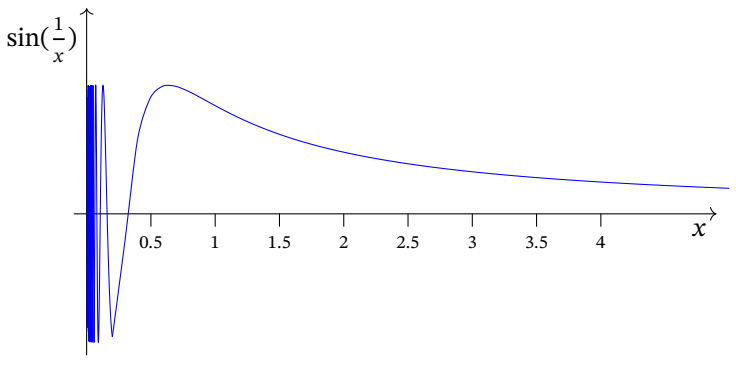


FIGURE 4.1 – Sinus du topologue.

La définition suivante fait sens en raison du (v) du théorème 4.1.3.

Définition 4.1.4. Composantes connexes et espaces totalement discontinus.

La composante connexe C_x de $x \in X$ est la plus grande partie connexe de X contenant x.
Un espace topologique X est totalement discontinu si $C_x = \{x\}$ pour tout $x \in X$.

— Les composantes connexes sont les classes d'équivalence de $x \sim y$ ssi $x, y \in A \subset X$ avec A connexe.
— Les composantes connexes sont fermées. En effet, si une partie $A \subset X$ est connexe alors son adhérence $\overline{A}$ l'est aussi, car si $\overline{A} = (O \cup O') \cap \overline{A}$ avec O, O' ouverts disjoints à trace non vide, la connexité de A donne $A \cap O = \varnothing$ ou $A \cap O' = \varnothing$, ce qui donne $\overline{A} \cap O = \varnothing$ ou $\overline{A} \cap O' = \varnothing$. Note : $A \cap O = \varnothing$ est équivalent à $A \subset O^c$, d'où $\overline{A} \subset O^c$ car O^c est fermé, d'où $\overline{A} \cap O = \varnothing$.
— X est réunion d'ensembles fermés disjoints (les composantes connexes de X).
X est connexe ssi il n'a qu'une seule composante connexe.
— Si $x \in A \subset X$ et A est à la fois ouvert et fermé alors $C_x \subset A$, car sinon $C_x \cap A$ et $C_x \cap A^c$ serait une partition par des ouverts. Mais en général C_x n'est pas ouvert.
Par exemple les composantes connexes de $(0,1) \cup (1,2)$ sont $(0,1)$ et $(1,2)$, qui sont à la fois ouvertes et fermées, tandis que les composantes connexes de $\{0\} \cup \{1/n \ : \ n \geq 1\}$ sont le singleton $\{0\}$ qui est fermé mais pas ouvert, et les singletons $\{1/n\}$, $n \geq 1$, qui sont fermés et ouverts.

Un exemple immédiat d'espace totalement discontinu est fourni par la topologie discrète sur X.

Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide est totalement discontinue, car elle ne contient aucun intervalle alors que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. En particulier, toute partie non vide de $\mathbb{R}$ dont l'intérieur de l'adhérence est vide (ensemble nulle part dense) est totalement discontinue, c'est le cas par exemple de l'ensemble triadique de Cantor.

Pour tout nombre premier p, l'ensemble $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques est totalement discontinu.

4.2 Connexité dans les espaces métriques et espaces bien enchaînés

Définition 4.2.1. Espaces bien enchaînés.

Un espace métrique (X, d) est bien enchaîné lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $x, y \in X$ il existe une suite finie $x =: x_0, x_1, \dots, x_n := y$ dans X telle que $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pour tout i.

Théorème 4.2.2. Connexité et chaînage.

(i) Si (X, d) est connexe alors X est bien enchaîné et la réciproque est fausse.
(ii) Si (X, d) est compact et bien enchaîné alors X est connexe.

Preuve.

(i) Soit $\varepsilon > 0$ et $x, y \in X$. Soit $O := \{z \ : \ z \text{ est connecté à } x \text{ par une } \varepsilon\text{-chaîne}\}$, et $O' := X \setminus O$. Montrons que O et O' sont ouverts. Si $w \in O$ alors $B(w, \varepsilon) \subset O$ car on peut ajouter un maillon à la chaîne reliant x à w. De même, si $w \in O'$ alors $B(w, \varepsilon) \subset O'$ car sinon il existerait $t \in B(w, \varepsilon)$ tel que t est ε-connecté à x et on pourrait ajouter un maillon de t à w. Enfin comme X est connexe et $O \neq \varnothing$, on a $O' = \varnothing$.

(ii) Supposons par l'absurde que X n'est pas connexe : $X = O \cup O'$ avec O, O' ouverts non vides disjoints. Comme O et O' sont aussi fermés, dans X compact, ils sont compacts, d'où en particulier

$$d(O, O') = \inf_{(x,x') \in O \times O'} d(x, x') = \min_{(x,x') \in O \times O'} d(x, x') > 0,$$

et en particulier $x \in O$ et $x' \in O'$ ne peuvent pas être reliés par une ε-chaîne dès que $\varepsilon < d(O, O')$.

Contre-exemples pour la réciproque :
— $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est bien enchaîné, ouvert, mais pas connexe ni compact (mais localement compact).
— $\{(x, y) \ : \ x|y| \geq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ est bien enchaîné, fermé, mais pas connexe ni compact.

□

Remarque 4.2.3. Raisonnement par connexité.

La preuve du (i) du théorème 4.2.2 est un exemple de raisonnement par connexité. Pour démontrer qu'une propriété $P(x)$ a lieu pour tout $x \in X$, il suffit de munir X d'une topologie telle que X est connexe et $V_P := \{x : P(x) \text{ est vraie}\}$ est à la fois non vide, ouvert, et fermé, de sorte que $V_P = X$. C'est ce qui est fait pour l'inégalité des accroissements finis par exemple (lemme 8.2.1), ainsi que pour les solutions maximales d'équations différentielles ordinaires (chapitre 9, page 90).

Chapitre 5

Espaces de fonctions continues sur un métrique compact

Pour aller plus loin : [38], [16], [41], [36], [29], et en anglais [9, 8, 18].

Dans tout ce chapitre, (K, d_K) est un espace métrique compact et (Y, d_Y) est un espace métrique.
Ce chapitre fait appel aux notions de convergence et de continuité uniforme, et comporte deux parties :
— Arzelà–Ascoli : caractérisation des parties à adhérence compacte de $\mathcal{C}(K, Y)$.
— Stone–Weierstrass : condition suffisante sur une sous-algèbre pour sa densité dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.
Ces deux théorèmes sont incontournables. Dans ce cours, ils interviennent (ensemble!) dans la preuve du théorème de Cauchy–Peano (théorème 9.1.3) d'existence de solution des équations différentielles ordinaires.

Rappelons que l'ensemble $\mathcal{C}(K, Y)$ des fonctions $K \to Y$ continues est métrique pour

$$d_{\mathcal{C}(K,Y)}(f, g) := \sup_{x\in K} d_Y(f(x), g(x)) = \max_{x\in K} d_Y(f(x), g(x)).$$

— Si Y est complet[1] alors $\mathcal{C}(K, Y)$ est complet (théorème 3.1.9).
— Si Y est un Banach alors $\mathcal{C}(K, Y)$ est un Banach pour $\|f\|_{\mathcal{C}(K,Y)} = \max_{x\in K} \|f(x)\|_Y$.
— Si $Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ alors le Banach $\mathcal{C}(K, Y)$ est stable par produit et $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$.
On dit que c'est une algèbre de Banach, en l'occurrence commutative et unitaire car $1 \in \mathcal{C}(K, Y)$.

5.1 Théorème de Dini et théorème de Heine

Pour une suite (f_n) dans $\mathcal{C}(K, Y)$ et f dans $\mathcal{C}(K, Y)$, on dit que
— $f_n \to f$ ponctuellement lorsque pour tout $x \in K$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.
— $f_n \to f$ uniformément lorsque $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}(K, Y)$.
La convergence uniforme implique la convergence ponctuelle mais la réciproque est fausse en général.

Théorème 5.1.1. de Dini.

Si $Y = \mathbb{R}$ et (f_n) dans $\mathcal{C}(K, Y)$ croissante : $f_0 \leq f_1 \leq \cdots$,
alors $f_n \to f$ ponctuellement avec f continue implique $f_n \to f$ uniformément.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, et $O_n := \{x \in K : f_n(x) > f(x) - \varepsilon\} \subset O_{n+1}$. Comme f et f_n sont continues, O_n est ouvert, et $\cup_n O_n = K$. Comme K est compact, il existe n tel que $K = O_n$. □

Théorème 5.1.2. de Heine.

Toute fonction $f \in \mathcal{C}(K, Y)$ est uniformément continue :
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, pour tous $x, y \in K$, si $d_K(x, y) < \eta$ alors $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue, pour tout $x \in K$, il existe $\eta(x) > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, \eta(x))$, $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Comme $K \subset \cup_{x\in K} B(x, \frac{1}{2}\eta(x))$, le compact K est recouvert par un nombre fini de boules $B(x_1, \frac{1}{2}\eta(x_1)), \ldots, B(x_n, \frac{1}{2}\eta(x_n))$. Soit $\eta := \min_{1\leq i\leq n} \eta(x_i) > 0$. Pour tous $x, y \in K$, il existe x_i tel que $x \in B(x_i, \frac{1}{2}\eta(x_i))$ et donc si $d_K(x, y) < \frac{1}{2}\eta$, alors $d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f(y)) < 2\varepsilon$. □

1. En général $\cup_{f\in\mathcal{C}(K,Y)} f(K) = Y$, et on pourrait être tenté de croire que comme les $f(K)$ sont compacts comme images continues du compact K, alors Y est automatiquement complet car la complétude est une propriété locale. Or une réunion quelconque de compacts n'est pas forcément complète, comme le montrent les exemples $\mathbb{Q} = \cup_{x\in\mathbb{Q}}[x, x]$ et $(0, 1] = \cup_{n\geq 1}[1/n, 1]$. Ceci montre au passage qu'un espace métrique localement compact n'est pas forcément complet (mais on peut montrer qu'on peut déformer la métrique sans changer la topologie pour obtenir une métrique pour laquelle il est complet). D'autre part, il existe des espaces séparés (localement) compacts non métrisables comme $[0, 1]^S$ avec S non dénombrable.

5.2 Théorème d'Arzelà–Ascoli [2]

Me 21/10

Les compacts sont caractérisés par la propriété de Borel–Lebesgue, et, dans les espaces métriques, par la propriété de Bolzano–Weierstrass (théorème 2.3.2) d'extraction de sous-suite convergente. Dans $\mathbb{R}^n$, les compacts sont les fermés bornés. Quid d'un espace de dimension infinie comme $\mathcal{C}(K,Y)$? Le théorème d'Arzelà–Ascoli fournit une caractérisation des parties relativement compactes de cet espace fonctionnel. Le théorème d'Arzelà–Ascoli possède diverses variantes et extensions développées pour l'analyse fonctionnelle.

Théorème 5.2.1. d'Arzelà–Ascoli.

$A \subset \mathcal{C}(K,Y)$ a une adhérence compacte ssi les deux conditions suivantes sont réalisées :

(a) **compacité ponctuelle :** $\forall x \in K, \{f(x) : f \in A\}$ a une adhérence compacte dans Y.

(b) **équicontinuité :** la famille A est uniformément équicontinue : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $f \in A$ et tous $x, y \in K$, si $d_K(x,y) < \eta$ alors $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Exemple 5.2.2. L'espace $\mathbb{R}^n$ et ses fermés bornés comme cas particulier.

Lorsque $K = \{1, \dots, n\}$ muni de la topologie discrète métrisée par la distance atomique $d_K(x,y) = \mathbf{1}_{x \neq y}$, et $Y = \mathbb{R}$, alors $\mathcal{C}(K,Y) \equiv \mathbb{R}^n$, et (a) signifie la bornitude de A, tandis que (b) est triviale, et on retrouve la caractérisation des parties relativement compactes de $\mathbb{R}^n$ par la bornitude.

Exemple 5.2.3. Partie compacte de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Pour tout $M > 0$, l'ensemble fermé de fonctions Lipschitz suivant est compact dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$:

$$A_M := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \text{ pour tous } x, y \text{ et } |f(0)| \leq M\}.$$

Preuve. $\Rightarrow$. Supposons que $\overline{A}$ est compact. Alors (a) découle du fait que pour tout $x \in K$, $\varphi : f \mapsto f(x)$ est continue, et comme $\overline{A}$ est compact, $\varphi(\overline{A}) = \{f(x) : f \in \overline{A}\}$ est compact dans Y. De plus $\{f(x) : f \in A\} \subset \{f(x) : f \in \overline{A}\}$ donc $\overline{\{f(x) : f \in A\}}$ est fermé dans un compact donc compact.

Démontrons à présent (b). Soit $\varepsilon > 0$. Par compacité de $\overline{A}$, il existe $f_1, \dots, f_N \in \overline{A}$ telles que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\mathcal{C}(K,Y)}(f_i, \varepsilon).$$

D'après le théorème de Heine, chaque f_i est uniformément continue sur le compact K. Comme ces fonctions sont en nombre fini, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout i et tous $x, y \in K$, si $d_K(x,y) < \eta$, alors $d_Y(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$. Pour $f \in A$, choisissons i tel que $d_{\mathcal{C}(K,Y)}(f, f_i) < \varepsilon$. Alors, dès que $d_K(x,y) < \eta$,

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f_i(x)) + d_Y(f_i(x), f_i(y)) + d_Y(f_i(y), f(y)) < 3\varepsilon,$$

et A est uniformément équicontinue.

$\Leftarrow$. Par le théorème 3.1.6, il suffit d'établir que $\overline{A}$ est complet et que A (et donc $\overline{A}$) est pré-compact (possède un ε-réseau pour tout $\varepsilon > 0$).

Montrons que A est pré-compact. Soit $\varepsilon > 0$, et $\eta > 0$ fourni par (b). Comme K est compact, il est pré-compact : $K = \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \eta)$. Pour tout i, $A_{x_i} := \{f(x_i) : f \in A\}$ est à adhérence compacte par (a) et donc le produit $\prod_{i=1}^{n} \overline{A_{x_i}}$ est compact. L'adhérence de $\{(f(x_i))_{1 \leq i \leq n} : f \in A\} \subset \prod_{i=1}^{n} \overline{A_{x_i}}$ est compacte donc admet un $\varepsilon/2$-réseau. En bougeant les centres des boules situées sur l'adhérence (de moins de $\varepsilon/2$), on en déduit un ε-réseau de $\{(f(x_i))_{1 \leq i \leq n} : f \in A\}$. Par conséquent, il existe $f_1, \dots, f_m \in A$ tels que

$$\{(f(x_i))_{1 \leq i \leq n} : f \in A\} \subset \cup_{j=1}^{m} B_{Y^n}((f_j(x_i))_{1 \leq i \leq n}, \varepsilon).$$

Soit à présent $f \in A$. Il existe donc un j tel que $d_{Y^n}((f(x_i))_{1 \leq i \leq n}, (f_j(x_i))_{1 \leq i \leq n}) < \varepsilon$ (*). Soit $x \in K$. Il existe également k tel que $d_K(x, x_k) < \eta$. Par conséquent, en utilisant (b), (*), et (b),

$$d_Y(f(x), f_j(x)) \leq d_Y(f(x), f(x_k)) + d_Y(f(x_k), f_j(x_k)) + d_Y(f_j(x_k), f_j(x)) < 3\varepsilon,$$

2. La notion d'équicontinuité a été explorée par Giulio Ascoli, qui a obtenu une version faible de la condition suffisante du théorème vers 1883. La nécessité de la condition a été obtenue vers 1895 par Giulio Arzelà. De multiples généralisations et variantes ont été développées ensuite, notamment dès 1906 par Maurice Fréchet pour K compact et $Y = \mathbb{R}$. Une variante du théorème d'Arzelà–Ascoli pour les espaces L^p de Lebesgue est connue sous le nom de théorème de Fréchet–Kolmogorov.

et cette propriété est uniforme en x. Donc $A \subset \cup_{j=1}^{m} B(f_j, 3\varepsilon)$, et A est bien pré-compact.

Montrons que $\overline{A}$ est complet. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $\overline{A}$. Pour tout n, soit $g_n \in A$ tel que $d(f_n, g_n) < 1/n$. La suite (g_n) est de Cauchy dans A. Pour tout $x \in K$, en notant $A_x := \{f(x) : f \in A\}$, par le (a), l'ensemble $\overline{A_x}$ est compact donc complet, et comme $(g_n(x))$ est une suite de Cauchy dans A_x, elle converge, ainsi que $(f_n(x))$, vers une limite notée $f(x)$. Montrons que $f_n \to f$ uniformément. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (f_n) est de Cauchy, il existe N tel que pour tous $p, q \geq N$ et tout $x \in K$, $d_Y(f_p(x), f_q(x)) \leq d(f_p, f_q) \leq \varepsilon$. En faisant $q \to \infty$ et en prenant le supremum en $x \in K$, on obtient $d(f_p, f) \leq \varepsilon$. Enfin, comme f est limite uniforme de fonctions continues, elle est continue, et $\overline{A}$ est donc complet. Nous n'avons pas utilisé (b). □

▼ compléments

Remarque 5.2.4. Preuve alternative du $\Leftarrow$ quand Y est complet.

On exploite la propriété de Bolzano–Weierstrass (théorème 2.3.2) : il suffit d'établir que toute suite (f_n) dans $\overline{A}$ admet une sous-suite convergeant uniformément vers une fonction $f : K \to Y$ continue. Quitte à remplacer f_n par $g_n \in A$ tel que $d(f_n, g_n) \leq 1/n$, on peut supposer que $f_n \in A$. Comme K est un espace métrique compact, il admet, pour tout k, un 2^{-k}-réseau $R^{(k)} := \{x_1^{(k)}, \dots, x_{m_k}^{(k)}\}$, et en particulier K est séparable car $R := \cup_k R^{(k)}$ est au plus dénombrable et dense. En notant $R = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ pour simplifier la notation, l'hypothèse (a) permet d'extraire une sous-suite $(f_{\varphi_0(n)}(x_0))$ qui converge dans Y, puis d'extraire une sous-suite $(f_{\varphi_0(\varphi_1(n))}(x_1))$, qui converge dans Y, tout en maintenant la convergence de $(f_{\varphi_0(\varphi_1(n))}(x_0))$, etc, pour tous les éléments de R. Le procédé diagonal de Cantor donne alors une sous-suite diagonale $(f_{\psi(n)}) = (f_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)})$ telle que $(f_{\psi(n)}(x))$ converge dans Y pour tout $x \in R$. Pour tout $x \in R$, on pose $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_{\psi(n)}(x)$.
Pour l'instant f n'est définie que sur l'ensemble dénombrable dense $R \subset K$. D'après l'hypothèse (b) la suite (f_n) est uniformément équicontinue, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\text{si } x', x'' \in R \text{ et } d_K(x', x'') < \eta, \text{ alors } d_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon \quad (\diamond).$$

Comme Y est complet, on peut prolonger f de R à K comme dans la preuve du lemme 3.3.4 : pour tout $x \in K \setminus R$, soit $x_n \in R \to x$. Par $(\diamond)$ la limite $f(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe et ne dépend pas de la suite choisie. De plus cette fonction vérifie $(\diamond)$ pour tous $x', x'' \in K$. Ainsi f est uniformément continue et en particulier $f \in \mathcal{C}(K, Y)$. Il ne reste plus qu'à établir que $f_{\psi(n)} \to f$ uniformément. Omettons ψ pour alléger la notation. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ valable à la fois pour l'équicontinuité uniforme de (f_n) via (b) et la continuité uniforme de f. Soit k tel que $2^{-k} < \eta$. Comme $f_n \to f$ ponctuellement en tout point $x^{(k)} \in R^{(k)}$ et $R^{(k)}$ est fini, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d_Y(f_n(x^{(k)}), f(x^{(k)})) < \varepsilon$ pour tout $x^{(k)} \in R^{(k)}$ et tout n tel que $n \geq N$. Combiné à $(\diamond)$, cela donne, pour tout $x \in K$, tout n tel que $n \geq N$, et dès que $d_K(x, x^{(k)}) < 2^{-k} < \eta = \eta_\varepsilon$,

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \leq d_Y(f_n(x), f_n(x^{(k)})) + d_Y(f_n(x^{(k)}), f(x^{(k)})) + d_Y(f(x^{(k)}), f(x)) < 3\varepsilon.$$

▲ compléments

5.3 Théorème de Stone–Weierstrass [3]

On considère cette fois-ci le cas $Y = \mathbb{R}$, ce qui donne l'algèbre de Banach réelle $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

Théorème 5.3.1. de Weierstrass.

Les polynômes $\mathbb{R}[x]$ restreints à $[0, 1]$ sont denses (pour la convergence uniforme) dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Preuve probabiliste constructive. Soient $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $x \in [0, 1]$ fixés. Pour tout n, on considère le polynôme de Bernstein $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k} = \mathbb{E}[f(X)]$, où $X = X_{x,n} = \frac{Y_{x,n}}{n}$, $Y_{x,n} \sim$ Binomiale(n, x). Notons [4] que $\mathbb{E}[X] = x$ et $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[|X - x|^2] = \frac{nx(1-x)}{n^2} \leq \frac{1}{4n}$, borne qui ne dépend pas de x et qui $\to 0$ quand $n \to \infty$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\eta = \eta_\varepsilon$ donné par la continuité uniforme de f (théorème de Heine). En utilisant

3. La forme la plus simple a été obtenue vers 1885 par Karl Weierstrass en utilisant une convolution avec une gaussienne. Marshall H. Stone a considérablement généralisé le théorème vers 1937 et apporté des simplifications vers 1948.

4. Notons que f_n est un polynôme car les atomes de la loi ne dépendent pas de x tandis que ses poids sont des polynômes en x. Toute famille de lois discrètes de ce type avec une moyenne x une variance tendant uniformément en x vers 0 quand $n \to \infty$ conviendrait et donnerait une suite spécifique de polynômes. Le caractère explicite du cas binomial est agréable.

l'inégalité de Markov, on obtient le contrôle uniforme en x suivant :

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)| &\le \mathbb{E}(|f(X)-f(x)|\mathbf{1}_{|X-x|<\eta}) + \mathbb{E}(|f(X)-f(x)|\mathbf{1}_{|X-x|\ge\eta}) \\ &\le \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|X-x|\ge\eta) \\ &\le \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{\mathbb{E}[|X-x|^2]}{\eta^2} \le \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2} \le 2\varepsilon \quad \text{dès que } n \ge \frac{\|f\|_\infty}{2\eta^2\varepsilon}.\end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\sup_{x\in[0,1]} |P(x)-f(x)| \le 2\varepsilon$. □

Autres preuves. La preuve originale de Weierstrass est relativement compliquée, mais Lebesgue en a donné une preuve assez élémentaire (voir ici). Il existe des preuves passant par la convolution avec une approximation de l'identité polynomiale, l'interpolation de Lagrange, etc. (voir par exemple ici) □

Le théorème de Stone–Weierstrass ci-dessous généralise considérablement le théorème de Weierstrass ci-dessus, en remplaçant $[0,1]$ par un espace métrique compact K quelconque, par exemple l'ensemble des parties compactes d'un espace métrique compact munis de la distance de Hausdorff ! Ce théorème possède de nombreuses variantes et généralisations développées pour des contextes divers (cf. par exemple la remarque 5.3.5).

Théorème 5.3.2. de Stone–Weierstrass.

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ une sous-algèbre (sous-espace vectoriel stable par produit) vérifiant la propriété de prescription de valeurs arbitraires en deux points arbitraires suivante :

— pour tous $x, y \in K$, $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a = b$ si $x = y$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = a$ et $f(y) = b$.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.

En particulier, pour tout n et tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, l'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ à n variables (ou plus précisément leur restriction au compact K) est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. Le cas $K = [0,1]^n$ est démontrable en utilisant la loi multinomiale et les polynômes de Bernstein multivariés associés.

Remarque 5.3.3. Hypothèses.

Le théorème est souvent énoncé avec les hypothèses suivantes :

(a) $\mathcal{A}$ contient une fonction constante non nulle (donc toutes les constantes car $\mathcal{A}$ est une algèbre)

(b) $\mathcal{A}$ distingue les points : pour tous $x, y \in K$, $x \neq y$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

Ces deux hypothèses entraînent la propriété de prescription de valeurs arbitraires en deux points arbitraires. En effet, soient $x, y \in K$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a = b$, il suffit de prendre f constante et égale à $a = b$ grâce à la propriété (a). Si $a \neq b$ alors $x \neq y$ et si $f \in \mathcal{A}$ vérifie la propriété (b) alors

$$z \mapsto b\frac{f(z)-f(x)}{f(y)-f(x)} + a\frac{f(y)-f(z)}{f(y)-f(x)} \in \mathcal{A} \quad \text{vaut } a \text{ et } b \text{ en } x \text{ et } y \text{ respectivement.}$$

La propriété de prescription de valeur en deux points est pratiquement nécessaire car elle est essentiellement vérifiée par $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ et donc par $\mathcal{A}$ qui est censée l'approcher uniformément. On pourrait dans cet esprit exprimer la condition sur $\mathcal{A}$ comme suit : pour tout $g \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ et tous $x, y \in K$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = g(x)$ et $f(y) = g(y)$. On pourrait de plus affaiblir l'hypothèse en introduisant un ε, comme dans la troisième partie de la preuve du théorème.

Preuve. On procède en trois étapes, la troisième est en quelque sorte un théorème alternatif.

— Il existe une suite (P_n) de polynômes dans $\mathbb{R}[x]$ telle que $P_n(0) = 0$ pour tout n, et $P_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$ uniformément en $x \in [-1,1]$. Il s'agit d'une algébrisation analytique de la valeur absolue.

Preuve. Le théorème 5.3.1 de Weierstrass fournit une suite de polynômes (Q_n) telle que $Q_n \to |\cdot|$ uniformément sur $[-1,1]$, et comme $Q_n(0) \to |0| = 0$, on peut prendre $P_n := Q_n - Q_n(0)$. Alternativement, on peut construire la suite à la main : pour tout $x \in [-1,1]$, la suite définie par $P_{n+1}(x) := P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - (P_n(x))^2)$, $P_0(x) := 0$, est croissante, et les seules limites finies possibles sont $\pm|x|$. En effet, si $0 \le y \le |x| \le 1$, la fonction $\varphi_x(y) := y + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ vérifie $\varphi_x'(y) = 1 - y \ge 0$ et $\varphi_x(|x|) = |x|$; elle envoie donc $[0,|x|]$ dans lui-même et $\varphi_x(y) \ge y$. Par récurrence, $0 \le P_n(x) \le P_{n+1}(x) \le |x|$, donc $P_n(x) \to |x|$, uniformément en x par le théorème 5.1.1 de Dini. □

— L'ensemble $\overline{\mathcal{A}}$ est un trellis : pour tous $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, on a $\min(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}$ et $\max(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}$.

Preuve. Comme $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|) = -\max(-f,-g)$, il suffit de montrer que si $f \in \overline{\mathcal{A}}$ alors $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$. Notons que $\overline{\mathcal{A}}$ est une algèbre, car si $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$ et (f_n), (g_n) dans $\mathcal{A}$ tels que $f_n \to f$ et $g_n \to g$ dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f_n + g_n \in \mathcal{A} \to \alpha f + g \in \overline{\mathcal{A}}$ et $f_n g_n \in \mathcal{A} \to fg \in \overline{\mathcal{A}}$. Maintenant, soit $f \in \overline{\mathcal{A}}$ et $M := \sup_{x\in K} |f(x)| < \infty$. Si $M = 0$, alors $f = 0$ et le résultat est immédiat. Si $M > 0$, soit P_n le polynôme fourni par l'item précédent. Alors $\overline{\mathcal{A}} \ni MP_n(f/M) \to |f|$ quand $n \to \infty$, dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. Donc $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$. Ici intervient le fait que $\mathcal{A}$ est une algèbre : $P(f) \in \overline{\mathcal{A}}$ pour tous $P \in \mathbb{R}[x]$ et $f \in \overline{\mathcal{A}}$, et on pourrait affaiblir l'hypothèse de stabilité par produit en une hypothèse de stabilité par prise de puissance entière : $f \in \mathcal{A} \Rightarrow f^m \in \mathcal{A}$ pour tout entier $m \geq 1$. Comme $P_n(0) = 0$ pour tout n, il n'y a pas besoin que $\mathcal{A}$ contienne les constantes. □

— Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ un treillis tel que pour tous $x, y \in K$, tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a = b$ si $x = y$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $f \in \mathcal{T}$ telle que $|f(x) - a| < \varepsilon$ et $|f(y) - b| < \varepsilon$ (vérifié par $\overline{\mathcal{A}}$ avec $\varepsilon = 0$). Alors $\mathcal{T}$ est dense dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.

Preuve. Soit $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$ et $x, y \in K$. Soit $f_x^{(y)} \in \mathcal{T}$ telle que

$$|f_x^{(y)}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f_x^{(y)}(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

Une telle fonction existe par l'hypothèse de prescription, y compris lorsque $x = y$ puisque les deux valeurs prescrites sont alors égales. Fixons pour l'instant $y \in K$ et considérons l'ouvert

$$x \in O_x^{(y)} := \{x' \in K : f_x^{(y)}(x') - f(x') < \varepsilon\}.$$

Comme K est compact, il est recouvert d'un nombre fini de ces ouverts : $O_{x_k}^{(y)}$, $1 \leq k \leq m(y)$. Soit

$$f^{(y)} := \min(f_{x_1}^{(y)}, \dots, f_{x_{m(y)}}^{(y)}) \in \mathcal{T}.$$

Par construction on a (la définition de $O_x^{(y)}$ est conçue pour être compatible avec la prise de min)

$$f^{(y)}(x) - f(x) < \varepsilon \text{ pour tout } x \in K \quad \text{et} \quad f^{(y)}(y) - f(y) > -\varepsilon.$$

On utilise à présent la même astuce : pour tout $y \in K$, on considère l'ouvert

$$y \in U^{(y)} := \{y' \in K : f^{(y)}(y') - f(y') > -\varepsilon\}.$$

Comme K est compact, il est recouvert par un nombre fini d'entre eux, $U^{(y_k)}$, $1 \leq k \leq m$. Soit

$$f_{\mathcal{T}} := \max(f^{(y_1)}, \dots, f^{(y_m)}) \in \mathcal{T}.$$

Par construction, on a $-\varepsilon < f_{\mathcal{T}}(x) - f(x) < \varepsilon$ pour tout $x \in K$. □

□

Le théorème de Stone–Weierstrass ci-dessus n'est plus valable tel quel en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$. En effet, considérons l'algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{C}[z]$ et le compact $\overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Pour tout $P \in \mathbb{C}[z]$, on a

$$\oint_{|z|=1} P(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = 0.$$

Si $\mathbb{C}[z]$ était dense dans $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}},\mathbb{C})$, la même formule aurait lieu pour toutes les fonctions continues $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ car $f \mapsto \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z$ est continue $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}},\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Or c'est impossible : $\oint_{|z|=1} \overline{z}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}$. Malgré tout, un théorème de Stone–Weierstrass complexe est possible en ajoutant une hypothèse (c) de stabilité par conjugaison, mais il constitue alors un corollaire assez immédiat du théorème de Stone–Weierstrass réel :

Corollaire 5.3.4. de Stone–Weierstrass complexe.

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K,\mathbb{C})$ une sous-algèbre ($\mathbb{C}$ sous-espace vectoriel stable par produit) vérifiant :
- — prescription : pour tous $x, y \in K$, $a, b \in \mathbb{C}$, avec $a = b$ si $x = y$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = a$ et $f(y) = b$.
- — stabilité par conjugaison : si $f \in \mathcal{A}$ alors $\overline{f} \in \mathcal{A}$

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$.

Notons que cette fois-ci, l'algèbre des polynômes $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ n'est pas utilisable car elle n'est pas stable par conjugaison, il faudrait plutôt considérer l'algèbre $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, \overline{z_1}, \dots, \overline{z_n}]$.

En particulier l'ensemble des polynômes trigonométriques $\mathbb{C}[e^{i\theta}, e^{-i\theta}]$ est dense dans $\mathcal{C}(S^1, \mathbb{C})$.

Preuve. Notons que $\mathfrak{I}f = \mathfrak{R}(-if)$. Comme $\mathcal{A}$ est une algèbre stable par conjugaison, si $f \in \mathcal{A}$ alors $\mathfrak{R}f = \frac{1}{2}(f + \overline{f}) \in \mathcal{A}$, donc $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} := \{\mathfrak{R}f : f \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A} \cap \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Si $x, y \in K$ et $a, b \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, la propriété de prescription pour $\mathcal{A}$ donne $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = a \in \mathbb{R}$ et $f(y) = b \in \mathbb{R}$, et donc $(\mathfrak{R}f)(x) = a$ et $(\mathfrak{R}f)(y) = b$, et comme $\mathfrak{R}f \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, ceci montre que $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ vérifie la propriété de prescription réelle. Le théorème de Stone–Weierstrass réel est licite et fournit $f_{\mathfrak{R}}, f_{\mathfrak{I}} \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ approchant $\mathfrak{R}f, \mathfrak{I}f$ dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. La fonction $f_{\mathfrak{R}} + if_{\mathfrak{I}} \in \mathcal{A}$ approche alors f dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$. □

Remarque 5.3.5. Variante pour les espaces localement compacts.

Soit X localement compact séparé. On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ s'annule à l'infini lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K de X tel que $|f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \notin K$. On note $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $X \to \mathbb{R}$ nulles à l'infini. On le munit de la topologie engendrée par la norme uniforme $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$. On dit que $A \subset \mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$ s'annule nulle part lorsque pour tout $x \in X$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq 0$. Dans ce contexte, la variante suivante du théorème de Stone–Weierstrass est disponible : *si X est localement compact séparé alors une sous-algèbre A de $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$ ssi elle s'annule nulle part et distingue les points.*

Certaines variantes du théorème sur des algèbres d'opérateurs sont encore des conjectures !

Chapitre 6

Opérateurs linéaires bornés sur les espaces vectoriels normés

Lu 02/11

Pour aller plus loin : cours du DMA d'analyse fonctionnelle.

Les applications linéaires continues sont les plus simples à étudier, et constituent les objets auxquels on se ramène en faisant du calcul différentiel. Mais la dimension infinie recèle des subtilités.

6.1 Définitions et propriétés de base, dualité

Définition 6.1.1. Opérateurs linéaires bornés sur les Banach.

Soient X et Y des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels normés avec $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

- Une application $u : X \to Y$ est un opérateur linéaire borné lorsqu'à la fois
  - u est linéaire : pour tous $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$
  - u est bornée : il existe $M \in [0, \infty)$ tel que pour tout $x \in X$, $\|u(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$.
- On note $L(X, Y)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés $X \to Y$.
- L'espace vectoriel $L(X, Y)$ est normé par la norme d'opérateur :

$$\|u\|_{L(X,Y)} := \inf\{M > 0 : \forall x \in X, \|u(x)\|_Y \leq M\|x\|_X\} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|_Y.$$

- L'espace vectoriel normé $L(X, X)$ a une structure d'algèbre pour le produit $uv = u \circ v$.
  On parle d'algèbre d'opérateurs, en général non commutative, et unitaire : $\mathrm{id} \in L(X, X)$.
  Les éléments de $L(X, X)$ sont des *endomorphismes* et on note parfois $\mathrm{End}(X) := L(X, X)$.
- En dimension infinie, les applications linéaires ne sont pas toujours continues : $f \in X \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ est linéaire mais non continue quand $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ est muni de la topologie de la norme $\|f\|_p = (\int_0^1 |f(t)|^p \mathrm{d}t)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$. En effet, les fonctions $f_n(t) := \max(1 - nt, 0)$ vérifient $f_n(0) = 1$ tandis que $\|f_n\|_p \to 0$.

Point de vue géométrique : opérateur[1] signifie opérant une transformation sur l'espace.
Il n'est pas étonnant que pour les applications linéaires, Lipschitz et continu en 0 soient équivalents.

Lemme 6.1.2. Régularité des applications linéaires.

Pour tout $u : X \to Y$ linéaire les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $u \in L(X, Y)$
(ii) u est Lipschitz
(iii) u est uniformément continue
(iv) u est continue
(v) u est continue en 0.

Preuve. Les (i)⇒(i+1) sont immédiats. Pour (v)⇒(i), la continuité de u en 0 donne $\eta > 0$ tel que $\|x\|_X \leq \eta$ implique $\|u(x)\|_Y \leq 1$. Ainsi pour tout $x \in X \setminus \{0\}$, par linéarité $\|u(x)\|_Y = \eta^{-1}\|x\|_X \|u(\eta\|x\|_X^{-1}x)\|_Y \leq \eta^{-1}\|x\|_X$ d'où $\|u\| \leq \eta^{-1}$. □

1. La théorie des opérateurs bornés puis non bornés a été développée notamment dans les années 1920–1930 par l'école de mathématiques de Lwów autour de Stefan Banach dans un grand élan créatif autour de la naissance de l'analyse fonctionnelle, mais aussi par Hans Hahn, Eduard Helly, John von Neumann, Frigyes Riesz, Marshall H. Stone, Hermann Weyl, entre autres, pour une formulation rigoureuse de la mécanique quantique à base notamment d'espaces de Hilbert, cf. [31].

Lemme 6.1.3. Nature banachique héritée de celle de l'espace d'arrivée.

Si Y est un Banach alors $L(X,Y)$ est un Banach.

Preuve. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $L(X,Y)$. Pour tout $x \in X$, la suite $(u_n(x))$ est de Cauchy dans Y car $\|u_n(x) - u_m(x)\|_Y \leq \|u_n - u_m\|_{L(X,Y)}\|x\|_X$. Comme Y est complet, on peut poser $u(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x)$. La linéarité de u est immédiate. La convergence dans $L(X,Y)$ provient de

$$\|u - u_n\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|u(x) - u_n(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} \lim_{m\to\infty} \|u_m(x) - u_n(x)\|_Y \leq \overline{\lim_{m\to\infty}} \|u_m - u_n\|_{L(X,Y)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et sa bornitude de $\|u\|_{L(X,Y)} \leq \|u - u_n\|_{L(X,Y)} + \|u_n\|_{L(X,Y)}$. □

Définition 6.1.4. Dual continu ou topologique.

Si X est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, les éléments de $L(X,\mathbb{K})$ sont appelées formes linéaires continues et $L(X,\mathbb{K})$ est appelé dual de X, noté X'. Il s'agit du dual continu ou topologique, inclus dans le dual algébrique.

Remarque 6.1.5. Injection canonique dans le bidual.

On peut toujours identifier X avec un sous-espace de $(X')'$ par l'application linéaire

$$\Phi : x \in X \mapsto (x' \in X' \mapsto x'(x)) \in (X')'.$$

Elle est injective car $\Phi(x) = 0$ donne $x'(x) = 0$ pour tout $x' \in X'$, donc[a] $x = 0$.
On écrit donc $X \subset X''$ et cette inclusion est à comprendre au sens d'un morphisme injectif.

a. Cela revient à dire que pour tout $x \neq 0$, il existe $x' \in X'$ tel que $x'(x) \neq 0$. C'est immédiat en présence d'un produit scalaire, en prolongeant $\lambda x \mapsto \lambda\|x\|$ définie sur le sous-espace vectoriel $\{\lambda x, \lambda \in \mathbb{K}\}$ à tout X par $y \mapsto \langle y, \frac{x}{\|x\|}\rangle$. Tandis que sans produit scalaire, on peut recourir au théorème 6.3.1 de Hahn–Banach, qui repose sur l'axiome du choix pour prolonger.

Remarque 6.1.6.

- En dimension finie, les boules sont compactes, les applications linéaires sont continues, et $L(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m) \equiv \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}^{m\times n}$. La norme sur $\mathbb{K}^{m\times n}$ dépend des normes sur $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$.
- Les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont toutes équivalentes : si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont deux normes sur $\mathbb{K}^n$, alors la compacité de la boule ou sphère unité de $\mathbb{K}^n$ donne une constante $c > 0$ telle que $\|\cdot\| \leq c\|\cdot\|'$, et réciproquement. Cette constante est la norme d'opérateur de l'identité entre le même espace vectoriel muni de deux normes différentes, qui est donc continue.
- Un $\mathbb{K}$ espace vectoriel X de dimension finie n, est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, toutes les normes sont équivalentes, et toute application linéaire u de X dans un espace vectoriel normé quelconque Y est continue (note : $u(X)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de Y).
- Si X est un espace vectoriel normé de dimension infinie, alors il existe toujours une application linéaire $u : X \to \mathbb{R}$ non bornée. Pour le voir, on peut procéder par étapes :
  - Comme $\dim X = \infty$, il existe $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ linéairement indépendants dans X tels que $\|e_n\|_X = 1$.
  - Avec l'axiome du choix, trouver une base algébrique[a] $(f_i)_{i\in I}$, $I \supset \mathbb{N}$, qui contient $f_0 := e_0$, $f_1 := e_1 - 2e_0, \ldots, f_n := e_n - 2e_{n-1}$, etc, de sorte que $f_n + 2f_{n-1} + \cdots + 2^n f_0 = e_n$.
  - Soit $u : X \to \mathbb{R}$ tel que $u(x)$ est le coefficient de $f_0 = e_0$ dans l'écriture de x dans la base $(f_i)_{i\in I}$. On a alors $u(e_n) = u(f_n + 2f_{n-1} + \cdots + 2^n f_0) = 2^n$, donc u est non borné.

a. Signifie que tout élément de l'espace est combinaison linéaire finie d'éléments de la base.

Théorème 6.1.7. Dualité des espaces $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

Si $p \in [1,\infty)$ et si $q \in (1,\infty]$ est son conjugué de Hölder, défini par $1/p + 1/q = 1$ (donc $q = \infty$ si $p = 1$ et $q = p/(p-1)$ si $p > 1$), alors l'application

$$\Phi : \ell^q \to (\ell^p)', \quad \Phi(y)(x) := \sum_n x_n y_n,$$

est bien définie et constitue une bijection linéaire isométrique : $(\ell^p)'$ est isomorphe à ℓ^q.
En particulier $(\ell^1)' \equiv \ell^\infty$, $(\ell^2)' \equiv \ell^2$, et $(\ell^p)'' \equiv \ell^p$ si $p \in (1,\infty)$ (espace réflexif).

— Si X est un Hilbert, on a toujours $X' \equiv X$ grâce au théorème 7.2.1 de représentation de Riesz.
— Si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ alors on a l'inclusion[2] $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$, en particulier $\ell^p \subset \ell^\infty$ pour tout $p \in [1,\infty]$.
— Le théorème ne dit rien sur $p = \infty$. En fait le corollaire 6.3.4 affirme que Φ est injective mais pas surjective : $\ell^1 \subsetneq (\ell^\infty)'$, c'est-à-dire qu'il existe des formes linéaires continues sur ℓ^∞ qui ne sont pas dans $\Phi(\ell^1) \equiv \ell^1$.
— Un théorème de Riesz–Markov–Kakutani[3] affirme que si K est métrique compact alors $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})'$ peut être identifié avec l'espace $\mathcal{M}(K)$ des mesures de Borel signées sur K : à une mesure $\mu \in \mathcal{M}(K)$ on associe la forme linéaire $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R}) \mapsto \int_K f \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$. La preuve dépasse le cadre de ce cours.

Preuve. Par l'inégalité de Hölder $\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$, l'application linéaire $\Phi : \ell^q \to (\ell^p)'$ est bien définie. De plus $\|\Phi(y)\|_{(\ell^p)'} \leq \|y\|_q$, reste à établir l'égalité (isométrie donc injectivité) et la surjectivité.

Traitons le cas $p = 1$ ($q = \infty$). Pour $y \in \ell^\infty$, $|\Phi(y)(e_n)| = |y_n|$, donc Φ est une isométrie donc une injection. Pour la surjectivité, si $u \in (\ell^1)'$ posons $y_n := u(e_n)$. Alors $|y_n| \leq \|u\|\|e_n\|_1 = \|u\|$ et donc $y \in \ell^\infty$. En passant par une troncature, on obtient $u = \Phi(y)$.

Le cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder $x_n := \frac{|y_n|}{y_n}|y_n|^{q-1}$ vérifie $\|x\|_p^p = \|y\|_q^q$ car $p(q-1) = q$, d'où $\Phi(y)(x) = \|y\|_q^q = \|y\|_q \|x\|_p$, donc $\|\Phi(y)\|_{(\ell^p)'} = \|y\|_q$, et Φ est une isométrie donc une injection. Montrons que Φ est surjective. Soit $u \in (\ell^p)'$, alors pour tout $x \in \ell^p$, $u(x) = \sum_n x_n y_n$ où $y_n := u(e_n)$. En définissant $x \in \ell^p$ comme précédemment et avec une troncature, $u(x) = \sum_n |y_n|^q$ donc $y \in \ell^q$, puisque $u \in (\ell^p)'$ et $u = \Phi(y)$. □

▾ compléments

Lemme 6.1.8. Caractérisation de la continuité par fermeture du noyau.

Une forme linéaire $u : X \to \mathbb{R}$ sur un espace vectoriel normé X est continue ssi son noyau est fermé : $\ker u = \overline{\ker u}$.

Preuve. Soit $N := \ker u$. $\Rightarrow$. Immédiat car $N = u^{-1}(\{0\})$. $\Leftarrow$. Soit $x_0 \notin N$ (si $N = X$ alors $u = 0$ donc u continue). Soit $x_1 := x_0/u(x_0)$, bien défini car $u(x_0) \neq 0$. On a $u(x_1) = 1$, donc $x_1 \notin N$, et comme N est fermé, on a $d := \mathrm{dis}(x_1, N) > 0$. Comme $x_1 \notin N$ et $x/u(x) - x_1 \in N$ pour tout $x \notin N$, il vient $\|x/u(x)\| \geq \inf_{y\in N} \|x_1 - y\| = \mathrm{dist}(x_1, N) = d$, d'où $|u(x)| \leq d^{-1}\|x\|$ pour tout $x \in X$. □

Remarque 6.1.9. Formes linéaires non bornées.

Dans les espaces vectoriels normés de dimension infinie, les formes linéaires non bornées ne manquent pas, et par conséquent les sous-espaces non fermés non plus. Il n'y a rien de sorcier à construire un sous espace non fermé , par exemple dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ on peut prendre $\mathbb{R}[X]|_{[0,1]}$, qui se trouve être de plus dense par le théorème de Weierstrass, chose impossible en dimension finie. Dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ on peut prendre par exemple

$$\left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|x_n|^2 < \infty\right\} \subset \ell^2(\mathbb{Z}),$$

qui n'est pas fermé car il contient les suites à support fini, qui sont dense dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. En utilisant la transformée de Fourier discrète $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi nt}$ il est possible d'interpréter cet exemple comme la non fermeture de l'espace de Sobolev H^1 dans L^2 sur le cercle.

▴ compléments

2. Quand $p_2 = \infty$ cela provient du fait que toute série convergence a un terme général borné, tandis que quand $p_2 < \infty$, cela provient du fait que $|x_n|^{p_1} < 1$ pour n assez grand, d'où $|x_n|^{p_2} \leq |x_n|^{p_1} < 1$, donc $\sum_n |x_n|^{p_1} < \infty \Rightarrow \sum_n |x_n|^{p_2} < \infty$. On prendra garde au fait que cette inclusion n'est pas valable pour les espaces L^p du cours *Intégration et probabilités* en général, et qu'elle a même lieu en sens opposé pour les espaces L^p relatifs à une mesure de probabilités, en vertu de l'inégalité de Hölder. Notons par ailleurs que $\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mathrm{d}n, \mathbb{R})$ où $\mathrm{d}n$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, qui n'est pas normalisable en une mesure de probabilités. Ainsi $\sum_n |x_n|^p = \int |x|^p \mathrm{d}n$, magie de l'intégrale de Lebesgue, qui embrasse discret et continu dans une même conceptualisation, un paradis pour l'analyse fonctionnelle et les probabilités.

3. Démontré en 1909 pour $K = [0,1]$ par F. Riesz, frère de M. Riesz, étendu à des espaces localement compacts en 1938 par A.A. Markov Junior, fils de A.A. Markov Senior, puis aux espaces compacts en 1941 par S. Kakutani.

6.2 Théorème de Banach–Steinhaus[4]

Théorème 6.2.1. de Banach–Steinhaus.

Si X est un Banach et Y un espace vectoriel normé alors pour toute partie non vide $U \subset L(X,Y)$, la bornitude ponctuelle est équivalente à la bornitude uniforme :

$$\forall x \in X,\ \sup_{u\in U} \|u(x)\|_Y < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{u\in U} \|u\|_{L(X,Y)} < \infty.$$

Il s'agit d'une interversion de quantificateurs, typique de ce que permet d'obtenir le théorème de Baire :

$$(\forall x \in X)(\exists M \geq 0)(\forall u \in U)(\|u(x)\|_Y \leq M\|x\|_X) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists M \geq 0)(\forall u \in U)(\forall x \in X)(\|u(x)\|_Y \leq M\|x\|_X).$$

Il est possible de démontrer le théorème de Banach–Steinhaus sans faire appel au théorème de Baire [43].

Preuve. $\Leftarrow$. Découle de $\sup_{\|x\|_X=1} \sup_{u\in U} \|u(x)\|_Y = \sup_{u\in U} \sup_{\|x\|_X=1} \|u(x)\|_Y$.
$\Rightarrow$. Pour tout n, $F_n := \{x \in X : \sup_{u\in U} \|u(x)\|_Y \leq n\} = \cap_{u\in U} u^{-1}(\overline{B}_Y(0,n))$ est fermé, et par hypothèse

$$\bigcup_n F_n = X,$$

dont l'intérieur n'est pas vide (égal à X !), donc par le théorème de Baire pour l'espace complet X (théorème 3.4.1), il existe un n tel que F_n a un intérieur non vide, c'est-à-dire qu'il existe $x \in F_n$ et $\varepsilon > 0$ tels que[5]

$$\overline{B}_X(x,\varepsilon) := \{y \in X : \|x-y\|_X \leq \varepsilon\} \subset F_n.$$

Soit $x' \in X$ tel que $\|x'\| \leq 1$, et soit $u \in U$. On a, avec les x et ε précédents,

$$\|u(x')\|_Y = \varepsilon^{-1}\|u(x+\varepsilon x') - u(x)\|_Y \leq \varepsilon^{-1}(\|u(x+\varepsilon x')\|_Y + \|u(x)\|_Y) \leq \varepsilon^{-1}(n+n)$$

car $x+\varepsilon x'$ et x sont dans F_n par hypothèse. En prenant le sup sur $\|x'\| \leq 1$ puis sur $u \in U$, il vient

$$\sup_{u\in U} \|u\|_{L(X,Y)} \leq 2\varepsilon^{-1} n < \infty.$$

□

Corollaire 6.2.2. Continuité automatique de la limite ponctuelle.

Soit (u_n) une suite dans $L(X,Y)$ où X est un Banach et Y un espace vectoriel normé. Alors la convergence ponctuelle entraîne la continuité de la limite : si pour tout $x \in X$, il existe $u(x) \in Y$ tel que $u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(x)$ dans Y, alors $u \in L(X,Y)$, c'est-à-dire que $\sup_{\|x\|_X=1} \|u(x)\|_Y < \infty$.

Attention, cela ne dit pas que la convergence est uniforme, c'est-à-dire que $u_n \to u$ dans $L(X,Y)$.

Preuve. L'application u est linéaire car limite ponctuelle d'applications linéaires. Reste à établir sa continuité. Comme pour tout $x \in X$, $\sup_n \|u_n(x)\|_Y < \infty$, le théorème de Banach–Steinhaus (théorème 6.2.1) avec $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ donne $M := \sup_n \|u_n\|_{L(X,Y)} < \infty$. Ensuite, pour tout $x \in X$ et tout n, $\|u_n(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ donc en prenant la limite $n \to \infty$, il vient $\|u(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$. □

Application : non convergence ponctuelle des séries de Fourier. DM

4. Démontré par Stefan Banach et Hugo Steinhaus dans les années 1920, démontré indépendamment par Hans Hahn.
5. L'argument est typique de l'usage du théorème de Baire pour démontrer une existence (non constructive).

6.3 Théorème de Hahn–Banach[6]

Me 04/11

Théorème 6.3.1. de Hahn–Banach (prolongement de formes linéaires continues).

Soit $X \subset \widetilde{X}$ un sous-espace d'un espace vectoriel normé $\widetilde{X}$ sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Soit $u \in L(X, \mathbb{K}) = X'$ une forme linéaire. Alors il existe une forme linéaire $\widetilde{u} \in L(\widetilde{X}, \mathbb{K}) = \widetilde{X}'$ telle que $\widetilde{u}|_X = u$ et $\|\widetilde{u}\| = \|u\|$.

En dépit de son nom, ce théorème ne fait appel à aucun espace de Banach.

Lorsque $\widetilde{X}$ est un Hilbert, voir la remarque 7.2.5 sur le théorème de représentation de Riesz.

Lorsque[7] $\overline{X} = \widetilde{X}$, le résultat découle du lemme 3.3.4 de prolongement par continuité, on a alors unicité.

Dans le cas général, le théorème de Hahn–Banach est un gros marteau à utiliser avec tact.

Le théorème de Hahn–Banach se généralise à $u \in L(X, Y)$ avec Y espace vectoriel normé quelconque, sous conditions, étudiées notamment par Alexandre Grothendieck, et on parle de *vector-valued Hahn–Banach theorem* [37]. En particulier, on dit que Y est *isométriquement injectif* lorsque le théorème est vrai pour tout $X \subset \widetilde{X}$ et tout $u \in L(X, Y)$. Ce n'est pas le cas par exemple de l'espace $\ell_0^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites bornées nulles à l'infini. Une classe de contre-exemples se trouve également dans [10, Exercise 27].

Partiel AF 2022

Preuve. On peut supposer sans perte de généralité que $\|u\| = 1$.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. L'idée, très naturelle, est de se ramener au cas où X est de codimension 1, en montant en dimension par inclusion, ce qui n'est pas du tout évident en dimension infinie non dénombrable, c'est-à-dire au-delà du séparable[8]. La preuve générale repose sur l'axiome du choix[9] via le lemme de Zorn : *si un ensemble partiellement ordonné $\mathcal{E}$ est tel que toute partie totalement ordonnée admet un majorant alors il possède un élément maximal (c'est-à-dire qui n'est pas majoré par un autre élément).*

Considérons l'ensemble de sous-espaces vectoriels

$$\mathcal{E} := \{(Y, u_Y) : X \subset Y \subset \widetilde{X}, u_Y \in L(Y, \mathbb{R}), u_Y|_X = u, \|u_Y\| = \|u\|\}$$

muni de l'ordre (partiel)

$$(Y, u_Y) \leq (Y', u_{Y'}) \quad \text{ssi} \quad Y \subset Y' \quad \text{et} \quad u_{Y'}|_Y = u_Y.$$

Si $((Y_i, u_{Y_i}))_{i\in I}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{E}$ alors elle admet le majorant $Y := \cup_{i\in I} Y_i$ et $u_Y|_{Y_i} := u_{Y_i}$. Par le lemme de Zorn, il existe un élément maximal noté (Y, u_Y). Il ne reste plus qu'à établir que pour tout élément maximal, on a $Y = \widetilde{X}$. Supposons par l'absurde que $Y \subsetneq \widetilde{X}$, et soit $\widetilde{x} \in \widetilde{X}\backslash Y$. Il suffit de construire un prolongement $\widetilde{u}$ de u_Y sur $Y + \mathbb{R}\widetilde{x}$ pour obtenir une contradiction. Nous avons donc réduit la preuve du théorème au cas spécial où $\widetilde{X} = X + \mathbb{R}\widetilde{x}$ avec $\widetilde{x} \notin X$ et, disons, $\|\widetilde{x}\| = 1$.

Pour construire une telle extension $\widetilde{u}$ de dimension 1, nous devons affecter une valeur $\widetilde{u}(\widetilde{x}) := \widetilde{a} \in \mathbb{R}$ telle que $|u(x) + \lambda\widetilde{a}| \leq \|x + \lambda\widetilde{x}\|$ pour tous $x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$. Par dilatation, et parce que cela a lieu pour $\lambda = 0$ car $\|u\| = 1$, cela est équivalent à dire que $|u(x) + \widetilde{a}| \leq \|x + \widetilde{x}\|$ pour tout $x \in X$, c'est-à-dire

$$-\widetilde{a} \in \bigcap_{x\in X} \big[u(x) - \|x + \widetilde{x}\|, u(x) + \|x + \widetilde{x}\|\big].$$

Pour montrer que l'intersection d'intervalles du membre de droite est non vide, il suffit d'établir que le sup des bornes gauche est $\leq$ à l'inf des bornes droites, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in X$,

$$u(x) - \|x + \widetilde{x}\| \leq u(y) + \|y + \widetilde{x}\|.$$

Mais cela découle tout simplement de l'inégalité triangulaire : $u(x - y) \leq \|x - y\| \leq \|y + \widetilde{x}\| + \|x + \widetilde{x}\|$.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Procédons par réduction au cas réel. Pour cela, on voit X et $\widetilde{X}$ comme des espaces vectoriels normés réels (toujours possible). On a les proprétés suivantes entre formes linéaire réelles et complexes :

— Si L est une forme linéaire complexe, alors $R(x) := \Re L(x)$ est une forme réelle et $L(x) = R(x) - \mathrm{i}R(\mathrm{i}x)$. Cela découle simplement du fait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z = \Re z - i\Re(\mathrm{i}z)$.

6. Ce théorème a été démontré indépendamment par Hans Hahn et Stefan Banach dans les années 1920. Le cas particulier de l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ avait déjà été démontré dix ans avant par Eduard Helly, et une version plus générale que le théorème de Hahn–Banach a été établie par Marcel Riesz lors de son étude du problème des moments. Le théorème de Hahn–Banach possède de nombreuses variantes, notamment une variante géométrique qui affirme la séparation de convexes disjoints par un hyperplan.

7. Les sous-espaces denses existent en dimension infinie : $\mathbb{R}[X]|_{[0,1]}$ dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ (théorème de Weierstrass) par exemple.

8. Concrètement, les Banach non séparables sont les moins utilisés (les L^∞ sont souvent munis de topologies faibles).

9. Le théorème de Hahn–Banach est plus faible que l'axiome du choix. Il est équivalent au fait que toute algèbre de Boole admet une mesure réelle. À ne pas confondre avec le théorème qui affirme que tout filtre sur une algèbre de Boole s'étend en un ultrafiltre. Pour en savoir plus sur l'axiome du choix en général et sur Hahn–Banach en particulier, cf. [25, 46].

— Si R est une forme linéaire réelle, alors $L(x) := R(x) - \mathrm{i}R(\mathrm{i}x)$ est une forme linéaire complexe, car on a :

$$L(\mathrm{i}x) = R(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}R(-x) = \mathrm{i}(R(x) - \mathrm{i}R(\mathrm{i}x)) = \mathrm{i}L(x).$$

— Si R et L sont reliés comme ci-dessus, alors $\|L\| = \|R\|$. Puisque que $|R(x)| = |\Re L(x)| \leq |L(x)|$, on a immédiatement $\|R\| \leq \|L\|$. D'autre part, pour tout x, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $\lambda L(x) = |L(x)|$, d'où

$$|L(x)| = \lambda L(x) = L(\lambda x) = R(\lambda x) \underbrace{-\mathrm{i}R(\mathrm{i}\lambda x)}_{=0,\ L(\lambda x)\in\mathbb{R}} \leq \|R\|\|\lambda x\| = \|R\|\|x\|,$$

ce qui montre que $\|L\| \leq \|R\|$.

Cette rigidité des formes linéaires complexes, déjà visible quand $X = \mathbb{C}$, est celle des similitudes du plan complexe, qu'on retrouve naturellement dans les fonctions holomorphes (localement des similitudes) du cours d'analyse complexe.

On est maintenant en mesure de déduire facilement le cas complexe du cas réel. L'application $R(x) := \Re u(x)$, est une forme linéaire réelle sur X et $\|R\| = \|u\| = 1$. D'après le cas réel, il existe $\widetilde{R} : \widetilde{X} \to \mathbb{R}$ linéaire continue telle que $\widetilde{R}|_X = R$ et $\|\widetilde{R}\| = \|R\| = 1$. Alors $\widetilde{u}(x) := \widetilde{R}(x) - \mathrm{i}\widetilde{R}(\mathrm{i}x)$ est une forme linéaire complexe sur $\widetilde{X}$ avec $\widetilde{u}|_X = u$ et $\|\widetilde{u}\| = \|\widetilde{R}\| = 1$. □

▾ compléments

Remarque 6.3.2. Preuve alternative du cas complexe de Hahn–Banach.

Il existe des preuves alternatives du cas complexe de Hahn–Banach qui ne procèdent pas par réduction au cas réel. En voici une plutôt géométrique qui repose sur un théorème de Helly : *si $(K_i)_{i\in I}$ est une famille de convexes compacts de $\mathbb{R}^d$ telle que toute sous-famille de cardinal $d+1$ a une intersection non vide, alors il en va de même de la famille d'origine : $\cap_{i\in I} K_i \neq \emptyset$.* En appliquant ce théorème à $d = 2$ et à la famille des disques fermés $\{\overline{B}_{\mathbb{C}}(u(x), \|x + \widetilde{x}\|)\}_{x\in X}$, on voit que pour démontrer Hahn–Banach complexe, il suffit de montrer que pour tous $x, y, z \in X$,

$$\overline{B}_{\mathbb{C}}(u(x), \|x + \widetilde{x}\|) \cap \overline{B}_{\mathbb{C}}(u(y), \|y + \widetilde{x}\|) \cap \overline{B}_{\mathbb{C}}(u(z), \|z + \widetilde{x}\|) \neq \emptyset.$$

Or ceci découle du lemme suivant : *Soient $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ et $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}_+$, alors l'intersection $\overline{B}_{\mathbb{C}}(a_1, r_1) \cap \overline{B}_{\mathbb{C}}(a_2, r_2) \cap \overline{B}_{\mathbb{C}}(a_3, r_3)$ est non vide ssi pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, on a $|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3| \leq |\lambda_1| r_1 + |\lambda_2| r_2 + |\lambda_3| r_3$.* La condition de ce lemme est ici réalisée car

$$\begin{aligned} |\lambda_1 u(x) + \lambda_2 u(y) + \lambda_3 u(z)| &\leq \|\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z\| \\ &= \|\lambda_1(x + \widetilde{x}) + \lambda_2(y + \widetilde{x}) + \lambda_3(z + \widetilde{x})\| \\ &\leq |\lambda_1|\|x + \widetilde{x}\| + |\lambda_2|\|y + \widetilde{x}\| + |\lambda_3|\|z + \widetilde{x}\|. \end{aligned}$$

▴ compléments

Corollaire 6.3.3. Isométrie de l'injection canonique dans le bidual.

Si X est un espace vectoriel normé et $X'' = (X')'$ est son bidual, alors l'injection canonique $\iota : X \to X''$, définie pour tout $x \in X$ par $\iota(x) : x' \in X' \mapsto x'(x)$, est une isométrie linéaire : $\|\iota(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$.

Notons que la propriété $\|\iota(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$ est strictement plus forte que $\|\iota\| = 1$.

Preuve. Soit $x \in X$. On a $|x'(x)| \leq \|x'\|\|x\|$ donc $\|\iota(x)\| \leq \|x\|$. Pour établir l'égalité, considérons la forme linéaire $\lambda x \mapsto \lambda\|x\|$ sur le sous-espace unidimensionnel $\mathbb{K}x := \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\}$ de X. Sa norme vaut 1. Soit u_x son prolongement à X tel que $\|u_x\| = 1$, par le théorème de Hahn–Banach. Alors $\|\iota(x)\| \geq |u_x(x)|/\|u_x\| = \|x\|$. □

Corollaire 6.3.4. Le dual de $\ell^\infty = (\ell^1)'$ est strictement plus gros que ℓ^1.

L'application $\Phi : \ell^1 \to (\ell^\infty)'$, $\Phi(y)(x) := \sum_n x_n y_n$ est une isométrie linéaire non surjective.
En d'autres termes $\ell^1 \subsetneq (\ell^\infty)' = (\ell^1)''$, en d'autres termes ℓ^1 n'est pas pas réflexif.

Ce résultat complète utilement le théorème 6.1.7 avec le cas $p = \infty$ ($q = 1$). Ici $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Notons que $\Phi(y)(x) := \sum_n x_n y_n$ est bijective comme application $\ell^\infty \to (\ell^1)'$ et plus généralement $\ell^q \to (\ell^p)'$ avec $p \in [1, \infty)$ et $q := 1/(1 - 1/p)$, mais n'est qu'injective vue comme application $\ell^1 \to (\ell^\infty)'$.

Preuve. La linéarité de Φ est immédiate. Le fait que Φ est une isométrie (donc injective) vient de l'inégalité de Hölder $|\Phi(y)(x)| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$ et de son cas d'égalité $x_n = \frac{|y_n|}{y_n}\mathbf{1}_{y_n\neq 0}$, qui donne $\|\Phi(y)\| = \|y\|_1$. Reste à montrer que Φ n'est pas surjective. Considérons le sous-espace suivant de $\widetilde{X} := \ell^\infty$:

$$X := \Big\{(x_n) : x_* := \lim_{n\to\infty} x_n \text{ existe}\Big\}.$$

L'application $u : x \in X \mapsto x_*$ est linéaire et bornée, de norme 1. Grâce au théorème de Hahn–Banach (pour l'espace de Banach non séparable ℓ^∞), elle se prolonge[10] en $\widetilde{u} : \widetilde{X} := \ell^\infty \to \mathbb{K}$ avec $|\widetilde{u}(x)| \leq \|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$ et $\widetilde{u}(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ si (x_n) converge. On a donc construit une « limite » à toutes les suites bornées, qui respecte la linéarité, et qui coïncide avec la limite usuelle pour les suites convergentes. On en déduit que Φ n'est pas surjective, car si on avait $\widetilde{u} = \Phi(y)$ pour un certain $(y_n) \in \ell^1$, alors en considérant $x_n := \alpha \mathbf{1}_{n\geq m}$ pour m et $\alpha \neq 0$ fixés, on aurait $\alpha = u(x) = \widetilde{u}(x) = \Phi(y)(x) = \alpha \sum_{n\geq m} y_n \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, contradiction. □

6.4 Théorème de Banach–Schauder[11] (application ouverte, graphe fermé)

Théorème 6.4.1. de Banach–Schauder ou de l'application ouverte.

Si X et Y sont des Banach et si $u \in L(X,Y)$ est surjective alors u est une application ouverte : pour tout ouvert O dans X, $u(O)$ est ouvert dans Y.

Preuve. Il suffit d'établir qu'il existe $r > 0$ tel que

$$B_Y(0,r) \subset u(B_X(0,1))$$

car cela donnerait, par linéarité, pour tout $\eta > 0$, un $\varepsilon > 0$ tel que $B_Y(0,\varepsilon) \subset u(B_X(0,\eta))$, puis $B_Y(u(x),\varepsilon) = u(x) + B_Y(0,\varepsilon) \subset u(x) + u(B_X(0,\eta)) = u(B_X(x,\eta))$ pour tout x, et donc que $u(O)$ est ouvert si O est ouvert. Pour ce faire, introduisons pour commencer le fermé

$$F := \overline{u(B_X(0,1))}.$$

Comme u est linéaire et surjective, on a $\cup_n (nF) = Y \neq \emptyset$, et comme Y est un Banach, il est complet, et le théorème de Baire (théorème 3.4.1) indique qu'il existe n tel que nF est d'intérieur non vide. Par linéarité, on a donc que F est d'intérieur non vide. Il existe donc y et $r > 0$ tels que $B_Y(y,r) \subset F$, et comme $-F = F$, on a également $B_Y(-y,r) \subset F$, puis par linéarité

$$B_Y(0,r) \subset F$$

car si $\|z\| < r$ alors $2z = z + y + z - y \in B_Y(y,r) + B_Y(-y,r) \subset F + F \subset 2F$.

Il reste à remplacer $F = \overline{u(B_X(0,1))}$ par $u(B_X(0,1))$. Fixons $y \in B_Y(0,r)$, et construisons un $x \in B_X(0,1)$ tel que $y = u(x)$. Comme $\|y\| < r$, il existe $p \in (0,1)$ tel que $\|y\| < pr$, et ce petit gain rendu possible par la nature ouverte de la condition va s'avérer crucial. On procède maintenant itérativement. Comme $y_0 := y/p \in B_Y(0,r) \subset F$, il peut être approché par un $u(x_0)$, $\|x_0\| < 1$, avec une précision arbitraire, en particulier il existe x_0 tel que $\|x_0\| < 1$ et[12] $\|y_0 - u(x_0)\| < qr$ avec un paramètre $q \in (0,1)$ arbitraire qui va s'avérer crucial, à fixer plus tard. Comme $y_1 := (y_0 - u(x_0))/q \in B_Y(0,r) \subset F$, on peut repérer le procédé avec un x_1, etc. Cette itération construit par récurrence des suites (y_n) et (x_n) telles que

$$\|x_n\| < 1, \quad \|y_n - u(x_n)\| < qr, \quad y_{n+1} = (y_n - u(x_n))/q.$$

Par construction et linéarité de u on a

$$y_0 = u(x_0) + qy_1 = u(x_0) + qu(x_1) + q^2 y_2 = \cdots = u(x_0 + qx_1 + \cdots + q^n x_n) + q^{n+1} y_{n+1}.$$

Comme $\sum_n \|q^n x_n\| \leq (1-q)^{-1} < \infty$ car $q \in (0,1)$ et comme X est un Banach, la série $\sum_n q^n x_n$ converge (théorème 3.2.4). Sa somme $x_* := \sum_n q^n x_n$ vérifie $\|x_*\| \leq (1-q)^{-1}$. D'autre part, comme $\|y_{n+1}\| = \|y_n - u(x_n)\|/q < r$, on a $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} y_{n+1} = 0$, et le passage à la limite $n \to \infty$ dans la formule $y_0 = \cdots$ ci-dessus et la continuité de u donnent $y_0 = u(x_*)$, et donc $y = py_0 = u(x)$ où $x := px_*$. Enfin comme $\|x\| = p\|x_*\| \leq p(1-q)^{-1}$, le choix (par exemple) $q = 1 - \sqrt{p} \in (0,1)$ donne $\|x\| \leq \sqrt{p} < 1$, et on a bien $y \in u(B_X(0,1))$. □

10. L'espace $X \subset \ell^\infty$ des suites convergentes s'identifie à l'espace des fonctions continues sur le compactifié d'Alexandrov $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. La topologie sur cet espace est métrisable, et par un théorème de Riesz, les formes linéaires sur X sont identifiables à des mesures sur $\overline{\mathbb{N}}$, et la forme linéaire $\widetilde{u}$ correspond à la masse de Dirac en ∞. Elle respecte la structure additive mais pas forcément la structure produit, c'est-à-dire qu'on n'a pas forcément $\widetilde{u}(xy) = \widetilde{u}(x)\widetilde{u}(y)$, de même on n'a pas forcément $\widetilde{u}(f(x)) = f(\widetilde{u}(x))$ pour tout f. Malgré tout il est possible de construire de telles fonctionnelles : ce sont des ultrafiltres.

11. Démontré dans les années 1920 par Stefan Banach et Juliusz Schauder.

12. On pourrait utiliser $q_n r$ et découvrir ensuite que le choix $q_n = q \in (0,1)$ est efficace et agréable.

Corollaire 6.4.2. de Banach–Schauder.

- (**inverse continu**) Si X et Y sont des Banach et $u \in L(X,Y)$ est bijective alors $u^{-1} \in L(Y,X)$. On parle également de théorème d'isomorphisme de Banach (entre X et Y).
- (**équivalence de normes**) Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes qui font d'un même espace vectoriel normé X un Banach. S'il existe une constante $c > 0$ telle que[a] $\|\cdot\| \leq c\|\cdot\|'$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\cdot\|' \leq C\|\cdot\|$. En d'autres termes, si une topologie banachique est renforcée ou affaiblie par une autre, elles sont en fait équivalentes ![b] Pour affaiblir strictement une topologie banachique par une topologie métrique, il faut renoncer au caractère complet, ou normé.
- (**théorème du graphe fermé**) Si X et Y Banach et $u : X \to Y$ linéaire alors : $u \in L(X,Y)$ ssi le graphe $G_u := \{(x,u(x)) : x \in X\}$ de u est fermé dans $X \times Y$.
- (**structure**) Tout Banach séparable est isomorphe à un quotient de ℓ^1 par un sous-espace fermé.

a. L'inégalité $\|\cdot\| \leq c\|\cdot\|'$ est équivalente à dire que la topologie de $\|\cdot\|'$ est plus fine que celle de $\|\cdot\|$, et cela ne fait pas appel à la complétude. De même deux normes sur un espace vectoriel normé sont équivalentes c'est-à-dire $\|\cdot\| \leq c\|\cdot\|' \leq cC\|\cdot\|$ ssi elles engendrent la même topologie, et ceci correspond à dire que l'application identité est un homéomorphisme linéaire.

b. Les exemples immédiats liés aux normes $\|\cdot\|_p$ font en fait émerger des espaces vectoriels normés incomplets !

Preuve.

- Immédiat.
- Utiliser l'identité entre les deux Banach $(X,\|\cdot\|)$ et $(X,\|\cdot\|')$.
- Si u est continue alors G_u est fermé dans $X \times Y$, car $(x_n,u(x_n)) \to (x,y)$ implique $u(x_n) \to u(x)$ car u est continu et $y = u(x)$ par unicité de la limite. Cela ne fait pas appel à la nature banachique de X et Y et en particulier pas appel au théorème de Banach–Schauder. Réciproquement, si G_u est fermé, alors définissons $\|x\|_u := \|x\| + \|u(x)\|$ pour tout $x \in X$. Comme $\|\cdot\|_u \geq \|\cdot\|$, il suffit d'établir que X est complet pour $\|\cdot\|_u$ pour en déduire par l'item précédent qu'il existe $c_u > 0$ telle que $\|\cdot\|_u \leq c_u\|\cdot\|$. Soit (x_n) une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_u$, alors (x_n) et $(u(x_n))$ sont de Cauchy dans X et Y, d'où $x_n \to x \in X$ et $u(x_n) \to y \in Y$. Or comme G_u est fermé, il vient $y = u(x)$, donc $\|x_n - x\|_u = \|x_n - x\| + \|u(x_n - x)\| = \|x_n - x\| + \|u(x_n) - y\| \to 0$.
- Vu en TD8.

□

6.5 Algèbres de Banach, rayon spectral, inverse

Lu 09/11

Définition 6.5.1. Algèbre de Banach et rayon spectral.

Si X est un Banach on définit l'espace vectoriel $L(X) := L(X,X)$ normé par $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.
Le produit naturel $uv = u \circ v$ en fait une algèbre de Banach : $\|uv\| \leq \|u\|\|v\|$.
Le rayon spectral de $u \in L(X)$ est $\rho(u) := \lim_{n\to\infty} \|u^n\|^{1/n} \leq \|u\|$.

- La formule de $\rho(u)$ fait sens par sous-additivité car $\|u^{n+m}\| \leq \|u^n\|\|u^m\|$. Lemme de Fekete : si (a_n) est sous-additive ($a_{n+m} \leq a_n + a_m$) alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}a_n = \inf_n \frac{1}{n}a_n$. On prend $a_n = \log\|u^n\|$.
- Le rayon spectral reste inchangé avec une norme équivalente : $\|u^n\|^{1/n} \leq (c\|u^n\|)^{1/n} \sim \|u^n\|^{1/n}$ car $c^{1/n} = \exp(\frac{1}{n}\log(c)) \to 1$. En particulier, en dimension finie, comme toutes les normes sont équivalentes, peu importe la norme utilisée pour définir le rayon spectral dans ce cas.
- Ces algèbres d'opérateurs (non commutatives) généralisent à la dimension infinie les algèbres de matrices. Elles constituent un point de rencontre entre algèbre et analyse. En dimension finie, l'équivalence des normes, qui découle de la compacité de la boule unité, fait disparaître l'analyse pour laisser toute la place à l'algèbre linéaire, tandis qu'en dimension infinie, le rôle de la norme donne force à l'analyse.
- Lorsque X est de dimension n finie, $L(X)$ est isomorphe aux matrices $n \times n$, et la décomposition unitaire de Schur ou celle de Jordan indiquent que le rayon spectral est égal au maximum du module des valeurs propres (racines complexes du polynôme caractéristique).
- Lorsque X est de dimension infinie, il n'y a pas vraiment d'analogue de la décomposition de Jordan, et les opérateurs bornés peuvent avoir une structure compliquée. À titre d'exemple, considérons l'opérateur de décalage vers la gauche (*backward shift*) $u : \ell^2 \to \ell^2$ défini par $(x_0,x_1,x_2,\dots) \mapsto (x_1,x_2,x_3,\dots)$. C'est un analogue d'un unique bloc de Jordan de dimension infinie associé à $\lambda = 0$. Cependant pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$, on peut établir que $x^{(\lambda)} := (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ vérifie $u(x^{(\lambda)}) = \lambda x^{(\lambda)}$. À l'opposé, pour l'opérateur de décalage vers la droite $v : \ell^2 \to \ell^2$ défini par $(x_0,x_1,x_2,\dots) \mapsto (0,x_0,x_1,x_2,\dots)$, on peut vérifier que

pour tout $\lambda \neq 0$ il n'existe pas de $x \in \ell^2$ non trivial tel que $u(x) = \lambda x$. Ceci suggère que l'équation aux valeurs propres n'est pas une bonne manière de définir le spectre des opérateurs en dimension infinie. Il s'avère qu'une bonne notion de spectre est[13]

$$\mathrm{spec}(u) := \{\lambda \in \mathbb{C} : u - \lambda \mathrm{id} \text{ n'est pas inversible à inverse continu}\}.$$

On montre que[14] $\rho(u) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{spec}(u)\}$. On dit que $\mathbb{C} \setminus \mathrm{spec}(u)$ est l'*ensemble résolvant* de u, et $R_u(z) := (u - z\mathrm{id})^{-1}$ est la *résolvante* de u en $z \notin \mathrm{spec}(u)$. En physique mathématique, les opérateurs pertinents sont souvent non bornés, c'est-à-dire définis sur un sous-espace dense appelé domaine d'un espace ambiant souvent hilbertien, comme par exemple le laplacien Δ posé dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ avec pour domaine $\mathcal{C}^2_c(\mathbb{R}^n)$. On pourra consulter [39] et [31] pour la théorie spectrale des opérateurs et ses applications en physique mathématique et notamment en mathématisation de la physique quantique.

Théorème 6.5.2. Inverse et groupe linéaire dans les Banach.

Soit X un Banach et $u \in L(X)$.

(i) Si $\rho(u) < 1$ alors $\mathrm{id} - u$ est inversible dans $L(X)$ et de plus (avec $u^0 := \mathrm{id}$)

$$(\mathrm{id} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n.$$

(ii) Si u est inversible et $\|v\| < \|u^{-1}\|^{-1}$ alors $u - v$ est inversible dans $L(X)$ et

$$(u - v)^{-1} = (\mathrm{id} - u^{-1}v)^{-1}u^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (u^{-1}v)^n u^{-1}.$$

(iii) L'ensemble $\mathrm{Iso}(X) := \{u \in L(X) : u \text{ inversible}\} = \{u \in L(X) : u^{-1} \in L(X)\}$ est ouvert.
En particulier $u \in \mathrm{Iso}(X) \mapsto u^{-1} \in \mathrm{Iso}(X)$ est un homéomorphisme involutif.

Preuve.

(i) Comme[15] $\rho(u) < 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(u) + \varepsilon < 1$, tandis que pour n assez grand, $\|u^n\| \leq (\rho(u) + \varepsilon)^n$. Donc $\sum_n \|u^n\| \leq \sum_n (\rho(u) + \varepsilon)^n < \infty$ et donc, comme X est un Banach, $\sum_n u^n$ converge (théorème 3.2.4). La formule $(\mathrm{id} - u)\sum_{n=0}^{\infty} u^n = (\sum_{n=0}^{\infty} u^n)(\mathrm{id} - u) = \mathrm{id}$ est immédiate.

(ii) Notons que $u^{-1} \in L(X)$ par le théorème d'isomorphisme de Banach, conséquence du théorème de l'application ouverte de Banach–Schauder. Pour obtenir le résultat souhaité, il suffit d'utiliser (i) avec $u^{-1}v$ car $\rho(u^{-1}v) \leq \|u^{-1}v\| \leq \|u^{-1}\|\|v\| < 1$, et $(\mathrm{id} - u^{-1}v)^{-1} = (u - v)^{-1}u$.

(iii) Le fait que pour tout $u \in L(X)$, la condition u^{-1} existe implique $u^{-1} \in L(X)$ découle du théorème 6.4.1 de l'application ouverte de Banach–Schauder. Enfin, le fait que l'ensemble est ouvert vient du fait que si $u \in L(X)$ est inversible et $w \in B_{L(X)}(u, \|u^{-1}\|^{-1})$ alors $w = u - v$, et par (ii), w est inversible. De plus $w^{-1} - u^{-1} = w^{-1}(u - w)u^{-1}$, et la série de Neumann donne une borne locale uniforme sur $\|w^{-1}\|$: l'application inverse est donc continue.

□

6.6 Intégrale de Riemann pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans un Banach

Soit X un Banach et $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{A}([a, b], X) \subset \mathcal{C}([a, b], X)$ l'ensemble des fonctions continues affines par morceaux, c'est-à-dire les $f : [a, b] \to X$ pour lesquels il existe une subdivision $a =: a_0 < a_1 < \cdots < a_n := b$ et des $f_i \in X$, $0 \leq i \leq n - 1$, tels que $f(x) = f_i + t(f_{i+1} - f_i) \in X$ pour tout $x = a_i + t(a_{i+1} - a_i) \in [a_i, a_{i+1})$, $t \in [0, 1)$. On peut vérifier que cet ensemble $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([a, b], X)$.

Comme $[a, b]$ est compact, l'espace métrique $\mathcal{C}([a, b], X)$ est normé par $\|f\| := \sup_{x \in [a,b]} \|f(x)\|$ qui est un max donc fini. Le théorème 5.1.2 de Heine implique que $\mathcal{A}([a, b], X)$ est dense dans $\mathcal{C}([a, b], X)$.

D'autre part, comme X est complet car Banach, l'espace $\mathcal{C}([a, b], X)$ est un Banach.

13. Dans le cadre des Banach, la continuité de l'inverse, s'il existe, est automatique par le théorème de Banach–Schauder.
14. Vu en DM3 bis.
15. La condition $\rho(u) < 1$ permet un contrôle sous-géométrique de $\|u^n\|$ pour n assez grand. Notons que $\|u^n\| \leq \|u\|^n$ permet d'exploiter directement $\|u\| < 1$, mais cette condition est plus forte que $\rho(u) < 1$ car $\rho(u) \leq \|u\|$.

Théorème 6.6.1. Intégrale de Riemann des fonctions continues $[a,b] \to X$ Banach.

Il existe une unique application linéaire continue $I : \mathcal{C}([a,b],X) \to X$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{A}([a,b],X)$ associée à une subdivision $a =: a_0 < \cdots < a_n := b$ et à des valeurs $f_0, \dots, f_n \in X$,

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \frac{f_i + f_{i+1}}{2}.$$

On note $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t := I(f)$. De plus, pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b],X)$, on a[a]

$$\left\| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\mathrm{d}t, \quad \text{en particulier} \quad \left\| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right\| \leq \|f\|_\infty (b-a).$$

a. Le membre de droite est l'intégrale de Riemann de la fonction réelle continue de la variable réelle $\|f\|$.

Le même procédé permet de construire les intégrales stochastiques (Itô, Stratonovich, …).

Ici l'ambition est réduite à l'intégration des fonctions continues, ce qui explique la considération des fonctions affines par morceaux plutôt que les fonctions étagées. Pour une fonction affine par morceaux, l'intégrale s'obtient, dans le cas visuel de $X = \mathbb{R}$, par la formule des trapèzes $f_i + \frac{f_{i+1}-f_i}{2} = \frac{f_i+f_{i+1}}{2}$, d'où la formule.

Lorsque $\dim X < \infty$ ($\mathbb{R}^n$), on peut utiliser une intégration de Riemann coordonnée par coordonnée.

Preuve. La formule qui donne $I(f)$ pour $f \in \mathcal{A}([a,b],X)$ définit une application linéaire, et on peut vérifier qu'elle est Lipschitz pour la métrique de $\mathcal{C}([a,b],X)$ donc uniformément continue :

$$\|I(f) - I(g)\| \leq (b-a)\|f-g\|.$$

Alternativement on peut montrer qu'elle est continue pour la topologie de $\mathcal{C}([a,b],X)$ et faire appel au lemme 6.1.2 pour la continuité uniforme. Comme $\mathcal{A}([a,b],X)$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b],X)$ complet, d'après le lemme 3.3.4, elle possède donc un prolongement unique à tout $\mathcal{C}([a,b],X)$. La formule suivante avec les normes s'obtient d'abord pour $f \in \mathcal{A}([a,b],X)$ puis par densité et continuité pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b],X)$. □

▼ compléments

Remarque 6.6.2. Intégrale de Riemann via sommes de Riemann.

Il est alternativement possible de passer par les sommes de Riemann : si $f : [a,b] \to X$ est continue avec $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et X Banach, alors on montre qu'il existe un unique élément de X noté $I(f)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision $a =: a_0 < \cdots < a_n := b$ de $[a,b]$ telle que $\max_i(a_{i+1} - a_i) < \eta$ et pour tous $t_i \in [a_i, a_{i+1})$, $0 \leq i \leq n-1$, on a

$$\left\| \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(t_i) - I(f) \right\| < \varepsilon.$$

L'unicité est immédiate et l'existence provient de la convergence des suites de Cauchy de subdivisions marquées (les marques sont les t_i) qui est garantie par le caractère complet de X.

Pour la culture : la version Banach de l'intégrale de Lebesgue est appelée intégrale de Bochner.

▲ compléments

Chapitre 7

Espaces de Hilbert

Pour aller plus loin : cours du DMA d'analyse fonctionnelle, mais aussi de sciences des données.

Ils sont essentiels : analyse fonctionnelle, analyse des équations aux dérivées partielles, probabilités et statistique, théorie du signal, sciences des données, théorie spectrale et mécanique quantique [31], etc.

Nos espaces de Hilbert favoris : $\ell^2(I,\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^I$, I au plus dénombrable, munis de $\langle x, y\rangle := \sum_n x_n\overline{y_n}$.

Si I est muni de la tribu discrète et de la mesure de comptage dn alors

$$\ell^2(I,\mathbb{K}) = L^2(I,\mathrm{d}n,\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \sum_n x_n\overline{y_n} = \int x_n\overline{y_n}\mathrm{d}n.$$

7.1 Projection sur un convexe fermé

Théorème 7.1.1. Projection sur un convexe fermé.

Soit X Hilbert et $C \subset X$ convexe[a] fermé non vide. Alors :
Pour tout $x \in X$, il existe un unique $p_C(x) \in C$ vérifiant les deux propositions équivalents :
— $\|x - p_C(x)\| = d(x,C) = \inf_{z\in C}\|x - z\|$;
— $\Re\langle x - p_C(x), z - p_C(x)\rangle \leq 0$ pour tout $z \in C$.

a. Signifie que pour tous $x, y \in C$ et $t \in [0,1]$, $(1-t)x + ty \in C$, autrement dit $[x,y] \subset C$.

Si $x \in C$ alors $x = p_C(x)$ et si $x \notin C$ alors $p_C(x)$ est sur la frontière de C.

Si C n'est pas fermé, il est naturel de considérer $p_{\overline{C}}$, vu que l'adhérence d'un convexe est convexe.

Preuve. Existence. L'idée est d'établir qu'une suite minimisante est de Cauchy. Si (y_n) dans C vérifie $\|x - y_n\| \to d(x,C)$, alors $2(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2) = \|2x - y_n - y_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2$ par l'identité du parallélogramme[1], et en utilisant le fait que $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in C$ car C est convexe, on obtient

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= 2(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2) - 4\|x - \tfrac{1}{2}(y_n+y_m)\|^2 \\ &\leq 2(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2) - 4d(x,C)^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Donc (y_n) est de Cauchy, et comme X est complet et C fermé, $y_n \to y \in C$ et on pose $p_C(x) := y$.

Unicité. Si $d(x,C) = \|x - y_1\| = \|x - y_2\|$ alors en utilisant $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \in C$ car C est convexe,

$$\|y_1 - y_2\|^2 = 2(\|y_1 - x\|^2 + \|x - y_2\|^2) - 4\|x - \tfrac{1}{2}(y_1+y_2)\|^2 \leq 4d(x,C)^2 - 4d(x,C)^2 = 0.$$

Caractérisation. Posons $y = p_C(x)$ satisfaisant la première proposition. Soit $z \in C$ et $z_t := (1-t)y + tz \in C$ pour $t \in [0,1]$ car C est convexe. Ainsi on a[2]

$$d(x,C)^2 \leq \|x - z_t\|^2 = \|x - y\|^2 + 2\Re\langle x - y, y - z_t\rangle + \|y - z_t\|^2$$

et comme $\|x - y\|^2 = d(x,C)^2$, on obtient, pour tout $t \in [0,1]$,

$$2\Re\langle x - y, y - z_t\rangle + \|y - z_t\|^2 \geq 0,$$

1. Identité du parallélogramme des normes hilbertiennes : $\|a-b\|^2 + \|a+b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$.
2. Pour une norme hilbertienne : $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle + \|b\|^2 = \|a\|^2 + 2\Re\langle a,b\rangle + \|b\|^2$.

c'est-à-dire $2t\Re\langle x-y, z-y\rangle \leq t^2\|y-z\|^2$, d'où $\Re\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$.

Réciproquement, si $y \in C$ est tel que $\Re\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$ pour tout $z \in C$, alors

$$\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + 2\Re\langle x-y, y-z\rangle + \|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2$$

et donc $\|x-y\| = \inf_{z\in C}\|x-z\|$.

□

Corollaire 7.1.2. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

Soit X un Hilbert et $F \subset X$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors :

(i) Pour tout $x \in X$, $p_F(x)$ est caractérisé par $x - p_F(x) \perp F : \langle x - p_F(x), z\rangle = 0$ pour tout $z \in F$

(ii) $x \in X \mapsto p_F(x)$ est linéaire

(iii) p_F est 1-Lipschitz donc continue : pour tout $x \in X$, $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$

(iv) Si $\dim(F) < \infty$ et $e_1, \dots, e_n$ est une base orthonormée de F alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$.

(v) $X = F \oplus F^\perp$ via $x = p_F(x) + x - p_F(x) = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$.

Un sous-espace vectoriel est convexe, donc p_F est bien définie.
Un sous-espace vectoriel de dimension finie est toujours fermé.

Preuve.

(i) On a $\{z - p_F(x) : z \in F\} = F - p_F(x) = F$, d'où $\Re\langle x - p_F(x), z\rangle \leq 0$ pour tout $z \in F$. En appliquant cette inégalité à $-z$, on obtient $\Re\langle x - p_F(x), z\rangle = 0$. Dans le cas complexe, on l'applique aussi à iz et à $-iz$ pour annuler la partie imaginaire. Ainsi $\langle x - p_F(x), z\rangle = 0$ pour tout $z \in F$.

(ii) Pour tout $x, y \in X$, on a $\langle x - p_F(x), z\rangle = 0$ et $\langle y - p_F(y), z\rangle = 0$ pour tout $z \in F$, donc en faisant la somme, $\langle x+y-p_F(x)-p_F(y), z\rangle = 0$ pour tout $z \in F$, or ceci caractérise $p_F(x+y)$, donc $p_F(x+y) = p_F(x)+p_F(y)$. De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $0 = \lambda\langle x - p_F(x), z\rangle = \langle \lambda x - \lambda p_F(x), z\rangle$ pour tout $z \in F$, or ceci caractérise $p_F(\lambda x)$, donc $p_F(\lambda x) = \lambda p_F(x)$.

(iii) Comme $x - p_F(x) \perp F$ il vient par Pythagore $\|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2$.

(iv) Comme $e_1, \dots, e_n$ est une base orthonormée de F et comme $p_F(x) \in F$, on a $p_F(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i = \langle p_F(x), e_i\rangle = \langle p_F(x) - x + x, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle$ car $x - p_F(x) \perp F$.

(v) On a $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$, $x - p_F(x) \in F^\perp$, d'où $X = F + F^\perp$. De plus $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Pour un sous-espace vectoriel quelconque $E \subset X$, on a $E \subset (E^\perp)^\perp = \overline{E}$, $E^\perp = \overline{E}^\perp$, et $E \oplus E^\perp = X$ quand E est fermé. Ici la fermeture de F est cachée et intervient dès le départ dans la définition de $p_F(x)$.

□

7.2 Théorème de représentation de Riesz[3]

Lu 30/11

Théorème 7.2.1. de représentation de Riesz des formes linéaires continues.

Soit X Hilbert sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Alors :

(i) Pour tout $u \in X' = L(X, \mathbb{K})$, il existe un unique $a = a_u \in X$ tel que $u(x) = \langle x, a\rangle$ pour tout $x \in X$.

(ii) L'application $a \in X \mapsto \langle \cdot, a\rangle \in X'$ est un isomorphisme anti-linéaire et une isométrie.

Ainsi, un espace de Hilbert s'identifie à son dual topologique : $X' \equiv X$.
La notion de gradient abordée plus loin dans le cours exploite ce fait.
Le vecteur $a = a_u$ est le vecteur normal à l'hyperplan $\ker(u)$ d'équation $u(x) = 0$, de norme $\|u\|$.
Le dual topologique X' d'un Hilbert est un Hilbert : si $u, v \in X'$ alors $\langle u, v\rangle_{X'} := \langle a_v, a_u\rangle$.
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut choisir $u(x) = \langle a, x\rangle$ car le produit scalaire est symétrique, mais lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ l'ordre est important. En effet en choisissant $u(x) = \langle a, x\rangle$, alors u est anti-linéaire donc pas un élément de X'.

3. Parfois appelé théorème de Riesz–Fréchet, découvert indépendamment par Frigyes Riesz et Maurice Fréchet vers 1907.

Preuve. Soit $u \in X'$, $u \neq 0$. Comme $F := \ker u = u^{-1}(\{0\})$ est fermé car u est continue, le corollaire 7.1.2 donne $X = F \oplus F^\perp$. Montrons à présent que $F^\perp$ est de dimension 1. Soit $b \in F^\perp \setminus \{0\}$ avec $\|b\| = 1$. On a $u(b) \neq 0$, donc pour tout $x \in F^\perp$, $x - \frac{u(x)}{u(b)} b \in F \cap F^\perp = \{0\}$ car $u(x - \frac{u(x)}{u(b)} b) = 0$. Cela donne

$$x = \frac{u(x)}{u(b)} b,$$

et $F^\perp = \mathbb{K}b = \{\lambda b : \lambda \in \mathbb{K}\}$ est bien de dimension 1. Par conséquent, pour tout $x \in F^\perp$,

$$u(x) = u(b)\langle x, b\rangle = \langle x, a\rangle \quad \text{où} \quad a := \overline{u(b)} b.$$

Finalement, pour tout $y \in X$, on a $y = p_F(y) + p_{F^\perp}(y)$, et donc $u(y) = u(p_{F^\perp}(y)) = \langle p_{F^\perp}(y), a\rangle = \langle y, a\rangle$, car $\langle p_F(y), a\rangle = 0$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, $\|u\|_{X'} \leq \|a\|_X$, et en prenant $x = a$ l'inégalité est saturée : $\|u\|_{X'} = \|a\|_X$, d'où le caractère isométrique. L'anti-linéarité découle de celle de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. □

Le théorème de Riesz implique que les formes linéaires continues sur $X = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ sont de la forme

$$x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \mapsto \sum_n x_n \overline{y_n} \quad \text{pour un} \quad y \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}).$$

Théorème 7.2.2. Théorème de Hahn–Banach sur un Hilbert.

Si F est un sous-espace vectoriel d'un Hilbert X et $u \in L(F, \mathbb{K})$ alors il existe un unique $u_X \in X' = L(X, \mathbb{K})$ tel que $u_X|_F = u$ et $\|u_X\| = \|u\|$.

Preuve. Comme $\overline{F}$ est complet, on peut prolonger u sur $\overline{F}$ de manière unique en conservant sa norme, et donc supposer sans perte de généralité que F est fermé. Le théorème 7.2.1 de représentation de Riesz pour le Hilbert F donne un unique $a \in F \subset X$ tel que $u = \langle \cdot, a\rangle$, formule qui s'étend à X, la norme restant égale à $\|a\|$. Pour l'unicité, si $u_X \in L(X, \mathbb{K})$, par le théorème de représentation de Riesz sur X, il existe un unique $b \in X$ tel que $u_X = \langle \cdot, b\rangle$ et $\|u_X\| = \|b\|$. Ainsi si $u_X|_F = u$, alors $a - b \in F^\perp$ et si $\|u_X\| = \|u\|$, alors $\|a\| = \|b\|$, donc par Pythagore $a = b$. Ainsi, dans un Hilbert, qu'il soit séparable ou pas, le théorème de Hahn–Banach est élémentaire, et il y a unicité ! □

Théorème 7.2.3. Adjoint.

Si $u \in L(X)$ sur X Hilbert, alors il existe un unique $u^* \in L(X)$, tel que pour tous $x, y \in X$,

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle.$$

On dit que u^* est l'adjoint de u, l'analogue matriciel est la trans-conjuguée.

Preuve. Pour tout $y \in X$, $u_y := x \mapsto \langle u(x), y\rangle$ est linéaire et continue. Le théorème 7.2.1 de représentation de Riesz donne un unique $u^*(y)$ tel que $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$ pour tout $x \in X$. La linéarité de $y \mapsto u^*(y)$ est immédiate, et la continuité vient de $\|u^*(y)\| = \|u_y\| \leq \|u\|\|y\|$ (inégalité de Cauchy–Schwarz). □

Exemple 7.2.4. Exemple d'adjoints : les opérateurs de décalage.

Dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, l'adjoint de l'opérateur de décalage à gauche $u : (x_0, x_1, x_2, ...) \mapsto (x_1, x_2, x_3, ...)$ est l'opérateur de décalage à droite $u^* : (x_0, x_1, x_2, ...) \mapsto (0, x_0, x_1, ...)$:

$$\langle u(x), y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u(x)_n \overline{y_n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} \overline{y_n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{u^*(y)_n} = \langle x, u^*(y)\rangle.$$

Les opérateurs u et u^* ne sont pas inversibles :

$$uu^* = \mathrm{id} \quad \text{mais} \quad u^* u = \mathrm{id} - p_{\mathbb{K}e_0} \neq \mathrm{id}.$$

Cette dégénérescence est un effet du bord de $\mathbb{N}$. Les analogues de ces opérateurs sur $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ vérifient

$$uu^* = u^* u = \mathrm{id}.$$

Ils sont unitaires (inversibles d'inverse donné par l'adjoint). Il existe une théorie spectrale pour les opérateurs sur les Hilbert, fondamentale pour la mathématisation de la mécanique quantique, cf. [31].

Remarque 7.2.5. Autres conséquences du théorème de représentation de Riesz.

— Théorème à la Hahn–Banach : si F est un sous-espace vectoriel d'un Hilbert X tel que $\overline{F} \neq X$, alors pour tout $x \notin \overline{F}$, il existe $u \in X'$ telle que $u(x) = 1$ et $u = 0$ sur F.

Preuve. Posons $v := x - p_{\overline{F}}(x)$. Alors $v \in (\overline{F})^\perp = F^\perp$ et $v \neq 0$ puisque $x \notin \overline{F}$. La forme linéaire $u(y) := \langle y, v\rangle / \|v\|^2$ s'annule sur F et vérifie $u(x) = 1$. □

— Si F est un sous-espace vectoriel d'un Hilbert X alors F est dense ($\overline{F} = X$) ssi $F^\perp = \{0\}$.

Preuve. Si $\overline{F} = X$ alors $F^\perp = \overline{F}^\perp = X^\perp = \{0\}$. Réciproquement, si $F^\perp = \{0\}$ alors, $\overline{F} = (F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = X$. □

Exemple : le sous-espace $F := \ell_c(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ des suites nulles à partir d'un certain rang (à support compact en tant que fonctions $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$) est dense dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, donc $F^\perp = \{0\}$.

— Théorème de Lax–Milgram : si a est une forme bilinéaire continue sur un Hilbert X sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que a est coercive (ou X-elliptique) :

$$\exists c > 0, \quad \forall x \in X, \quad a(x, x) \geq c\|x\|^2,$$

alors pour tout $u \in X' = L(X, \mathbb{R})$, il existe une unique solution $x \in X$ de l'équation $a(x, y) = u(y)$ pour tout $y \in X$. De plus : $\|x\| \leq \frac{1}{c}\|u\|$.

Preuve. Par le théorème 7.2.1 (représentation de Riesz), il existe $f \in X$ et $A \in L(X)$ uniques tels que $u(y) = \langle y, f\rangle$ et $a(x, y) = \langle y, Ax\rangle$. Ainsi l'équation est équivalente à $Ax = f$, et du coup il suffit de montrer que A est bijective. Par coercivité de a et Cauchy–Schwarz,

$$c\|x\|^2 \leq a(x, x) = \langle x, Ax\rangle \leq \|Ax\|\|x\|$$

donc $\|Ax\| \geq c\|x\|$ ce qui montre que A est injective et d'image $F := A(X)$ fermée. Ainsi par le point précédent, il suffit de montrer que $F^\perp = \{0\}$ pour avoir $\overline{F} = X$ donc A surjective. Soit $x \in F^\perp$, alors $\langle x, Ax\rangle = 0$, donc $x = 0$ par ce qui précède. Finalement, $\|Ax\| = \|f\| = \|u\|$ d'où la borne sur la solution. □

Remarque : lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il faut demander que a soit une application sesquilinéaire (linéaire en la première variable, anit-linéaire en la seconde) continue, que $\Re a(x, x) \geq c\|x\|^2$ et u soit une application anti-linéaire continue.

7.3 Bases hilbertiennes

Définition 7.3.1. Bases hilbertiennes.

Une base hilbertienne d'un Hilbert X est une famille $(e_i)_{i\in I}$ finie ou pas d'éléments de X vérifiant :
— orthonormalité : $\langle e_i, e_j\rangle = \mathbf{1}_{i=j}$ pour tous $i, j \in I$
— densité : la famille $(e_i)_{i\in I}$ est totale : elle engendre un sous-espace dense ou de manière équivalente si $\langle x, e_i\rangle = 0$ pour tout $i \in I$, alors $x = 0$.

Cette notion de base incorpore de la topologie, en plus de l'algèbre.

Une base algébrique est un sous-ensemble de l'espace qui permet d'exprimer tout vecteur de l'espace comme combinaison linéaire finie de ses éléments. Une base algébrique orthonormée est hilbertienne mais la réciproque est fausse en dimension infinie. Si I est au plus dénombrable, $\ell^2(I, \mathbb{K})$ a pour base hilbertienne $(e_i)_{i\in I} = (\mathbf{1}_i)_{i\in I}$.

Théorème 7.3.2. Bases hilbertiennes : séparabilité et identité de Parseval.

(i) Un Hilbert X admet une base hilbertienne au plus dénombrable ssi il est séparable.

(ii) Tout Hilbert séparable de dimension infinie sur $\mathbb{K}$ est isomorphe isométriquement à $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$.

(iii) Si (e_n) est une base hilbertienne au plus dénombrable d'un Hilbert X alors :
— Pour tout $x \in X$, $x = \sum_n x_n e_n$ où $x_n := \langle x, e_n\rangle$
— Pour tout $x \in X$, on a l'identité de Parseval $\|x\|^2 = \sum_n |x_n|^2 = \sum_n |\langle x, e_n\rangle|^2$.
— La série $\sum_n \lambda_n e_n$ converge dans X ssi $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$.

Preuve.

(i) Si X est séparable, alors pour une suite $(x_n)_n$ dense dans X, l'algorithme d'orthonormalisation de Gram–Schmidt permet de construire une suite orthonormée $(e_n)_n$ dans X telle que pour tout n, $\mathrm{vect}(x_0,\dots,x_n) \subset \mathrm{vect}(e_0,\dots,e_n)$, donc $(e_n)_n$ est une base hilbertienne. Réciproquement, si $(e_n)_n$ est une base hilbertienne, en notant $F_n := \mathrm{vect}_{\mathbb{Q}}(e_0,\dots,e_n) \equiv \mathbb{Q}^{n+1} \equiv \mathbb{N}$, alors $\cup_n F_n$ est dénombrable et dense dans X, donc X est séparable.

(ii) Identifier les bases hilbertiennes !

(iii) — Soit $x \in X$. Comme $\cup_n \mathrm{vect}(e_0,\dots,e_n)$ est dense, il existe des scalaires $(\lambda_{n,k})_{0\le k\le n}$ tels que $\sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} e_k \to x$. Soit $p_n := p_{\mathrm{vect}(e_0,\dots,e_n)}$ la projection sur le sous-espace vectoriel engendré par les n premiers éléments. Donc $\|x - p_n(x)\| \le \|x - \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} e_k\| \to 0$. Donc $p_n(x) \to x$. Or $p_n(x) = \sum_{k=0}^n x_k e_k$ car $e_0,\dots,e_n$ est une base orthonormée de $\mathrm{vect}(e_0,\dots,e_n)$.
— On a $\|p_n(x)\|^2 = \sum_{k=0}^n |x_k|^2$ (Pythagore), ce qui donne Parseval quand $n \to \infty$.
— Si $\sum_n \lambda_n e_n$ converge alors la continuité de la norme donne par orthonormalité

$$\|\sum_n \lambda_n e_n\|^2 = \|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \lambda_k e_k\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=0}^n \lambda_k e_k\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n |\lambda_k|^2.$$

Réciproquement, si $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$, alors $\|\sum_{k=m}^n \lambda_k e_k\|^2 = \sum_{k=m}^n |\lambda_k|^2 \to 0$ quand $m \to \infty$ par orthonormalité, donc $(\sum_{k=0}^n \lambda_k e_k)$ est de Cauchy, donc elle converge car X est complet.

□

Exemple 7.3.3. Bases hilbertiennes.

— $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ et leur base canonique (dimension finie).
— $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ avec $e_n := \mathbf{1}_n$ (dimension infinie).
— Séries de Fourier : $L^2(S^1,\mathbb{C})$ et $e_n(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$, $n \in \mathbb{Z}$.
— $L^2([-1,1],\mathbb{R})$ avec pour e_n les polynômes orthogonaux de Legendre.
Algorithme d'orthonormalisation de Gram–Schmidt ($\mathbb{R}[x]$ est dense par Stone–Weierstrass).



FIGURE 7.1 – Le café écossais (*scottish café*) de Lwów (Lvov ou Lviv), en Pologne avant 1945 et depuis en Ukraine. Haut lieu des discussions mathématiques notamment autour de l'analyse fonctionnelle, avec Stefan Banach, Mark Kac, Kazimierz Kuratowski, Stanisław Mazur, Stanisław Saks, Juliusz Schauder, Hugo Steinhaus, Stanisław Ulam, et bien d'autres de l'*école de mathématiques de Lwów*. Pour en savoir plus, jeter un œil par curiosité au *scottish book* [33] et aux auto-biographies de Ulam [47] et de Kac [27].

Deuxième partie

Calcul différentiel

Le calcul différentiel présenté ici généralise la notion de dérivée à des fonctions définies sur des espaces vectoriels de dimension quelconque, voire infinie (espace de Banach ou de Hilbert). Ces notes abordent également le thème des équations différentielles ordinaires, leur résolution, leur théorie linéaire à base d'algèbre linéaire, leur dépendance aux conditions initiales, et leur stabilité. Les EDO sont dans toutes les sciences quantitatives. Cette partie du cours est un point de contact avec l'analyse fonctionnelle, l'analyse des équations aux dérivées partielles, l'optimisation, la topologie différentielle, et la géométrie différentielle, et les probabilités. Elle fait partie du bagage généraliste des mathématiciennes et mathématiciens contemporains.

Le lemme fondamental de la partie dérivation dans les espaces vectoriels normés est l'inégalité des accroissements finis.

Le lemme fondamental de la partie équations différentielles est le lemme de Grönwall.

Le calcul différentiel fait un lien naturel entre topologie générale et géométrie différentielle.






FIGURE 7.2 – Quelques grands noms du calcul différentiel : Isaac Newton (1642 – 1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), et Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832 – 1903). La question de la primauté de l'invention du calcul infinitésimal entre Newton et Leibniz a donné lieu à d'intenses querelles, commencées de leur vivant. À noter que le calcul différentiel est passablement antérieur à la topologie, du moins au sens moderne, voir par exemple [22].

Chapitre 8

Dérivation dans les espaces vectoriels normés

Me 02/12

Pour aller plus loin : [11], et cours du DMA d'analyse complexe, et de géométrie différentielle.

Si X est un espace vectoriel normé, l'application $f : u \in L(X) \mapsto u^2 \in L(X)$ vérifie, pour tous $a, h \in L(X)$, $f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + ah + ha + h^2 = f(a) + ah + ha + o(\|h\|)$ par sous-multiplicativité de la norme, et $h \in L(X) \mapsto ah + ha$ est linéaire et continue, à nouveau par sous-multiplicativité de la norme. Il s'agit d'une linéarisation de f au point a, telle est l'idée de dérivation au sens de Fréchet. Dans le même esprit, si X est un Hilbert réel, l'application $f : x \in X \mapsto \|x\|^2 \in \mathbb{R}$ vérifie, pour tous $a, h \in X$, $f(a+h) = \|a\|^2 + 2\langle a, h\rangle + \|h\|^2 = f(a) + 2\langle a, h\rangle + o(\|h\|)$, et $h \mapsto 2\langle a, h\rangle$ est linéaire et continue par l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Par définition, une fonction $f : O \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable ou dérivable en $a \in O$ lorsqu'il existe $f'(a) \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_{x\to a}(|x-a|)$, et $f'(a)$ est la pente de la droite tangente en a à la courbe représentative de f. Pour généraliser cela au cadre des espaces de Banach, on conserve l'idée d'approcher f au point a par une application linéaire continue, qui généralise $h \mapsto f'(a)h$.

Idée clé du chapitre : notion d'approximation locale par linéarisation.

Dans tout ce chapitre, et sauf mention explicite du contraire, on convient que $X, X_1, \dots, X_n, Y, Z$ désignent des espaces vectoriels normés réels : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dans les applications, la plupart des espaces vectoriels normés utiles sont complets. Malgré tout, ici les énoncés et preuves nécessitant Banach ou Hilbert sont bien identifiés et explicités.

8.1 Dérivée, dérivées partielles, gradient

Définition 8.1.1. Dérivabilité ou différentiabilité (au sens de Fréchet).

Soit $O \subset X$ un ouvert (désignera toujours un ouvert dans ce chapitre !). Une application $f : O \to Y$ est dérivable ou différentiable (au sens de Fréchet) au point $a \in O$ lorsqu'il existe $u \in L(X, Y)$ tel que

$$f(x) = f(a) + u(x-a) + o(\|x-a\|) \quad \text{quand} \quad x \to a$$

On note $(Df)(a) := u$, et on dit que $(Df)(a)$ est la dérivée ou différentielle de f en a. On dit que f est $\mathcal{C}^1(O, Y)$ quand f est dérivable en tout point de O et que $Df : O \to L(X, Y)$ est continue.

(i) La notation asymptotique signifie $o(\|x-a\|) := \|x-a\|\varepsilon(x-a)$ avec $\varepsilon(x-a) \to 0$ quand $x \to a$.

(ii) De manière équivalente et utile : $f(a+h) = f(a) + u(h) + o(\|h\|)$ quand $h \to 0$.
C'est une tangence en a de f et d'une application affine continue : $f(a+h) - (u(h) + f(a)) = o(\|h\|)$.
D'autre part, et en particulier, $\|f(a+h) - f(a) - (Df)(a)(h)\|/\|h\| \leq \varepsilon(h)$ quand $h \to 0$.

(iii) $(Df)(a)$ est unique car si $u_1, u_2 \in L(X, Y)$ vérifient la propriété alors $\|(u_1 - u_2)(h)\|/\|h\| \to 0$ quand $h \to 0$, or ce quotient est invariant par dilatation de h, donc $\|u_1 - u_2\| = 0$, c'est-à-dire que $u_1 = u_2$. Alternativement, en fixant $h' \in X$ et en prenant $h = th'$ avec $t \in \mathbb{R}$, on obtient $t(u_1 - u_2)(h') = o_{t\to 0}(t)$ donc $(u_1 - u_2)(h') = \varepsilon_{t\to 0}(t) = 0$ donc $(u_1 - u_2)(h') = 0$, et comme h' est quelconque, $u_1 - u_2 = 0$.

(iv) On retrouve la dérivabilité classique quand $X = Y = \mathbb{R}$.

(v) Dérivable en a implique continue en a car u est continue (d'où l'intérêt de la définition).

(vi) Si f est linéaire et continue alors elle est dérivable partout et $(Df)(a)(h) = f(h)$, $a, h \in X$.

(vii) Comme l'identité est linéaire, les normes sont topologiquement équivalentes ssi elles sont équivalentes à constantes multiplicatives près. En dimension finie, les boules fermées sont compactes, toutes les normes sont équivalentes, et il n'existe qu'une seule topologie d'espace vectoriel normé. Ce n'est plus le cas en dimension infinie[1].

1. De plus, le théorème d'isomorphisme de Banach qui découle du théorème 6.4.1 de Banach–Schauder (application ouverte) implique que les topologies banachiques distinctes ne sont pas comparables : plus fine ou moins fine implique identique.

Dans la définition de la dérivabilité ci-dessus, la norme sur Y intervient pour la continuité de $Df(a)$ tandis que celle sur X intervient à la fois pour cette continuité et pour quantifier l'erreur $o(\|x-a\|)$. La dérivabilité et la dérivée restent inchangées si l'on remplace les normes sur X et Y par des normes équivalentes. Dérivabilité et dérivée sont topologiques et ne dépendent pas des normes équivalentes choisies. En revanche, en dimension infinie, des topologies d'espace vectoriel normé distinctes sont possibles, correspondant à des normes non équivalentes, ce qui impacte dérivabilité et dérivée.

(viii) Il existe une notion plus faible, appelée **dérivée directionnelle (au sens de Gateaux)**[2] : pour toute direction $h \in X$, il existe $(Df)(a,h) \in Y$ tel que $f(a+th) = f(a) + t(Df)(a,h) + o(t)$ quand $t \to 0$, c'est-à-dire que $t \mapsto f(a+th) \in Y$ est dérivable au sens usuel en 0. Différence importante avec la dérivabilité au sens de Fréchet : ici on ne demande pas à $(Df)(a,h)$ d'être linéaire ou continue en h. Considérons par exemple la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1,x_2) := \frac{x_1^3}{x_1^2+x_2^2}, \quad f(0,0) = 0.$$

Au point $a=(0,0)$, $(Df)(a,h)$ existe pour tout $h \in \mathbb{R}^2$ mais n'est pas linéaire en h. En effet, $f(th) = tf(h)$ donc la dérivée en $(0,0)$ dans la direction h vaut $f(h)$, qui n'est pas linéaire en h.
La dérivabilité (Fréchet) est une notion multidimensionnelle, contrairement à la dérivabilité directionnelle (Gateaux) qui est unidimensionnelle (tout comme l'est également la notion de convexité).

(ix) On dit que $f : O \subset X \to Y$ est dérivable au sens de Carathéodory en $a \in O$ lorsqu'il existe une $\Phi_a : O \to L(X,Y)$ (fonction de pente) continue en a, telle que $f(x) = f(a) + \Phi_a(x)(x-a)$ pour tout $x \in O$. Cela implique que f est Fréchet dérivable en a : $(Df)(a) = \lim_{x\to a} \Phi_a(x) = \Phi_a(a)$. La réciproque est vraie mais cela est moins évident et fait appel au théorème de Hahn–Banach [1, 4]. La dérivée de Fréchet est plus standard, mais celle de Carathéodory simplifie certaines preuves.

Exemple 8.1.2. Dérivabilité d'une fonctionnelle en dimension infinie.

Soit $f : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^1 x(t)^2 \mathrm{d}t$, avec la topologie $\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$.
Comme $f(a+h) = \int_0^1 (a(t)^2 + 2a(t)h(t) + h(t)^2)\mathrm{d}t$, il vient que $(Df)(a)(h) = 2\int_0^1 a(t)h(t)\mathrm{d}t$.
Même chose pour la norme L^2 grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz, et alors $(Df)(a)(h) = \langle a, 2h\rangle$.
Plus généralement, si $f(x) = \int_0^1 \varphi(x(t))\mathrm{d}t$ alors $(Df)(a)(h) = \int_0^1 \varphi'(a(t))h(t)\mathrm{d}t$, à condition que la régularité de φ soit suffisante pour assurer les conditions topologiques de continuité et de négligeabilité.

Exemple 8.1.3. Dérivabilité de la norme.

- La norme, comme application $X \to \mathbb{R}$, n'est jamais dérivable en 0 car $\|0+h\| - \|0\| = \|h\|$ qui ne peut pas être égal à $u(h) + o(\|h\|)$ avec $u \in L(X,\mathbb{R})$. En effet, par l'absurde, en considérant une suite maximisante h_n cela donnerait $1 = \|u\|$ mais aussi $1 = -\|u\|$. En d'autres termes, $u \neq 0$ est impossible par manque de linéarité, et $u = 0$ par manque de négligeabilité. Alternativement, la norme n'est pas dérivable directionnellement en 0 car la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ ne l'est pas !
- La norme $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n'est dérivable en aucun point de $\cup_{i=1}^n \mathbb{R}e_i$. En effet, si $i \neq j$, alors $\|ae_i + he_j\|_1 = |a| + |h|$ et cela ramène à la non dérivabilité de la valeur absolue en zéro.
- Si la norme $\|\cdot\|$ de X est hilbertienne, alors $f(x) := \|x\|^2$ est dérivable partout et pour tous $a, h \in X$, $(Df)(a)(h) = \langle 2a, h\rangle$, car $f(a+h) = \|a\|^2 + 2\langle a,h\rangle + \|h\|^2$. Par composition ou règle de la chaîne (voir plus loin), $g := \|\cdot\| = \sqrt{f}$ est dérivable en tout $a \neq 0$ et $(Dg)(a)(h) = \frac{\langle a,h\rangle}{\|a\|}$.

Exemple 8.1.4. Dérivée de la fonction puissance d'endomorphisme.

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $f : x \in L(X) \mapsto x^m \in L(X)$. Alors pour tout $a, h \in L(X)$,

$$f(a+h) = (a+h)^m = a^m + \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} a^k h a^{m-1-k}}_{\text{termes linéaires en } h} + r_a(h), \text{ avec } a^0 := \mathrm{id}.$$

Le terme de reste $r_a(h)$ est une somme finie de produits de a et de h qui font intervenir au moins deux fois

2. Ce concept de dérivée directionnelle, bien que plus faible, est le plus utile en pratique. Ne jamais hésiter à dériver directionnellement un objet multivarié, même lorsque ses paramètres sont de dimension infinie.

h, c'est donc un $O(\|h\|^2) = o(\|h\|)$ grâce à la sous-multiplicativité de la norme de $L(X)$. Cela donne aussi la continuité de $h \mapsto \sum_{k=0}^{m-1} a^k h a^{m-1-k}$, qui est donc dans $L(L(X), L(X))$. Ainsi

$$(Df)(a)(h) = \sum_{k=0}^{m-1} a^k h a^{m-1-k}.$$

Dans le cas où $X = \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, on a $L(X) \equiv \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 8.1.5. Dérivée de l'inverse d'endomorphisme.

Soit X un Banach. Le théorème 6.5.2 (via le théorème 6.4.1 de l'application ouverte de Banach–Schauder) donne que $O := \{x \in L(X) : x^{-1} \text{ existe}\} = \{x \in L(X) : x^{-1} \in L(X)\}$ est ouvert et $f : x \in O \to x^{-1} \in O$ est bien définie, et pour tout $a \in O$ et $h \in L(X)$ tel que $\|h\| < \|a^{-1}\|^{-1}$,

$$f(a+h) = (\mathrm{id} + a^{-1}h)^{-1}a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-a^{-1}h)^n a^{-1} = f(a) - a^{-1}ha^{-1} + o(\|h\|),$$

où la série converge dans $L(X,X)$. Dans ce cas, on a

$$(Df)(a)(h) = -a^{-1}ha^{-1}$$

(analogue non commutatif de $-h/a^2$). En particulier, f est un difféomorphisme involutif de O.

Théorème 8.1.6. Linéarité et composition.

— **Linéarité.** Si $f, g : O \subset X \to Y$ dérivables en $a \in O$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(D(\lambda f + g))(a) = \lambda(Df)(a) + (Dg)(a).$$

— **Composition (ou règle de la chaîne).** Si $f : O \subset X \to Y$ et $g : O' \subset Y \to Z$ avec f dérivable en $a \in O$ et g dérivable en $f(a) \in O'$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$D(g \circ f)(a) = (Dg)(f(a)) \circ Df(a).$$

Par linéarité, l'exemple 8.1.4 permet de calculer la dérivée d'un polynôme non commutatif.
La règle de la chaîne fait défaut dans les versions discrètes du calcul différentiel (sur les graphes, etc).

Preuve.

— Linéarité de $L(X,Y)$ et de $o(\cdot)$.
— S'obtient comme pour les fonctions univariées en « composant les développements limités » :

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a) + \overbrace{[(Df)(a)](x-a) + o(\|x-a\|)}^{=h=f(x)-f(a)}) \\ &= g(f(a)) + [(Dg)(f(a))]([(Df)(a)](x-a) + o(\|x-a\|)) + o(\|f(x)-f(a)\|) \\ &= g(f(a)) + (Dg)(f(a))(Df)(a)(x-a) + o(\|x-a\|) \end{aligned}$$

où on a utilisé la bornitude des opérateurs linéaires $(Dg)(f(a))$ et $(Df)(a)$ (pour la continuité de f) pour contrôler le terme d'erreur avec $\|x-a\|$. En terme d'applications linéaires, on utilise le fait que si $u \in L(X,Y)$ et $v \in L(Y,Z)$ alors $vu = v \circ u \in L(X,Z)$.

□

Remarque 8.1.7. Cas spéciaux de dimension 1, vecteur gradient.

— **Espace de départ de dimension 1.** Comme $L(\mathbb{R}, Y)$ est isomorphe isométriquement à Y, $u \in L(\mathbb{R}, Y) \mapsto u(1) \in Y$, il vient que si $f : O \subset \mathbb{R} \to Y$ est dérivable en $a \in O$ alors $(Df)(a)$ est identifiable à $f'(a) := (Df)(a)(1)$ et $(Df)(a)(h) = (Df)(a)(1)h = f'(a)h$ pour tout $h \in \mathbb{R}$.
— **Espace de départ Hilbert et espace d'arrivée de dimension 1.** Comme $L(X, \mathbb{R}) = X'$ est isomorphe isométriquement à X (théorème 7.2.1 de représentation de Riesz), il vient que si $f : O \subset$

$X \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in O$, alors $(Df)(a)$ est identifiable à un vecteur de X noté $(\nabla f)(a)$ appelé gradient de f en a, et $(Df)(a)(h) = \langle (\nabla f)(a), h\rangle$ pour tout $h \in X$. Lorsque f est dérivable sur tout O, le gradient définit un champ de vecteurs sur O. Le vecteur $(\nabla f)(a)$ est la direction de plus forte croissance de f en a, perpendiculaire sortante aux ensembles de niveaux. En physique, si $f = V$ représente un champ de potentiel (gravitationnel, électrostatique) alors $-\nabla f$ est le champ vectoriel (gravitationnel, électrostatique, …) et $-q\nabla f(x)$ est la force ressentie par une (masse, charge) de valeur q à la position x.

— **Composition des deux.** Si $f : \mathbb{R} \to X$ et $g : X \to \mathbb{R}$ avec X Hilbert, dérivables en $a \in \mathbb{R}$ et $f(a) \in X$ respectivement, alors $g\circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $(g\circ f)'(a) = \langle (\nabla g)(f(a)), f'(a)\rangle$.

Les fonctions définies sur un espace produit conduisent naturellement à la notion de dérivée partielle.

Définition 8.1.8. Dérivées partielles.

Soit $O \subset X_1 \times \cdots \times X_n$ un ouvert. Pour tout $a \in O \subset X_1 \times \cdots \times X_n$, tout $1 \le i \le n$, on introduit l'application continue (car à coordonnées continues) $p^{\hat{a}_i} : X_i \to X_1 \times \cdots \times X_n$ définie par

$$p^{\hat{a}_i}(x_i) := (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

On introduit l'ouvert $O^{\hat{a}_i} := \{x_i \in X_i : (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in O\} = (p^{\hat{a}_i})^{-1}(O)$ de X_i, et

$$f^{\hat{a}_i} : O^{\hat{a}_i} \to Y, \quad f^{\hat{a}_i}(x_i) := f(p^{\hat{a}_i}(x_i)) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

L'application $f : O \subset X := X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ admet une dérivée partielle au point $a \in O$ par rapport à la coordonnée i lorsque l'application $f^{\hat{a}_i} : O^{\hat{a}_i} \to Y$ est dérivable, et on note

$$(D_i f)(a) := (Df^{\hat{a}_i})(a_i) \in L(X_i, Y), \quad \text{parfois } (D_{x_i} f)(a), \frac{\partial}{\partial x_i} f(a), \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \partial_{x_i} f(a), \text{ voire } \partial_i f(a).$$

La dérivée partielle selon X_i revient à une dérivée directionnelle quand X_i est de dimension 1.

Remarque 8.1.9. Dérivées partielles $\not\Rightarrow$ continue et encore moins dérivable.

Si f est dérivable en $a \in O \subset X$, alors les dérivées partielles existent toutes et sont données par $D_i f(a)(h) = (Df)(a)(0, \dots, 0, h, 0, \dots, 0)$. En revanche la réciproque est fausse, contre-exemple :

$$f(x_1, x_2) := \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad f(0,0) := 0, \quad X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad Y = \mathbb{R},$$

est discontinue en $(0,0)$ car $f(t,t) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$, donc pas dérivable en $(0,0)$, tandis que les dérivées partielles existent en tout point en particulier en $(0,0)$ car $f(x_1, 0) = f(0, x_2) = 0$ pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. La direction $(t,t) = t(1,1)$ est diagonale, elle n'est pas parallèle aux axes. La simple existence des dérivées partielles est une information directionnelle insuffisante pour la dérivabilité, on peut y remédier en imposant leur continuité, cf. corollaire 8.2.3.

Remarque 8.1.10. Variables complexes $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

La dérivabilité complexe des fonctions de la variable complexe, appelée holomorphie, est assez différente, et implique par exemple la dérivabilité complexe de tout ordre (analycité). Le cas des fonctions à plusieurs variables complexes est assez différent également du cas réel : l'existence des dérivées partielles complexes implique la continuité et la dérivabilité, on parle de phénomène ou lemme de Hartogs. La dérivée par rapport aux variables complexes est donc bien plus rigide !

8.2 Inégalité des accroissements finis, jacobienne

Lu 07/12

Le lemme fondamental suivant et ses variantes sont essentiels pour l'étude de la dérivation.

Lemme 8.2.1. Inégalité des accroissements finis.

Si $[a,b] \subset O \subset X$ avec O ouvert, et $f : O \to Y$ est dérivable en tout point de $[a,b]$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in [a,b]} \|Df(x)\|_{L(X,Y)} \|b - a\| \quad (\text{dans } [0, +\infty]).$$

En d'autres termes, sur $[a,b]$ la fonction f est Lipschitz avec $\|f\|_{\text{Lip}} \leq \|\|Df\|\|_\infty$.

De nombreuses variantes existent, y compris sous forme d'égalité en dimension 1. En dimension ≥ 2, la forme égalité est impossible car on peut revenir au même point avec un chemin de vitesse jamais nulle.

Cette inégalité indique en particulier que si $(Df)(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$ alors f est constante sur $[a,b]$. Réciproquement, on a immédiatement que si f est constante sur un voisinage de a alors $(Df)(a) = 0$.

La preuve ne fait appel qu'à la dérivabilité de f en tout point de $[a,b]$ dans la direction $b - a$.

Preuve. On peut supposer que $M := \sup_{x \in [a,b]} \|Df(x)\|_{L(X,Y)} < \infty$. Soit $\varepsilon > 0$, et introduisons

$$I := \{t \in [0,1] : \|f(x_t) - f(a)\| \leq (M + \varepsilon)\|x_t - a\|\} \quad \text{où} \quad x_t := a + t(b - a).$$

Il suffit d'établir que $I = [0,1]$: le résultat s'obtient alors avec $1 \in I$ et $\varepsilon \to 0$.

Comme $0 \in I$, on a $[0,0] \subset I$ et on peut donc définir $s := \sup\{t \in [0,1] : [0,t] \subset I\}$. Comme f est continue, on a $s \in I$ et donc $[0,s] \subset I$. En supposant par l'absurde que $s < 1$, le but est de montrer que $[0, s+\eta] \cap [0,1] \subset I$ pour un certain $\eta > 0$. Comme f est dérivable en x_s, on a, pour tout $t \in [0,1]$, $t \geq s$,

$$\|f(x_t) - f(x_s)\| \leq M(t - s)\|b - a\| + o(t - s).$$

Soit $\eta = \eta_{s,\varepsilon} > 0$ tel que $|o(t-s)| \leq \varepsilon(t-s)\|b-a\|$ dès que $0 \leq t - s \leq \eta$. On a alors, dès que $0 \leq t - s \leq \eta$,

$$\begin{aligned} \|f(x_t) - f(a)\| &\leq \|f(x_t) - f(x_s)\| + \|f(x_s) - f(a)\| \\ &\leq (M + \varepsilon)(t - s)\|b - a\| + (M + \varepsilon)s\|b - a\| = (M + \varepsilon)\|x_t - a\|, \end{aligned}$$

donc $[0, s+\eta] \cap [0,1] \subset I$ ce qui contredit le caractère maximal de s.

□

Remarque 8.2.2. Inégalité des accroissements finis via le calcul intégral.

Si $f \in \mathcal{C}^1(I,X)$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et X un Banach alors $(Df)(t) \in L(\mathbb{R},X) \equiv X$ pour tout $t \in I$, et on peut établir une formule fondamentale du calcul pour tout $[a,b] \subset I$:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b (Df)(t)\mathrm{d}t,$$

où il s'agit de l'intégrale de Riemann du théorème 6.6.1. La preuve peut procéder par les fonctions affines par morceaux puis par densité. La preuve du lemme 8.2.1 des accroissements finis ne fait intervenir que la notion de dérivabilité en tout point de $[a,b]$, mais dans le cas plus régulier où $[a,b] \subset O \subset X$ et $f \in \mathcal{C}^1(O,Y)$, la formule fondamentale du calcul ci-dessus donne directement l'inégalité des accroissements finis au sens où $\|f(b) - f(a)\| \leq \|Df\|_\infty (b - a)$.

Une première conséquence de l'inégalité des accroissements finis complète la remarque 8.1.9 :

Corollaire 8.2.3. Dérivées partielles continues ⇒ fonction dérivable.

Si $f : O \subset X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ possède des dérivées partielles $D_1 f, \ldots, D_n f$ sur O continues en a alors f est dérivable en a et pour tout $h \in X_1 \times \cdots \times X_n$,

$$(Df)(a)(h) = \sum_{i=1}^n (D_i f)(a)(h_i).$$

En particulier si $D_i f \in \mathcal{C}(O, L(X_i, Y))$ pour tout $1 \leq i \leq n$ alors $f \in \mathcal{C}^1(O,Y)$.

En particulier, si $f : O \subset \mathbb{R}^n \to Y$ est Gateaux dérivable sur un voisinage de $a \in O$ dans les directions $e_1, \ldots, e_n$, et si sa dérivée de Gateaux est continue en a, alors elle est Fréchet dérivable !

Preuve. Définissons la fonction

$$g(x) := f(x) - \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(a)(x_i - a_i).$$

On a $(D_i g)(a) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Montrons que $(Dg)(a) = 0$. Pour x assez proche de a, soit

$$x^{(i)} := (x_1, \dots, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad \text{de sorte que } x^{(0)} = a \text{ et } x^{(n)} = x.$$

Par construction, le long de l'intervalle $[x^{(i-1)}, x^{(i)}]$, seule la coordonnée i est modifiée. L'idée est de passer de a à x par ces étapes, de sorte que l'inégalité des accroissements finis le long de l'étape i ne fasse intervenir que la dérivée partielle par rapport à la coordonnée i. Plus précisément, comme la dérivée partielle $D_i f$ existe sur O, l'inégalité des accroissements finis du lemme 8.2.1 sur le segment $[x^{(i-1)}, x^{(i)}]$ donne

$$\|g(x^{(i)}) - g(x^{(i-1)})\| \leq \|x_i - a_i\| \sup_{y \in [x^{(i-1)}, x^{(i)}]} \|(D_i g)(y)\|.$$

Comme $D_i g$ est continue en a par hypothèse, et comme $(D_i g)(a) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta_\varepsilon > 0$ tel que $\|(D_i g)(y)\| \leq \varepsilon$ dès que $\|y - a\| := \sum_{i=1}^{n} \|y_i - a_i\| \leq \eta$. Donc dès que $\|x - a\| \leq \eta$,

$$\|g(x) - g(a)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|g(x^{(i)}) - g(x^{(i-1)})\| \leq \varepsilon \|x - a\|,$$

c'est-à-dire que $g(x) = g(a) + o(\|a - x\|)$ quand $x \to a$, donc g est dérivable en a et $(Dg)(a) = 0$. □

Remarque 8.2.4. Matrice jacobienne et vecteur gradient.

Si $f : O \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in O$, $h \in \mathbb{R}^n$, on a $(Df)(a)(h) = \langle (\nabla f)(a), h \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)(a) h_i$, où $(\partial_i f)(a) = (D_i f)(a)(1) = (Df)(a)(e_i)$, $(\nabla f)(a) = ((\partial_i f)(a))_{1 \leq i \leq n}$, et le corollaire 8.2.3 est une généralisation au-delà de l'hilbertien. Plus généralement, si $f : O \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dérivable en $a \in O$ alors dans la base canonique, l'application linéaire $(Df)(a)$ est identifiable à une matrice $n \times m$ (jacobienne ou jacobien) :

$$(\operatorname{Jac} f)(a) := (\partial_i f_j(a))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} = (\nabla f_1, \dots, \nabla f_m) \quad \text{où} \quad (f_1, \dots, f_m) := f.$$

Lorsque $m = 1$, la matrice jacobienne se réduit au gradient. Lorsque $m = n$, le déterminant de la matrice jacobienne intervient dans la formule du changement de variable du cours d'intégration et probabilités.

8.3 Dérivées successives, lemme de Schwarz, formule de Taylor, extrema

Si f est dérivable en tout point d'un ouvert $O \subset X$, alors pour tout $a \in O$ on peut considérer la dérivée seconde $(D^2 f)(a) = (D(Df))(a) \in L(X, L(X, Y))$, etc. Il est naturel d'identifier $L(X, L(X, Y))$ à l'ensemble des applications bilinéaires continues de $X \times X$ dans Y, et plus généralement de concevoir la dérivée d'ordre m comme une application multilinéaire continue de X^m dans Y.

Il est utile d'observer à ce stade que sur un produit fini d'espaces vectoriels normés, plusieurs normes sont associées à la topologie produit, par exemple la somme ou le maximum des normes des facteurs.

Définition 8.3.1. Applications multilinéaires : analogues des polynômes homogènes.

- $u : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ est multilinéaire lorsqu'elle est linéaire en chaque facteur X_i.
- $L(X_1, \dots, X_m; Y)$ est l'ensemble des applications multilinéaires continues.
- $L_m(X, Y) := L(X_1, \dots, X_m; Y)$ avec $X_1 = \cdots = X_m = X$, ainsi $L_1(X, Y) = L(X, Y)$.

Remarque 8.3.2. $L(X_1, \dots, X_m; Y)$ et isomorphisme canonique de $L_m(X, Y)$.

Quelques propriétés importantes et relativement immédiates :

- Si $u : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ est multilinéaire alors u est continue ssi elle est bornée : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u(h_1, \dots, h_m)\|_Y \leq C \|h_1\|_{X_1} \cdots \|h_m\|_{X_m}.$$

— La plus petite constante $C > 0$ vérifiant l'inégalité précédente est :

$$\|u\|_{L(X_1,\dots,X_m;Y)} := \sup_{\|h_1\|_{X_1}=1} \cdots \sup_{\|h_m\|_{X_m}=1} \|u(h_1,\dots,h_m)\|_Y.$$

— $\|\cdot\|_{L(X_1,\dots,X_m;Y)}$ fait de $L(X_1,\dots,X_m;Y)$ un espace vectoriel normé
Cet espace vectoriel normé est Banach lorsque Y est Banach.
— Si $u \in L(X,L(X,Y))$ alors $(h_1,h_2) \mapsto (u(h_1))(h_2) \in L(X,X;Y)$.
Si $u \in L_2(X,Y) := L(X,X;Y)$ alors $h_1 \mapsto (h_2 \mapsto u(h_1,h_2)) \in L(X,L(X,Y))$.
Ceci définit un isomorphisme canonique entre espaces vectoriels normés :

$$L(X,L(X,Y)) \equiv L_2(X,Y) := L(X,X;Y).$$

De même, $L(X,L(X,L(X,Y))) \equiv L_3(X,Y) := L(X,X,X;Y)$, etc, pour $L_m(X,Y)$, $m \geq 2$.
— Comme expliqué plus loin, les applications multilinéaires symétriques apparaissent naturellement lors de la dérivation successive, notamment dans la formule de Taylor.
— Lorsque $Y = \mathbb{R}$, on parle de formes multilinéaires. Les formes multilinéaires antisymétriques ou alternées (comme le déterminant) sont à la base de la théorie des formes différentielles, que nous n'abordons pas ici, mais qui vaut le détour, cf. [11].
— Polynôme de degré n : $(h_1,\dots,h_n) \in X^n \mapsto \sum_{m=0}^n u_m(h_1,\dots,h_m) \in Y$, $u_m \in L_m(X,Y)$.

Exemple 8.3.3. Dérivation de polynômes de fonctions dérivables.

— **Applications multilinéaires.** Si $u \in L(X_1,\dots,X_m;Y)$ alors u admet des dérivées partielles D_i, $1 \leq i \leq m$, en tout point $a \in X_1 \times \cdots \times X_m$, et pour tout $h \in X_i$,

$$(D_i u)(a)(h) = u(a_1,\dots,a_{i-1},h,a_{i+1},\dots,a_m).$$

— **Applications multilinéaires de fonctions dérivables.** Si à présent $f_i : O \subset X \to Y_i, 1 \leq i \leq m$, sont dérivables en $a \in O$, et si $u \in L(Y_1,\dots,Y_m;Y)$, alors $f := u(f_1,\dots,f_m) : O \subset X \to Y$ est dérivable en a et par le corollaire 8.2.3, la règle de la chaîne, et l'item précédent :

$$(Df)(a)(h) = \sum_{i=1}^m u(f_1(a),\dots,f_{i-1}(a),(Df_i)(a)h,f_{i+1}(a),\dots,f_m(a)).$$

Si $f : O \subset X \to Y$ est dérivable sur un voisinage ouvert $O' \subset X$ de $a \in O$, alors on peut étudier la dérivabilité en a de $Df : O' \subset X \to L(X,Y)$: l'existence de $u_a \in L(X,L(X,Y)) = L_2(X,Y)$ telle que

$$(Df)(a+h) = (Df)(a) + u_a(h) + o(\|h\|), \quad h \in X,$$

c'est-à-dire que la norme de $(Df)(a+h)-(Df)(a)-u_a(h)$ dans $L(X,Y)$ est un $o(\|h\|)$. On note alors $(D^2f)(a) := (D(Df))(a) := u_a \in L_2(X,Y)$. Cette existence nécessite que Df soit continue en a.

Définition 8.3.4. Dérivée d'ordre m et ensembles $\mathcal{C}^m$, par récurrence sur m.

Pour tout entier $m \geq 1$, une fonction $f : O \subset X \to Y$ est dérivable m fois en $a \in O$ lorsque $f \in \mathcal{C}^{m-1}(O',Y)$ avec $a \in O' \subset O$, et $D^{m-1}f : O' \to L_{m-1}(X,Y)$ est dérivable en a. De plus $f \in C^m(O,Y)$ lorsque $D^m f : O \to L_m(X,Y)$ est continue.
On dit que $f : O \subset X \to f(O) \subset Y$ est un $\mathcal{C}^m$ difféomorphisme lorsque c'est un homéomorphisme de O dans $f(O)$ (qui est donc ouvert) et f et f^{-1} sont $\mathcal{C}^m$ sur O et $f(O)$.

Exemple 8.3.5. Dérivée seconde d'une puissance.

Reprenons l'exemple 8.1.4, $x \in L(X,X) \mapsto f(x) := x^m \in L(X,X)$, $m \geq 1$. Pour tous a et h_1,

$$(Df)(a)(h_1) = \sum_{\substack{\ell_1,\dots,\ell_m \in \{a,h_1\} \\ \#\{i\,:\,\ell_i = h_1\} = 1}} \ell_1 \cdots \ell_m.$$

Calculons $(D^2f)(a)$. La fonction $a \mapsto (Df)(a)$ est continue partout, et pour tous h_1, h_2,

$$(Df)(a+h_2)(h_1) = \sum_{\substack{\ell_i \in \{a+h_2, h_1\} \\ \#\{i : \ell_i = h_1\} = 1}} \ell_1 \cdots \ell_m = (Df)(a)(h_1) + \sum_{\substack{\ell_i \in \{a, h_1, h_2\} \\ \#\{i : \ell_i = h_1\} = 1 \\ \#\{i : \ell_i = h_2\} = 1}} \ell_1 \cdots \ell_m + o(\|h_2\|)$$

où le $o(\|h_2\|)$ regroupe les mots avec au moins deux occurrences de h_2, plus précisément ce terme est une application linéaire continue en h_1 dont la norme est un $O(\|h_2\|^2) = o(\|h_2\|)$, donc

$$(D^2f)(a)(h_1, h_2) = \sum_{\substack{\ell_i \in \{a, h_1, h_2\} \\ \#\{i : \ell_i = h_1\} = 1 \\ \#\{i : \ell_i = h_2\} = 1}} \ell_1 \cdots \ell_m.$$

Cette expression est symétrique en h_1 et h_2. Nous verrons plus loin que c'est toujours le cas. Plus généralement, on devine une formule générale pour $D^k f$ et le fait très naturel que $D^{m+1} f = 0$.

Exemple 8.3.6. Dérivée seconde de l'inverse d'endomorphisme.

L'application $f(u) = u^{-1}$ de l'exemple 8.1.5 vérifie $(Df)(a)(h) = -a^{-1}ha^{-1}$, et

$$(D^2f)(a)(h_1, h_2) = a^{-1}h_1a^{-1}h_2a^{-1} + a^{-1}h_2a^{-1}h_1a^{-1},$$

analogue non commutatif de $2h^2/a^3$, dont la symétrie en h_1 et h_2 est une propriété générale de D^2.

Exemple 8.3.7. Dérivées secondes.

Si $f(x) = \int_0^1 x(t)^2 \mathrm{d}t$ sur $X = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ ou $\|\cdot\|_2$, alors $(Df)(a)(h) = 2\int_0^1 a(t)h(t)\mathrm{d}t$ et $(D^2f)(a)(h,k) = 2\int_0^1 h(t)k(t)\mathrm{d}t$ qui ne dépend pas de a et ressemble à f sur sa diagonale : la dérivée seconde d'une forme quadratique est constante, et proportionnelle ! Autre exemple de forme quadratique : $D\mathcal{E}$ et $D^2\mathcal{E}$ pour l'énergie de Coulomb $\mathcal{E}(\mu) = \iint K_d(x-y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)$, sur l'espace de Banach des mesures signées muni de la variation totale, interprétation électrostatique, $\Delta K_d = c_d\delta_0$.

Me 09/12

Définition 8.3.8. Applications multilinéaires continues symétriques.

On note $L_m^{\mathrm{sym}}(X,Y)$ le sous-espace vectoriel de $L_m(X,Y)$ formé par les applications $u : X^m \to Y$ multilinéaires continues symétriques : pour tout $x \in X^m$ et toute permutation σ de $\{1, \dots, m\}$,

$$u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = u(x_1, \dots, x_m).$$

Théorème 8.3.9. Symétrie des dérivées successives.

Si $f : O \subset X \to Y$ est dérivable m fois en $a \in O$ [a], alors $(D^m f)(a) \in L_m^{\mathrm{sym}}(X,Y)$.
En particulier, si $f \in \mathcal{C}^m(O;Y)$, alors $D^m f \in \mathcal{C}(O, L_m^{\mathrm{sym}}(X,Y))$.

a. Cela implique en particulier que $D^{m-1}f : O' \subset X \to L_{m-1}(X,Y)$ est continue sur un voisinage O' de a.

Preuve. Démontrons d'abord le cas $m = 2$, le reste suivra par induction. Posons

$$g(x,y) := f(a+x+y) - f(a+x) - f(a+y) + f(a),$$
$$\text{puis } h(x,y) := g(x,y) - (D^2f)(a)(x,y),$$

et montrons que $h(x,y) = o(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Comme $h(x,0) = 0$, par inégalité des accroissements finis du lemme 8.2.1 sur la seconde variable,

$$\|h(x,y)\| \leq \sup_{t\in[0,1]} \|(D_y h)(x,ty)\|_{L(X,Y)} \|y\|.$$

Comme f est deux fois dérivable,

$$(D_y h)(x,y) = (Df)(a+x+y) - (Df)(a+y) - (D^2f)(a)(x,\cdot),$$

et par définition

$$(Df)(a+x+y) = (Df)(a) + (D^2f)(a)(x+y,\cdot) + o(\|x+y\|),$$
$$(Df)(a+y) = (Df)(a) + (D^2f)(a)(y,\cdot) + o(\|y\|),$$

si bien que par bilinéarité de $(D^2f)(a)$, $(D_yh)(x,y) = o(\|x\|+\|y\|)$. Ainsi $h(x,y) = o(\|x\|^2+\|y\|^2)$ et par symétrie il en est de même pour $h(y,x)$. Vu que $g(x,y) = g(y,x)$,

$$\|(D^2f)(a)(x,y) - (D^2f)(a)(y,x)\| \leq \|h(x,y)\| + \|h(y,x)\| = o(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

Vu que $(D^2f)(a) \in L_2(X,Y)$ on en déduit facilement que $(D^2f)(a)(x,y) = (D^2f)(a)(y,x)$, ce qui termine la preuve du cas $m=2$.

Le cas $m \geq 3$ se fait par induction : supposons que le résultat est prouvé pour $m-1$ avec $m \geq 3$, c'est-à-dire $(D^mf)(a) \in L(X, L^{\mathrm{sym}}_{m-1})$. Ainsi $(D^mf)(a)(x_1,x_2,\dots,x_m)$ est symétrique par rapport à $(x_2,\dots,x_m)$. D'un autre côté, $(D^mf)(a) = (D^2(D^{m-2}f))(a)$ et donc $(D^mf)(a)(x_1,x_2,\dots,x_m) = (D^2(D^{m-2}f))(a)(x_1,x_2,x_3,\dots,x_m)$ est symétrique en (x_1,x_2). Vu que toute permutation de $\{1,\dots,m\}$ est engendrée par une permutation de $\{2,\dots,m\}$ et une transposition de $\{1,2\}$, cela termine la preuve. □

Corollaire 8.3.10. Lemme de Schwarz généralisé.

Soit $O \subset X_1 \times \cdots \times X_n$ ouvert. Si $f \in \mathcal{C}^2(O,Y)$ alors pour tout $a \in O$, $1 \leq i,j \leq n$, $h \in X_i$, $k \in X_j$,

$$(D_iD_jf)(a)(h,k) = (D_jD_if)(a)(k,h).$$

Preuve. Le corollaire 8.2.3 appliqué deux fois donne, pour tous $h,k \in X_1 \times \cdots \times X_n$,

$$(D^2f)(a)(h,k) = \sum_{i,j=1}^{n} (D_iD_jf)(a)(h_i,k_j).$$

On prend alors $h = (0,\dots,0,h_i,0,\dots,0)$ et $k = (0,\dots,0,k_j,0,\dots,0)$, et on utilise le théorème 8.3.9. □

Remarque 8.3.11. Caractérisation des éléments de $L^{\mathrm{sym}}_m(X,Y)$ par leur diagonale.

Si $u \in L^{\mathrm{sym}}_2(X,Y)$ alors $u(h_1,h_2) = \frac{1}{4}(u(h_1+h_2,h_1+h_2) - u(h_1-h_2,h_1-h_2))$, ce qui reconstitue u à partir de sa diagonale (polarisation de forme quadratique). Plus généralement, si $u \in L^{\mathrm{sym}}_m(X,Y)$,

$$u(h_1,\dots,h_m) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\varepsilon_1=\pm1,\dots,\varepsilon_m=\pm1} \varepsilon_1\cdots\varepsilon_m u(h_\varepsilon,\dots,h_\varepsilon) \quad \text{où } h_\varepsilon := \varepsilon_1h_1+\cdots+\varepsilon_mh_m$$

En effet, comme u est multilinéaire, $u(h_\varepsilon,\dots,h_\varepsilon) = \sum_{1\leq i_1,\dots,i_m\leq m} \varepsilon_{i_1}\cdots\varepsilon_{i_m} u(h_{i_1},\dots,h_{i_m})$, et

$$\sum_{\varepsilon_1=\pm1,\dots,\varepsilon_m=\pm1} \varepsilon_1\cdots\varepsilon_m\varepsilon_{i_1}\cdots\varepsilon_{i_m} u(h_{i_1},\dots,h_{i_m}) = \begin{cases} 2^m u(h_1,\dots,h_m) & \text{si } \{i_1,\dots,i_m\} = \{1,\dots,m\}, \\ 0 & \text{sinon (via } \varepsilon_j,\ j \notin \{i_1,\dots,i_m\}). \end{cases}$$

Remarque 8.3.12. Matrice hessienne.

Si $O \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f \in \mathcal{C}^2(O,\mathbb{R})$, $a \in O$, alors dans la base canonique, la forme bilinéaire symétrique $(D^2f)(a)$ s'identifie à la matrice symétrique $(\mathrm{Hess}\, f)(a) := (\nabla^2 f)(a) := ((\partial_{x_i}\partial_{x_j}f)(a))_{1\leq i,j\leq n}$ (matrice hessienne), où $(\partial_i\partial_j f)(a) = (D_iD_jf)(a)(1,1) = (D^2f)(a)(e_i,e_j)$. Enfin on a $(\nabla^2 f)(a) = (\mathrm{Jac}\,\nabla f)(a)$.

Remarque 8.3.13. Formules de dérivation de produit et de fonctions composées.

— Généralisation de la formule de Leibniz $(fg)'' = f''g + 2f'g' + g''$: si $f = \varphi(f_1,f_2)$ avec $f_i : O \subset$

$X \to X_i$ deux fois dérivable en $a \in O$ et $\varphi \in L(X_1, X_2; Y)$ alors

$$\begin{aligned}(Df)(a)h &= \varphi((Df_1)(a)h, f_2(a)) + \varphi(f_1(a), (Df_2)(a)h)\\ (D^2f)(a)(h,k) &= \varphi((D^2f_1)(a)(h,k), f_2(a))\\ &\quad + \varphi((Df_1)(a)h, (Df_2)(a)k) + \varphi((Df_1)(a)k, (Df_2)(a)h)\\ &\quad + \varphi(f_1(a), (D^2f_2)(a)(h,k)).\end{aligned}$$

— Généralisation de formule pour fonctions composées $(g\circ f)'' = (g''\circ f)(f')^2 + (g'\circ f)f''$:

$$\begin{aligned}(D(g\circ f))(a)h &= (Dg)(f(a))((Df)(a)h)\\ (D^2(g\circ f))(a)(h,k) &= (D^2g)(f(a))((Df)(a)h, (Df)(a)k) + (Dg)(f(a))((D^2f)(a)(h,k)).\end{aligned}$$

Exemple 8.3.14. Dérivées successives de la diagonale d'un monôme symétrique.

Soit $F : X \to Y$, $F(x) := u(x, \dots, x)$, $u \in L^{\mathrm{sym}}_m(X, Y)$, $m \geq 1$. Alors pour tous $a, h \in X$, $k \geq 1$,

$$(D^kF)(a)(h, \dots, h) = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-k+1)u(a, \dots, a, h, \dots, h) & \text{si } 1 \leq k \leq m \\ 0 & \text{si } k > m. \end{cases}$$

En particulier $(D^kF)(0)(h, \dots, h) = m!u(h, \dots, h)\mathbf{1}_{k=m}$ pour tout $k \geq 1$.

Les dérivées successives permettent d'approcher la fonction, localement, par un polynôme symétrique :

Théorème 8.3.15. Formule de Taylor et polynôme de Taylor.

(i) Soit $O \subset X$ ouvert et $a \in O$. Si $f \in \mathcal{C}^{m-1}(O, Y)$, $m \geq 1$ et $(D^mf)(a)$ existe, alors

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(D^kf)(a)(x-a, \dots, x-a)}_{\text{polynôme de Taylor } P_m^{f,a}(x)} + \underbrace{r_m^{f,a}(x)}_{\text{reste}} \quad \text{avec} \quad r_m^{f,a}(x) = o_{x\to a}(\|x-a\|^m).$$

(ii) Si $f \in \mathcal{C}^m(O, Y)$, $m \geq 0$ et $D^{m+1}f$ existe en tout point du segment $[a, x] \subset O$ alors

$$\|r_m^{f,a}(x)\| \leq \frac{\|x-a\|^{m+1}}{(m+1)!} \sup_{y\in[a,x]} \|(D^{m+1}f)(y)\|.$$

(iii) Si $f \in \mathcal{C}^{m+1}(O, Y)$, $m \geq 0$ et Y est un Banach, alors

$$r_m^{f,a}(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!}(D^{m+1}f)(a + t(x-a))(x-a, \dots, x-a)\mathrm{d}t.$$

Pour que f soit dérivable $m \geq 1$ fois en a il faut que $(D^{m-1}f)$ existe dans un voisinage de a.
L'intégrale est une intégrale de Riemann au sens du théorème 6.6.1.
Par convention, on a $D^0f := f$, en particulier $(D^0f)(a) = f(a)$.
Pour $m = 1$, (i) est la définition de la dérivabilité.
Pour $m = 0$, (ii) est l'inégalité des accroissements finis.
Pour $m = 0$, (iii) est la formule intégrale de la remarque 8.2.2.
Quand X est Banach, l'exemple 8.1.5 fournit la série de Taylor de $\mathrm{inv} : \mathrm{Iso}(X) := \{x \in L(X) : x^{-1} \in L(X)\} \mapsto \mathrm{Iso}(X)$ définie par $\mathrm{inv}(x) := x^{-1}$. Cette application est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $\mathrm{Iso}(X)$.
Le polynôme de Taylor est unique, et cela généralise l'unicité de la dérivée. Plus généralement, si $\sum_{k=0}^m u_k(h, \dots, h) = o(\|h\|^m)$ où $u_k \in L^{\mathrm{sym}}_k(X, Y)$ pour tout k, avec la convention $u_0 \in Y$, montrons que tous les u_k sont nuls. Pour tout $h \in X$ et $t \in \mathbb{R}$, on a, par multilinéarité $\sum_{k=0}^m t^k u_k(h, \dots, h) = o_{t\to0}(|t|^m)$. Cela donne $u_0 = 0$ en faisant $t \to 0$, puis, si $m \geq 1$, $\sum_{k=0}^{m-1} t^k u_{k+1}(h, \dots, h) = o_{t\to0}(|t|^{m-1})$, d'où $u_1(h) = 0$ en faisant $t \to 0$. Or comme h est quelconque, cela donne $u_1 = 0$. De même, on obtient $u_2(h, h) = 0$, et comme h est quelconque, on obtient $u_2 = 0$

par polarisation de l'application multilinéaire symétrique u_2, etc, jusqu'à $u_m = 0$.

Preuve.

(i) Établissons la première propriété pour $m \geq 2$ (pour $m = 1$, ce n'est que la définition de la dérivabilité). Par l'exemple 8.3.14, $g(x) := f(x) - P_m^{f,a}(x)$ vérifie $(D^k g)(a) = 0$ pour tout $0 \leq k \leq m$: le polynôme de Taylor coïncide avec f en a jusqu'à l'ordre m. Il reste à montrer que $g(x) = o_{x\to a}(\|x-a\|^m)$. On procède par récurrence descendante sur m : comme $(D^m g)(a) = 0$ et $(D^{m-1}g)(a) = 0$, on a

$$(D^{m-1}g)(x) = (D^{m-1}g)(a) + (D^m g)(a)(x-a) + o_{x\to a}(\|x-a\|) = o_{x\to a}(\|x-a\|),$$

or par définition de $o_{x\to a}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta_\varepsilon > 0$ tel que $\|(D^{m-1}g)(x)\| \leq \|x-a\|\varepsilon$ si $\|x-a\| \leq \eta$, et donc, par l'inégalité des accroissements finis du lemme 8.2.1, pour $\|x-a\| \leq \eta$,

$$\|(D^{m-2}g)(x) - \underbrace{(D^{m-2}g)(a)}_{=0}\| \leq \sup_{y\in[a,x]} \|(D^{m-1}g)(y)\|\|x-a\| \leq \|x-a\|^2\varepsilon,$$

c'est-à-dire que $(D^{m-2}g)(x) = o_{x\to a}(\|x-a\|^2)$, et ainsi de suite jusqu'à $g(x) = o_{x\to a}(\|x-a\|^m)$.

(ii) Pour démontrer la seconde partie du résultat, quantitative, on pose

$$F(t) := \sum_{k=0}^{m} \frac{(1-t)^k}{k!}(D^k f)(a+t(x-a))(x-a,\dots,x-a),$$

qui vérifie $F(1) - F(0) = f(x) - P_m^{f,a}(x)$. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$F'(t) = \frac{(1-t)^m}{m!}(D^{m+1}f)(a+t(x-a))(x-a,\dots,x-a).$$

L'inégalité des accroissements finis du lemme 8.2.1 donne le résultat avec $1/m!$ au lieu de $1/(m+1)!$. Mais il suffit d'utiliser la variante renforcée ci-dessous en observant que ($M := \sup_{y\in[a,x]} \|(D^{m+1}f)(y)\|$)

$$\|F'(t)\| \leq G'(t) \quad \text{où} \quad G(t) := -(1-t)^{m+1}\frac{\|x-a\|^{m+1}}{(m+1)!}M, \quad \text{et} \quad G(1) - G(0) = \frac{\|x-a\|^{m+1}}{(m+1)!}M.$$

(iii) Enfin la formule de Taylor avec reste intégral quand $f \in \mathcal{C}^{m+1}(O,Y)$ s'obtient en observant qu'alors F est $\mathcal{C}^1$, d'où $F(1)-F(0) = \int_0^1 F'(t)\mathrm{d}t$ par la remarque 8.2.2, ce qui nécessite Y Banach pour l'intégrale de Riemann[3].

□

Lemme 8.3.16. Variante renforcée de l'inégalité des accroissements finis.

Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, $[0,1] \subset I$, $F : I \to Y$ et $G : I \to \mathbb{R}$ dérivables en tout point de $[0,1]$ et telles que $\|F'(t)\| \leq G'(t)$ pour tout $t \in [0,1]$, alors $\|F(1) - F(0)\| \leq G(1) - G(0)$.

Preuve. On procède comme pour la preuve du lemme 8.2.1. Soit $\varepsilon > 0$. On introduit

$$I := \{t \in [0,1] : \|F(t) - F(0)\| \leq G(t) - G(0) + t\varepsilon + \varepsilon\}.$$

Il suffit d'établir que $I = [0,1]$: le résultat s'obtient alors avec $1 \in I$ et $\varepsilon \to 0$. Comme $0 \in I$, on a $[0,0] \subset I$, et donc $t_* := \sup\{t \in [0,1] : [0,t] \subset I\}$ est bien défini. On a $t_* \in I$ car F et G sont continues, donc $[0,t_*] \subset I$. Comme $[0,1]$ est connexe, il suffit d'établir que l'intervalle fermé non vide $[0,t_*]$ est ouvert dans $[0,1]$ pour obtenir que $[0,t_*] = [0,1]$. Soit donc $s \in I$, $s < 1$. Comme F et G sont dérivable en s, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|F(t) - F(s)\| \leq \|F'(s)\|(t-s) + (t-s)\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad G'(s) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{G(t)-G(s)}{t-s}$$

pour tout $t \geq s$ avec $0 \leq t - s \leq \eta$. On a alors, en utilisant le fait que $\|F'(s)\| \leq G'(s)$,

$$\begin{aligned}\|F(t) - F(0)\| &\leq \|F(t) - F(s)\| + \|F(s) - F(0)\| \\ &\leq G(t) - G(s) + (t-s)\varepsilon + G(s) - G(0) + s\varepsilon + \varepsilon \\ &= G(t) - G(0) + t\varepsilon + \varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $[s, s+\eta] \cap [0,1] \subset I$, et $[0,t_*]$ est bien ouvert dans $[0,1]$. □

3. Mais aussi par récurrence : $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)\mathrm{d}s = f(0) + \int_0^t (f'(0) + \int_0^s f''(u)\mathrm{d}u)\mathrm{d}s = f(0) + tf'(0) + \int_0^t (t-u)f''(u)\mathrm{d}u$, etc. Cette manière d'injecter la formule dans elle-même pour améliorer la précision est appelée *bootstrap*.

Quand $X = \mathbb{R}^n$, en procédant comme dans le corollaire 8.2.3, pour tous $h^{(1)}, \dots, h^{(k)} \in \mathbb{R}^n$,

$$(D^k f)(a)(h^{(1)}, \dots, h^{(k)}) = \sum_{1 \le j_1, \dots, j_k \le n} (\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_k} f)(a) h^{(1)}_{j_1} \cdots h^{(k)}_{j_k}.$$

Lorsque $h^{(1)} = \cdots = h^{(k)} = h$ alors la symétrie des dérivées partielles croisées issue du lemme 8.3.10 de Schwarz donne, en notant $|s| := s_1 + \cdots + s_n$, $\binom{k}{s} := \frac{k!}{s_1! \cdots s_n!}$, et $h^s := h_1^{s_1} \cdots h_n^{s_n}$,

$$(D^k f)(a)(h, \dots, h) = \sum_{1 \le j_1, \dots, j_k \le n} (\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_k} f)(a) h_{j_1} \cdots h_{j_k} = \sum_{s \in \mathbb{N}^n : |s| = k} \binom{k}{s} (\partial_1^{s_1} \cdots \partial_n^{s_n} f)(a) h^s,$$

et donc en notant $\partial^s := \partial_1^{s_1} \cdots \partial_n^{s_n}$ et $s! = s_1! \cdots s_n!$, la formule de Taylor s'écrit, en terme de dérivées partielles et sous forme condensée,

$$f(x) = \sum_{s \in \mathbb{N}^n : |s| \le m} \frac{1}{s!} (\partial^s f)(a)(x-a)^s + o_{x \to a}(\|x-a\|^m).$$

— Matrice jacobienne : si $X = Y = \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, et $m = 1$ alors $(\mathrm{Jac}\, f)(a) := ((\partial_i f_j)(a))_{1 \le i,j \le n}$ est la matrice jacobienne de f en a et

$$f(x) = f(a) + (\mathrm{Jac}\, f)(a)(x-a) + o_{x \to a}(\|x-a\|).$$

— Vecteur gradient et matrice hessienne : si $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$, $m = 2$, alors $\nabla f(a) := (\partial_i f(a))_{1 \le i \le n}$ est le vecteur gradient en a, $(\nabla^2 f)(a) := ((\partial_i \partial_j f)(a))_{1 \le i,j \le n}$ est la matrice hessienne en a, et

$$f(x) = f(a) + \langle (\nabla f)(a), x-a \rangle + \frac{1}{2} \langle (\nabla^2 f)(a)(x-a), x-a \rangle + o_{x \to a}(\|x-a\|^2).$$

La hessienne est le jacobien du gradient : $(\nabla f)(x) = (\nabla f)(a) + (\nabla^2 f)(a)(x-a) + o_{x \to a}(\|x-a\|)$.
Lorsque $X = \mathbb{R}^n$ et $Y = \mathbb{R}$, $(D^k f)(a) \in L_k^{\mathrm{sym}}(X, Y)$ est caractérisée par[4] $((D^k f)(a)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}))_{1 \le i_1, \dots, i_k \le n}$.

Lu 14/12

Si $f : O \subset X \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in O$ et si f admet un extremum local en a alors $(Df)(a) = 0$, car par exemple pour un minimum, de $f(a+h) = f(a) + (Df)(a)(h) + o(\|h\|) \ge f(a)$ on tire $(Df)(a)(h) \ge o(\|h\|)$ qui donne $(Df)(a) = 0$ en prenant h et $-h$. Voici une analyse au second ordre :

Corollaire 8.3.17. Extrema : conditions nécessaires/suffisantes d'optimalité locale.

Soit $O \subset X$ ouvert, $a \in O$ et $f \in \mathcal{C}^1(O, \mathbb{R})$ telle que $(D^2 f)(a) \in L_2^{\mathrm{sym}}(X, \mathbb{R})$ existe.
— Si a est un extrema (minimum ou maximum) local de f alors $(Df)(a) = 0$ et
  — quand a est un minimum local, $(D^2 f)(a)(h,h) \ge 0$ pour tout $h \in X$.
  — quand a est un maximum local, $(D^2 f)(a)(h,h) \le 0$ pour tout $h \in X$.
— Réciproquement, si $(Df)(a) = 0$ et s'il existe une constante $c > 0$ telle que
  — $(D^2 f)(a)(h,h) \ge c\|h\|^2$ pour tout $h \in X$, alors a est un minimum local de f.
  — $(D^2 f)(a)(h,h) \le -c\|h\|^2$ pour tout $h \in X$, alors a est un maximum local de f.

Lorsque $X = \mathbb{R}^n$, ces conditions portent sur le gradient $(\nabla f)(a)$ et la hessienne $(\nabla^2 f)(a)$.

Preuve. Découle de la formule de Taylor à l'ordre $m = 1$ et $m = 2$. Si par exemple a est un minimum local, alors $f(a+h) \ge f(a)$ pour $\|h\|$ assez petit, d'où $(Df)(a)(h) \ge o(\|h\|)$, ce qui donne $(Df)(a) = 0$ en considérant h et $-h$. À l'ordre suivant cela donne $(D^2 f)(a)(h,h) \ge o(\|h\|^2)$ d'où $(D^2 f)(a)(h,h) \ge 0$. Réciproquement, si $(Df)(a) = 0$ et $(D^2 f)(a)(h,h) \ge c\|h\|^2$, $c > 0$, alors $f(a+h) - f(a) = (D^2 f)(a)(h,h) + o(\|h\|^2) \ge \|h\|^2(c + \varepsilon(h))$ donc a est un minimum local. □

— Géométriquement ou visuellement, il s'agit de convexité/concavité locale (minimum/maximum).
— La condition suffisante $(D^2 f)(a)(h,h) \ge c\|h\|^2$ ne fait vraiment sens que quand X est un Hilbert, ou plus précisément quand la norme est équivalente à une norme hilbertienne. En effet, comme on a aussi $(D^2 f)(a)(h,h) \le C\|h\|^2$, la forme quadratique[5] $(D^2 f)(a)$, définie positive, peut être utilisée pour introduire un produit scalaire sur X, qui engendre la même topologie que $\|\cdot\|$.

4. Les formes linéaires sont identifiables aux vecteurs, les formes bilinéaires aux matrices, et plus généralement les formes multilinéaires aux tenseurs, ici symétriques. Les tenseurs sont utilisés en géométrie différentielle pour la courbure (tenseurs de Riemann et de Ricci !), en analyse fonctionnelle (produit tensoriel et inégalités de Grothendieck !), en sciences des données, etc.
5. Cette terminologie fait écho à celle de forme linéaire pour la dérivée première $(Df)(a)$.

— Plus généralement pour un point critique a de f au sens où $(Df)(a) = 0$, l'extrémalité locale de a est arbitrée par les propriétés de $(D^m f)(a)$ où m est le premier entier tel que $(D^m f)(a) \neq 0$. Si m est impair, alors il n'y a pas d'extremum local, tandis que si m est pair, cela est possible.
— Lorsque X est de dimension finie $n \geq 1$, la nature d'un point critique a de f s'obtient en examinant le spectre de la matrice hessienne $(\mathrm{Hess}\, f)(a)$ en utilisant l'algorithme suivant :
  — si les valeurs propre sont toutes $= 0$, il faut examiner la dérivée d'ordre supérieur $(D^3 f)(a)$, voir les suivantes.
  — si les valeurs propres sont toutes > 0, alors a est un minimum local, f est localement convexe en a
  — si les valeurs propres sont toutes < 0, alors a est un maximum local, f est localement concave en a
  — si des valeurs propres sont < 0 et d'autres sont > 0 alors a est un point selle et f est localement convexe dans certaines directions et localement concave dans d'autres, c'est-à-dire localement semblable à une selle de cheval ou à un col de montagne. Le point a est un minimum local dans certaines directions et un maximum local dans d'autres, ce n'est donc ni un minimum local ni un maximal local. Exemple : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy$ qui donne x^2 quand $y = x$ et $-x^2$ quand $y = -x$. Les points selles nécessitent au moins deux directions différentes, possible qu'en dimension ≥ 2.

  Le critère de Sylvester affirme que pour une matrice symétrique, les valeurs propre sont toutes > 0 (respectivement toutes < 0) ssi les mineurs principaux sont tous > 0 (respectivement tous < 0).
— Minimiser un coût, un risque, une perte, maximiser un gain, un profit, la recherche d'extrema est une thématique centrale des mathématiques : sciences des données, statistique, modélisation, …, liée aux concepts fondamentaux d'optimisation et de moindres carrés. Plus court chemin dans un graphe, géodésique sur une variété, formulation variationnelle d'équation aux dérivées partielles, surfaces minimales, meilleure approximation, optimisation de forme ou de trajectoire, etc. Cela peut se faire de manière approchée avec des algorithmes, comme l'algorithme de descente de gradient et ses variantes stochastiques ou non, voir par exemple [12] et [30] pour une synthèse en rapport avec le thème actuel de l'apprentissage automatique par réseau de neurones profonds inspiré par la neurologie. Cela s'inscrit dans le triangle mathématiques-informatique-physique, qui compte également l'algorithme du recuit simulé inspiré par la métallurgie, et les algorithmes génétiques inspirés par la biologie évolutive.

▾ compléments

Remarque 8.3.18. Systèmes lagrangiens de la mécanique classique.

En mécanique classique, un système lagrangien est défini par la donnée d'un lagrangien $L(t, q, \dot{q})$ où $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ici on considère seulement les trajectoires $q : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ sur l'intervalle de temps $[0,1]$ reliant $a \in \mathbb{R}^n$ à $b \in \mathbb{R}^n$, donc dans l'espace

$$C_{a,b} = \left\{q \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^n) : q(0) = a \text{ et } q(1) = b\right\}.$$

Le principe de moindre action indique que la trajectoire physique $q \in C_{a,b}$ est celle qui minimise l'action $f : \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(q) = \int_0^1 L(t, q(t), \dot{q}(t))\mathrm{d}t,$$

où $\dot{q}(t)$ désigne la dérivée de $q(t)$. La question est donc de minimiser f sur $C_{a,b}$, qui est de dimension infinie avec deux contraintes, en particulier pas ouvert.
Si q est un minimum de f sur $C_{a,b}$, comme f est différentiable, alors

$$f(q) \leq f(q + h) = f(q) + (Df)(q)(h) + o(\|h\|),$$

pour tout $h \in C_{0,0}$, ce qui donne $D(f)(q)(h) = 0$ pour tout $h \in C_{0,0}$ en considérant h et $-h$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, pour tout $h \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^n)$

$$(Df)(q)(h) = \int_0^1 \left[\nabla_q L(t, q(t), \dot{q}(t)) \cdot h(t) + \nabla_{\dot{q}} L(t, q(t), \dot{q}(t)) \cdot \dot{h}(t)\right] \mathrm{d}t,$$

et en particulier si $h \in C_{0,0}$, alors en intégrant le second terme par parties,

$$(Df)(q)(h) = \int_0^1 \left[\nabla_q L(t, q(t), \dot{q}(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\nabla_{\dot{q}} L(t, q(t), \dot{q}(t))\right)\right] \cdot h(t)\mathrm{d}t.$$

Puisque si q est un minimum $D(f)(q)(h) = 0$ pour tout $h \in C_{0,0}$, alors nécessairement[a]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\nabla_{\dot{q}} L(t, q(t), \dot{q}(t))\right) - \nabla_q L(t, q(t), \dot{q}(t)) = 0,$$

ce sont les équations d'Euler–Lagrange.

a. Il s'agit du lemme fondamental du calcul des variations : si $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue et $\int_0^1 g(t)h(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout h lisse avec $h(0) = h(1) = 0$, alors $g = 0$. Pour le voir, il suffit de voir que le produit scalaire dans $L^2((0,1),\mathbb{R})$ de g et h est nul, que de telles fonctions h sont denses dans $L^2((0,1),\mathbb{R})$, puis d'appliquer le théorème 7.2.1 de représentation de Riesz.

Exemple 8.3.19. Système de particules dans un potentiel.

Pour un système de n particules de masse m dans un potentiel $V(q)$, le lagrangien est la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

$$L(t,q,\dot{q}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{m\dot{q}_k^2}{2} - V(q_1,\dots,q_n) = \frac{m\|\dot{q}\|^2}{2} - V(q),$$

et les équations d'Euler–Lagrange correspondent bien à la deuxième loi de Newton

$$m\ddot{q}(t) = -\nabla_q V(q(t)).$$

Exemple 8.3.20. Surface minimale de révolution.

Un autre exemple est de déterminer les surfaces minimales de révolution. Le lagrangien d'une surface de révolution est $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ défini par :

$$L(t,q,\dot{q}) = 2\pi q\sqrt{1+\dot{q}^2},$$

et les équations d'Euler–Lagrange sont :

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{q(t)\dot{q}(t)}{\sqrt{1+\dot{q}(t)^2}}\right) - \sqrt{1+\dot{q}(t)^2} = \frac{\ddot{q}(t)q(t) - \dot{q}(t)^2 - 1}{\left(1+\dot{q}(t)^2\right)^{3/2}}$$

La solution générale est :

$$q(t) = r\cosh\left(\frac{t-t_0}{r}\right),$$

et reste donc à étudier quand une solution passant par $q(0) = a$ et $q(1) = b$ existe et est bien minimale (et pas maximale), voir la figure 8.1. À noter qu'avec le même principe, des surfaces minimales plus complexes peuvent être réalisées et simulées, voir la figure 8.2.

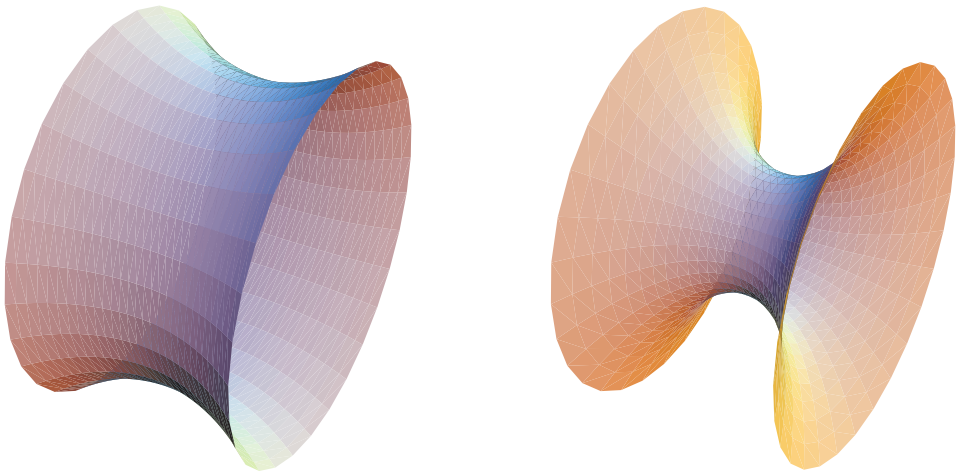


FIGURE 8.1 – Surfaces extrémales de révolution : avec les mêmes conditions au bord a et b, la fonctionnelle d'aire admet deux points critiques : à gauche la surface physique d'aire minimale, à droite celle non-physique d'aire localement maximale.

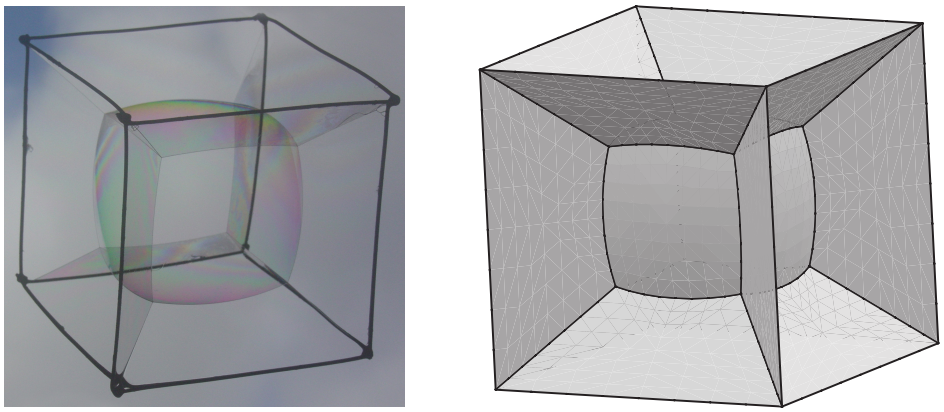


FIGURE 8.2 – Surface minimale dans un cube avec une bulle de volume fixée, réalisée expérimentalement avec un film de savon et en résolvant les équations d'Euler–Lagrange numériquement.

Remarque 8.3.21. Points critiques, ensembles de niveau, lemmes de Sard et de Morse.

L'ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ des points critiques d'une fonction à valeurs vectorielles $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est formé par les points où Jac f n'est pas de plein rang : $C = \{a \in \mathbb{R}^n \,:\, \mathrm{rang}((\mathrm{Jac}\, f)(a)) < m\}$. Le lemme de Sard ou théorème de (Morse–)Sard[a] affirme que si $r > \max(0, n-m)$ alors l'ensemble des valeurs critiques $f(C)$ est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^m$. Ce résultat de base de la théorie des singularités possède de nombreuses généralisations et raffinements (voir [34]), par exemple par Stephen Smale.
On prendra garde à ne pas confondre avec le lemme de Morse[b] en topologie différentielle : si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\nabla f(a) = 0$ mais $\nabla^2 f(a) \neq 0$, alors l'ensemble de niveau associé à l'équation $f(x) = f(a)$ admet un système de coordonnées locales lisses : il existe un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme $\varphi : O \ni 0 \to O' \ni a$ tel que $\varphi(a) = 0$ et $(f \circ \varphi^{-1})(x) = f(a) - x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2$, où λ est le nombre de valeurs propres ≥ 0 de $\nabla f^2(a)$ (indice de Morse). La théorie de Morse étudie la topologie des variétés via les ensembles de niveau des fonctions dérivables définies sur la variété. Ce point de vue conduit à l'analyse topologique des données, reliée à la topologie algébrique.

a. Démontré par Anthony P. Morse en 1939 quand $m = 1$ et par Arthur Sard en 1942.
b. Démontré par Marston Morse, à ne pas confondre avec son contemporain Anthony P. Morse.

▲ compléments

8.4 Théorèmes de point fixe de Picard–Banach, d'inversion locale[6], et des fonctions implicites

Théorème 8.4.1. de point fixe de Picard–Banach.

Si (X, d) est métrique complet et si $f : X \to X$ est une contraction, c'est-à-dire Lipschitz avec $\|f\|_{\mathrm{Lip}} < 1$, alors elle admet un point fixe qui est unique : $\exists!\, x \in X : f(x) = x$.

Preuve. Posons $c := \|f\|_{\mathrm{Lip}} := \sup_{x \neq y} d(f(x), f(y))/d(x, y)$. Considérons la suite récurrente (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ avec une condition initiale $x_0 \in X$ quelconque. Alors pour tout $k \geq 0$,

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq c d(x_k, x_{k-1}) \leq \cdots \leq c^k d(x_1, x_0)$$

donc pour tous $m, n \geq 0$, en utilisant le fait que f est une contraction ($c < 1$),

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \sum_{k=n}^{n+m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{n+m-1} c^k \leq d(x_1, x_0) \frac{c^n}{1-c} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc (x_n) est de Cauchy, et comme X est complet, il existe $x \in X$ tel que $x_n \to x$. Comme f est Lipschitz, elle est continue, donc $f(x_n) \to f(x)$, et $x_{n+1} = f(x_n)$ donne enfin $f(x) = x$ (point fixe). Enfin si x et y sont deux points fixes alors $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y) < d(x, y)$ si $x \neq y$, donc $x = y$. □

6. Démontré par Charles Émile Picard et Édouard Jean-Baptiste Goursat notamment.

Corollaire 8.4.2. Déformation Lipschitz de l'identité.

Soit $O \subset X$ ouvert dans un espace vectoriel normé X, $g : O \subset X \to X$ Lipschitz avec $c := \|g\|_{\mathrm{Lip}} < 1$. Alors la déformation de l'identité $f : x \in O \mapsto x + g(x) \in X$ est un homéomorphisme entre O et $f(O)$, et $\|f^{-1}\|_{\mathrm{Lip}} \leq (1-c)^{-1}$.
De plus, si X est un Banach alors $f(O)$ est ouvert dans X et f est une application ouverte.

Preuve. Comme $\|x' - x\| \leq \|f(x') - f(x)\| + \|g(x) - g(x')\| \leq \|f(x') - f(x)\| + c\|x' - x\|$, on a

$$\|f(x') - f(x)\| \geq (1-c)\|x' - x\| \quad \text{pour tous } x, x' \in O.$$

Donc f est une bijection de O dans $f(O)$, Lipschitz et à inverse Lipschitz (on dit bi-Lipschitz). Il ne reste plus qu'à établir que $f(O)$ est ouvert quand X est Banach, ce que nous allons faire au moyen du théorème 8.4.1 de point fixe de Picard–Banach. Soit $a \in O$, $b := f(a) \in f(O)$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(a,r) \subset O$. Montrons que $\overline{B}(b,(1-c)r) \subset f(O)$. Pour ce faire, pour tout $y \in \overline{B}(b,(1-c)r)$, considérons l'application $x \mapsto y - g(x)$. Cette application est c-Lipschitz car g l'est, et envoie $\overline{B}(a,r)$ dans elle-même car si $\|x - a\| \leq r$ alors

$$\|(y - g(x)) - a\| \leq \|y - b\| + \|g(x) + a - b\| = \|y - b\| + \|g(x) - g(a)\| \leq (1-c)r + c\|x - a\| \leq r.$$

Comme $\overline{B}(a,r)$ est complet car fermé dans X complet, par le théorème 8.4.1 de point fixe de Picard–Banach, il existe un $x \in \overline{B}(a,r)$ tel que $x = y - g(x)$ (point fixe), c'est-à-dire tel que $y = f(x)$. Donc $\overline{B}(b = f(a),(1-c)r) \subset f(\overline{B}(a,r)) \subset f(O)$. □

Une fonction $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à dérivée non nulle en un point est localement inversible en ce point.
Ce phénomène élémentaire d'inversion locale reste valable dans les Banach :

Me 16/12

Théorème 8.4.3. d'inversion locale.

Soient X et Y des Banach, $O \subset X$, $a \in O$ et $f \in \mathcal{C}^m(O,Y)$ pour $m \geq 1$. Si $(Df)(a)$ est une bijection entre X et Y, alors il existe $O' \subset O$ ouvert tel que $a \in O'$, $f(O')$ est ouvert, $f : O' \to f(O')$ est un homéomorphisme, et $f^{-1} \in \mathcal{C}^m(f(O'),X)$, c'est-à-dire que $f : O' \to f(O')$ est un $\mathcal{C}^m$ difféomorphisme. De plus

$$(Df^{-1})(f(x)) = [(Df)(x)]^{-1} \quad \text{pour tout } x \in O'.$$

Preuve. Par le théorème d'isomorphisme de Banach, qui découle du théorème de l'application ouverte de Banach–Schauder, cf. corollaire 6.4.2, la continuité ou bornitude de l'inverse est automatique[7] : $[(Df)(a)]^{-1} \in L(Y,X)$. Comme les bijections $(Df)(a) : X \to Y$ et $[(Df)(a)]^{-1} : Y \to X$ sont linéaires et continues, les espaces vectoriels X et Y sont isomorphes, et quitte à changer les normes en des normes équivalentes, on peut supposer sans perte de généralité que $X = Y$. De plus, quitte à considérer l'application $[(Df)(a)]^{-1} \circ f$, on peut supposer sans perte de généralité que $(Df)(a) = \mathrm{id}$.

Comme Df est continue en a et $(Df)(a) = \mathrm{id}$, pour un $c \in (0,1)$ arbitraire, il existe $\rho_c \in (0,1)$ tel que

$$O' := O'_c := B(a,\rho_c) \subset \{x \in O : \|(Df)(x) - \mathrm{id}\| < c\}.$$

Combiné avec l'inégalité des accroissements finis du lemme 8.2.1, on obtient que sur l'ouvert $B(a,\rho_c)$, l'application $g(x) := f(x) - x$ est une contraction : $\|g\|_{\mathrm{Lip}} \leq c < 1$. Comme X est un Banach, par le corollaire 8.4.2, l'ensemble $f(O')$ est ouvert dans X, $f : O' \to f(O')$ est un homéomorphisme, et $\|f^{-1}\|_{\mathrm{Lip}} \leq (1-c)^{-1}$.

Par le théorème 6.5.2, $(Df)(x)$ est inversible pour tout $x \in O'$. Montrons que $f^{-1} : f(O') \to O'$ est dérivable en $y := f(x)$ pour tout $x \in O'$ et que $(Df^{-1})(y) = [(Df)(x)]^{-1}$. Pour h assez petit pour que $x + h \in O'$, soit k défini par $f(x+h) = y + k$. Par définition

$$k = f(x+h) - f(x) = (Df)(x)h + o(\|h\|), \qquad h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y).$$

Comme $\|f^{-1}\|_{\mathrm{Lip}} \leq (1-c)^{-1}$, cela donne $\|h\| \leq (1-c)^{-1}\|k\|$ et donc

$$h = [(Df)(x)]^{-1}(k - o(\|h\|)) = [(Df)(x)]^{-1}(k) + o(\|k\|),$$

ce qui montre bien que f^{-1} est dérivable en $y \in f(O')$ et l'expression $(Df^{-1})(y) = [(Df)(f^{-1}(y))]^{-1}$. Cette formule dépend continûment de y car composée d'applications continues : en notant $\mathrm{Inv} : u \mapsto u^{-1}$,

$$Df^{-1} = \mathrm{Inv} \circ (Df) \circ f^{-1}, \quad f(O') \xrightarrow{f^{-1}} O' \xrightarrow{Df} \mathrm{Iso}(X) \xrightarrow{\mathrm{Inv}} \mathrm{Iso}(X),$$

7. Cependant, en dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues, et ce résultat est immédiat.

où Iso $:= \{u \in L(X) : u^{-1} \in L(X)\}$. On a donc établi que $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(O'), X)$ si $f \in \mathcal{C}^1(O, Y)$. Finalement, pour $f \in \mathcal{C}^m(O, Y)$ avec $m \geq 2$, on procède par récurrence sur m : si on sait que $f^{-1} \in \mathcal{C}^{m-1}$, alors la formule explicite $Df^{-1} = \text{Inv} \circ (Df) \circ f^{-1}$ implique que $Df^{-1} \in \mathcal{C}^{m-1}$, c'est-à-dire que $f^{-1} \in \mathcal{C}^m$, car $f^{-1} \in \mathcal{C}^{m-1}$ et Inv $\in \mathcal{C}^\infty$. Notons enfin que la définition de Inv fait appel au fait que l'espace est un Banach. □

L'équation du cercle $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est équivalente à la formule $y = \text{sign}(y)\sqrt{1 - x^2}$ qui est régulière, dans un voisinage des points (x, y) où $\partial_y(x^2 + y^2 - 1) = 2y \neq 0$. Le théorème suivant exprime le fait que ce phénomène des fonctions implicites reste valable dans un cadre général. En géométrie, il permet d'établir que les sous-variétés décrites par des équations sont en fait des variétés en fournissant des cartes.

Théorème 8.4.4. des fonctions implicites.

Soient X et Y des Banach, $O \subset X \times Y$ ouvert et $f \in \mathcal{C}^m(O, Y)$ pour $m \geq 1$.
Si $(x_0, y_0) \in O$ est tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $(D_y f)(x_0, y_0) \in L(Y)$ est inversible, alors il existe un voisinage ouvert produit $U \times V \subset O$ de (x_0, y_0) et une fonction $g \in \mathcal{C}^m(U, V)$ tels que

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x) \quad \text{pour tout } (x, y) \in U \times V.$$

Preuve. Soit $\varphi : O \subset X \times Y \to X \times Y$ définie par

$$\varphi(x, y) := (x, f(x, y)).$$

L'application $(D\varphi)(x_0, y_0) \in L(X \times Y)$ est inversible. En effet, le corollaire 8.2.3 donne

$$(D\varphi)(x_0, y_0)(h_x, h_y) = (h_x, (D_x f)(x_0, y_0)(h_x) + (D_y f)(x_0, y_0)(h_y)),$$

et son inverse est donné par

$$(k_x, k_y) \mapsto (k_x, [(D_y f)(x_0, y_0)]^{-1}(k_y - (D_x f)(x_0, y_0)(k_x))).$$

On peut donc appliquer le théorème 8.4.3 d'inversion locale à φ en $a = (x_0, y_0)$ pour obtenir un voisinage ouvert $O'_x \times O'_y$ de (x_0, y_0) dans $X \times Y$ tel que $\varphi(O'_x \times O'_y)$ est un ouvert de $X \times Y$ et φ est un $\mathcal{C}^m$ difféomorphisme de $O'_x \times O'_y$ dans $\varphi(O'_x \times O'_y)$. Par définition, pour tout $(x, y) \in O'_x \times O'_y$, l'équation $f(x, y) = 0$ est équivalente à $\varphi(x, y) = (x, 0)$. Posons à présent

$$U := \{x \in O'_x : (x, 0) \in \varphi(O'_x \times O'_y)\} \quad \text{et} \quad V := O'_y.$$

L'ensemble U est ouvert car $U = p_{X,0}^{-1}(\varphi(O'_x \times O'_y))$ où $\varphi(O'_x \times O'_y)$ est ouvert et $p_{X,0} : x \in X \mapsto (x, 0) \in X \times Y$ est continue[8]. Posons aussi, pour tout $x \in U$,

$$g(x) := (\pi_Y \circ \varphi^{-1} \circ p_{X,0})(x) = \pi_Y(\varphi^{-1}(x, 0)) \in V.$$

L'application g est $\mathcal{C}^m(U \subset X, V \subset Y)$ par composition des applications $\mathcal{C}^m$ que sont $p_{X,0}$, π_Y, et φ^{-1}. □

Exemple 8.4.5. exponentielle.

Soit X Banach. Pour tout endomorphisme $u \in L(X)$, l'exponentielle

$$\exp(u) := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} u^k$$

est bien définie dans $L(X)$ car absolument convergente par sous-multiplicativité de la norme, et en particulier $\|\exp(u)\| \leq \exp(\|u\|)$. Par convention, $u^0 = \text{id}$, de sorte qu'en particulier $\exp(0) = \text{id}$. L'application exponentielle d'endomorphismes $\exp : u \in L(X) \mapsto \exp(u) \in L(X)$ vérifie, pour tous $a, h \in L(X)$,

$$(D\exp)(a)(h) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} (D(u \mapsto u^k))(a)(h) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} a^j h a^{k-1-j} = h + \frac{1}{2}(ha + ah) + \frac{1}{6}(ha^2 + aha + a^2 h) + \cdots.$$

En particulier $(D\exp)(0) = \text{id}_{L(X)}$. Le théorème 8.4.3 d'inversion locale affirme alors qu'il existe un voisinage ouvert O' de 0 tel que exp est un difféomorphisme sur son image. Cet inverse est le logarithme ! Pour en savoir plus, le mieux est de s'intéresser à l'application exponentielle pour les groupes de Lie[a] [23].

8. Cette application nous est familière, elle intervient par exemple dans la définition des dérivées partielles.

Pour tout $a \in L(X)$, l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) := \exp(ta) \in L(X)$ vérifie $x'(t) = a\exp(ta) = ax(t)$. Il s'agit d'une équation différentielle, linéaire. Ce type d'équation fait l'objet du chapitre suivant !

a. Point de rencontre entre algèbre, analyse, et géométrie.

Chapitre 9

Équations différentielles ordinaires (EDO)

Pour aller plus loin : [11], [14], [3], [24], cours du DMA d'analyse des équations aux dérivées partielles, mais aussi de processus stochastiques, et de systèmes dynamiques.

Les équations différentielles ordinaires sont partout en mathématiques et ailleurs : relation fondamentale de la dynamique, cinétique chimique, dynamique de population, circuit RLC, etc.

Soit X un Banach, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $O \subset X$ un ouvert, et $f : I \times O \to X$ continue. Pour un $(t_0, x_0) \in I \times O$, on considère le problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{avec} \quad x(t_0) = x_0. \tag{EDO}$$

Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire (EDO).

- Pour tout $t \in I$, $x \in O \mapsto f(t,x) \in X$ est un champ de vecteurs.
- Lorsque f ne dépend pas du temps t, on parle d'EDO autonome. On prend alors $I = \mathbb{R}$.
- Il est toujours possible de transformer (EDO) en une EDO autonome : rajouter le temps à l'espace $(t, x(t))' = (1, f(t, x(t))) =: g((t, x(t)))$, bien qu'artificiel, cela peut s'avérer parfois utile.
- Toute EDO d'ordre plus élevé $x^{(k)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(k-1)}(t))$ peut se réécrire en $y'(t) = F(t, y(t))$ où $y(t) := (x(t), \dots, x^{(k-1)}(t)) \in X^k$ et $F(t, a_0, \dots, a_{k-1}) := (a_1, \dots, a_{k-1}, f(t, a_0, \dots, a_{k-1}))$.
- Renverser le temps : $x'_-(t) = f_-(t, x_-(t))$, $x_-(t_0) = x_0$, où $x_-(t) := x(2t_0 - t)$ et $f_-(t,x) := -f(2t_0 - t, x)$.

Définition 9.0.1. Solution locale.

Une solution locale de (EDO) est une fonction $x \in \mathcal{C}^1(J, X)$ où J est un intervalle ouvert tel que $t_0 \in J \subset I$, $x(J) \subset O$, et (EDO) a lieu pour tout $t \in J$.

Lemme 9.0.2. Formulation intégrale de l'EDO.

Une fonction x est solution locale sur J de (EDO) ssi $x \in \mathcal{C}^0(J, X)$, $x(J) \subset O$, et pour tout $t \in J$,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\mathrm{d}s. \tag{EDOI}$$

Preuve. Observons tout d'abord que (EDOI) implique $x(t_0) = x_0$.

On dispose d'un théorème fondamental du calcul infinitésimal pour l'intégrale de Riemann des fonctions continues de la variable réelle à valeurs dans un Banach (remarque 8.2.2) : si $F : [a,b] \to X$ est $\mathcal{C}^1$ alors $F(t) = F(a) + \int_a^t F'(s)\mathrm{d}s$ pour tout $t \in [a,b]$. Réciproquement, si $g : [a,b] \to X$ est continue, alors la fonction $G : [a,b] \to X$ définie par $G(t) := \int_a^t g(s)\mathrm{d}s$ est dérivable sur (a,b) et $G'(t) = g(t)$ pour tout $t \in (a,b)$. En effet, $G(t+h) = G(t) + \int_t^{t+h} g(s)\mathrm{d}s$, et en utilisant la continuité de g en t, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta_\varepsilon$ assez petit tel que pour tout s tel que $|t - s| \leq \eta$, $\|g(s) - g(t)\| \leq \varepsilon$, d'où, pour $|h| \leq \eta$,

$$\left\| \int_t^{t+h} g(s)\mathrm{d}s - hg(t) \right\| = \left\| \int_t^{t+h} (g(s) - g(t))\mathrm{d}s \right\| \leq \int_t^{t+h} \|g(s) - g(t)\|\mathrm{d}s \leq |h|\varepsilon.$$

Ainsi (EDOI) et (EDO) sont équivalentes. □

(1) **Existence locale.** L'existence locale en (t_0, x_0) pour (EDO) signifie l'existence d'une solution de (EDO) définie sur un intervalle J tel que $t_0 \in J \subset I$. Le théorème de Cauchy–Peano (théorème 9.1.3) affirme l'existence locale quand X est de dimension finie. Le théorème de Cauchy–Lipschitz (théorème 9.1.1) affirme l'existence locale dans le cas où f est localement bornée et Lipschitz en la variable d'espace.

(2) **Unicité locale.** Il y a unicité locale en (t_0, x_0) de (EDO) lorsque pour tout couple de solutions locales en (t_0, x_0), disons sur J_1 et J_2, il existe $J \subset J_1 \cap J_2$ tel que $t_0 \in J$ et les deux solutions coïncident sur J. Le théorème de Cauchy–Lipschitz (théorème 9.1.1) affirme l'unicité locale (en plus de l'existence locale) lorsque f est localement bornée et localement Lipschitz en la variable d'espace. Dans l'exemple autonome $x' = \sqrt{|x|}$, $(t_0, x_0) = (0, 0)$, $x \equiv 0$ et $x(t) = \mathrm{sign}(t)t^2/4$ sont solution, donc pas d'unicité locale en $(0, 0)$. Notons que $f(t, x) = \sqrt{|x|}$ n'est pas localement Lipschitz en 0, cela illustre le rôle crucial pour l'unicité de l'hypothèse de lipschitzianité de f en la variable d'espace.

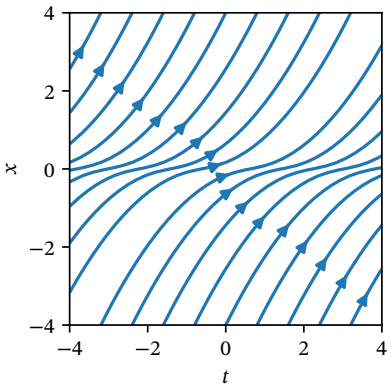


FIGURE 9.1 – Champ des pentes sur $I \times O$ pour $x' = \sqrt{|x|}$.

(3) **Solutions maximales.** Une solution locale de (EDO) sur un intervalle J est maximale lorsqu'elle ne peut pas être prolongée sur un intervalle plus grand. S'il y a unicité locale en tout point alors :
— deux solutions locales x_1 et x_2 sur J_1 et J_2 coïncident sur $J_1 \cap J_2$, et non plus seulement sur un $J \subset J_1 \cap J_2$. En effet, l'ensemble $J := \{t \in J_1 \cap J_2 \,:\, x_1(t) = x_2(t)\}$ est à la fois
  — non vide : car il contient t_0
  — fermé dans $J_1 \cap J_2$ car séquentiellement fermé car x_1 et x_2 sont continues
  — ouvert dans $J_1 \cap J_2$ car si $t_1 \in J$ alors l'unicité locale en (t_1, y_1) où $y_1 := x_1(t_1) = x_2(t_1)$, fournit un voisinage ouvert de t_1 dans $J_1 \cap J_2$.

  Comme $J_1 \cap J_2$ est connexe, on en déduit que $J = J_1 \cap J_2$.
— en prenant la réunion des intervalles des solutions locales en (t_0, x_0) on obtient l'intervalle maximal d'existence $I_{\max} = I_{\max}(t_0, x_0)$ et une solution maximale $x_{\max} \in \mathcal{C}^1(I_{\max}, X)$ qui est unique.

Lu 04/01

Exemple 9.0.3. autonome instructif.

Considérons l'EDO autonome $x' = |x|^\alpha$, sur $X = \mathbb{R}$, avec $\alpha \neq 0$ fixé.
Les solutions sont toutes croissantes : $x' \geq 0$.

(a) Si $\alpha > 0$ alors $x \equiv 0$ est toujours solution, sur tout $\mathbb{R}$, lorsque $x_0 = 0$.

(b) Si $\alpha = 1$ alors la solution est $x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\mathrm{sign}(x_0)(t-t_0)}$. Meilleure situation possible : existence et unicité locale en tout point et $I_{\max} = \mathbb{R}$ pour toute solution.

(c) Si $\alpha > 1$ alors une étude montre que la seule solution non identiquement nulle vérifie

$$x(t) = |(\alpha - 1)(T - t)|^{-1/(\alpha-1)} \mathrm{sign}(T - t) \quad \text{où} \quad T = T_{t_0,x_0} \in \mathbb{R}.$$

On a toujours existence et unicité locale en tout point mais $I_{\max} = (-\infty, T)$ pour les solutions telles que $x_0 > 0$ tandis que $I_{\max} = (T, +\infty)$ pour les solutions telles que $x_0 < 0$.

(d) Si $0 < \alpha < 1$ alors les solutions locales sont, pour $x_0 \neq 0$,

$$x(t) = |(1 - \alpha)(t - T)|^{1/(1-\alpha)} \mathrm{sign}(t - T) \quad \text{où} \quad T = T_{t_0,x_0} \in \mathbb{R}.$$

En revanche il n'y a pas d'unicité locale si $x_0 = 0$, les solutions locales sont

$$x(t) = 0, \qquad \text{et} \qquad x(t) = |(1 - \alpha)(t - t_0)|^{1/(1-\alpha)} \mathrm{sign}(t - t0),$$

et dans ce cas chaque solution locale peut être étendue en une solution sur $I = \mathbb{R}$, et on ne peut pas parler de $I_{\max}$ car cette extension n'est pas unique. Notons que $f(x) = |x|^\alpha$ est α-Hölder mais n'est pas Lipschitz en $x = 0$, et ceci illustre le rôle crucial de la régularité Lipschitz de f en espace pour l'unicité locale.

(e) Si $\alpha < 0$ alors la fonction f de l'EDO est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, les solutions sont données par les formules du cas $0 < \alpha < 1$ et $I_{\max} = (T, +\infty)$ ou $I_{\max} = (-\infty, T)$ selon le signe de x_0. La situation est similaire au cas $\alpha > 1$ sauf qu'au lieu de l'explosion $x(t) \to \pm\infty$ quand $t \to T$, on a $x(t) \to 0 \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$ quand $t \to T$.

9.1 Théorème de Cauchy–Lipschitz et théorème de Cauchy–Peano

Théorème 9.1.1. de Cauchy–Lipschitz et itération de Picard.

Supposons que f dans (EDO), en plus d'être continue, est localement uniformément en temps Lipschitz en la variable d'espace en (t_0, x_0) : il existe $\tau, \rho, M, L > 0$ tels que $\overline{B}(t_0, \tau) \times \overline{B}(x_0, \rho) \subset I \times O$ et :

— $\|f(t,x)\| \leq M$ pour tout $(t,x) \in \overline{B}(t_0,\tau) \times \overline{B}(x_0,\rho)$

— $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|$ pour tout $t \in \overline{B}(t_0,\tau)$ et tous $x, y \in \overline{B}(x_0,\rho)$.

Alors, pour tout $\varepsilon < \min(\tau, \frac{\rho}{M})$, en notant $I_\varepsilon := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, on a :

— existence et unicité : il existe une unique solution x sur I_ε, et il y a unicité locale en (t_0, x_0).

— constructibilité par itération de Picard : $x^{(0)} := x_0$, $x^{(n+1)} := Ax^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ dans $\mathcal{C}(\overline{I_\varepsilon}, X)$ où

$$(Ax)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\mathrm{d}s.$$

Le fait que f est localement bornée (constante M) vient du fait que f est continue.

On parle aussi de théorème de Picard ou de théorème de Picard–Lindelöf.

Le paramètre ε et donc l'intervalle I_ε ne dépendent pas[1] de la constante de Lipschitz L.

La preuve reste essentiellement valable même si f n'est pas continue en temps et pour les équations différentielles stochastiques (EDS).

Preuve. Soit pour l'instant $\varepsilon < \min(\tau, \frac{\rho}{M}, \frac{1}{L})$, $\kappa := \varepsilon L < 1$, et $I_\varepsilon := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Soit

$$A : x \in \mathcal{C}(\overline{I_\varepsilon}, \overline{B}(x_0,\rho)) \mapsto Ax \in \mathcal{C}(\overline{I_\varepsilon}, X), \quad (Ax)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\mathrm{d}s.$$

Alors A envoie l'espace de Banach $\mathcal{C}(\overline{I_\varepsilon}, \overline{B}(x_0,\rho))$ (norme uniforme) dans lui-même[2] car pour tout $t \in \overline{I_\varepsilon}$,

$$\|(Ax)(t) - x_0\| \leq |t - t_0| M \leq \rho.$$

D'autre part A est une contraction : $\|A\|_{\mathrm{Lip}} \leq \kappa < 1$, car pour tous $x, y \in \mathcal{C}(\overline{I_\varepsilon}, \overline{B}(x_0,\rho))$ et tout $t \in \overline{I_\varepsilon}$,

$$\|(Ax)(t) - (Ay)(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\|\mathrm{d}s \leq |t-t_0| L \sup_{s\in\overline{I_\varepsilon}} \|x(s) - y(s)\| \leq \kappa\|x-y\|.$$

Le théorème 8.4.1 de point fixe de Picard–Banach donne un unique point fixe $x \in \mathcal{C}(\overline{I_\varepsilon}, \overline{B}(x_0,\rho))$, or $Ax = x$ n'est rien d'autre que la formulation intégrale (EDOI) de (EDO). Il y a donc existence locale sur I_ε dès que $\varepsilon < \min(\tau, \frac{\rho}{M}, \frac{1}{L})$. Nous allons maintenant nous débarrasser de la dépendance en L.

Raffinons l'argument de point fixe. La méthode, classique en analyse, consiste à itérer l'approche précédente, en anglais on parle de *bootstrap*. Soit à présent $\varepsilon < \min(\tau, \frac{\rho}{M})$, choisi indépendamment de L, et $I_\varepsilon := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. L'opérateur A précédent envoie l'espace métrique complet $\mathcal{C}(\overline{I_\varepsilon}, \overline{B}(x_0,\rho))$ (norme uniforme) dans lui-même. Pour tout $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, tous $x, y \in \mathcal{C}([t_0 - t, t_0 + t], \overline{B}(x_0,\rho))$ et tout $n \geq 0$, on a

$$\|(A^n x)(t) - (A^n y)(t)\| \leq \frac{L^n |t-t_0|^n}{n!} \|x - y\|.$$

En effet, par récurrence sur n, cela est vrai pour $n = 0$ car $A^0 := \mathrm{id}$, et si cela est vrai pour $n \geq 0$ alors

$$\|(A^{n+1}x)(t) - (A^{n+1}y)(t)\| \leq L \int_{t_0}^{t} \|(A^n x)(s) - (A^n y)(s)\|\mathrm{d}s \leq \frac{L^{n+1}|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}\|x-y\|.$$

1. C'est donc la finitude de L qui compte plutôt que sa valeur : $L := \sup_{t\in\overline{B}(t_0,\tau)} \sup_{x\neq y\in\overline{B}(x_0,\rho)} \frac{\|f(x)-f(y)\|}{\|x-y\|} < \infty$.

2. On dit parfois que $\overline{B}(t_0,\tau) \times \overline{B}(x_0,\rho)$ est un cylindre de sécurité car la solution n'en sort pas.

Donc $\|A^n\|_{\mathrm{Lip}} \leq \frac{L^n \varepsilon^n}{n!} \to 0$ quand $n \to \infty$ (Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n$). Donc A^n est une contraction pour n assez grand : $\|A^n\|_{\mathrm{Lip}} < 1$, et possède donc un point fixe, unique. Il en va de même pour A car si x est le point fixe de A^n alors Ax est aussi point fixe de A^n car $A^n Ax = AA^n x = Ax$ et comme A^n a un unique point fixe, il vient que $Ax = x$, d'autre part tout point fixe de A est point fixe de A^n, donc A a un point fixe, unique. On a donc existence et unicité pour (EDO) sur I_ε pour tout $\varepsilon < \min(\tau, \frac{\rho}{M})$.

L'unicité sur I_ε donne l'unicité locale en (t_0, x_0) car ε peut être pris arbitrairement petit. □

La preuve ci-dessus conduit à la version généralisée suivante du théorème 8.4.1 de point fixe de Picard–Banach : si (X, d) est un espace métrique complet et si $f : X \to X$ est continue et telle que $f^{\circ n}$ est une contraction pour un certain entier n : $\|f^{\circ n}\|_{\mathrm{Lip}} < 1$, alors f possède un point fixe, qui est unique, donné par $\lim_{m\to\infty} f^{\circ mn}(x_0)$ avec $x_0 \in X$ quelconque.

Remarque 9.1.2. Itération de Picard, schéma d'Euler, méthodes de Runge–Kutta.

L'approximation numérique de la solution de (EDO) peut être menée en discrétisant le temps $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, et en discrétisant soit l'intégrale dans (EDOI) (discrétisation de l'itération de Picard) ou bien la dérivée dans (EDO) avec par exemple le schéma d'Euler explicite

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t f(t_k, x_k)$$

qui consiste à se promener par petits sauts dans un champ de vecteurs en approximant $x(t_k)$ par x_k. Ces algorithmes d'approximation ont été explorés notamment par Carl Runge et Wilhelm Kutta vers 1900, on parle de méthodes de Runge–Kutta. Plus généralement, l'analyse numérique des EDO/EDP fait appel à des méthodes ou schémas de discrétisation d'intégrales (volumes finis) ou de dérivées partielles (différences finies), ou exploite une formulation variationnelle (éléments finis), et conduit aux concepts de schéma explicite/implicite, de stabilité, de consistance, et de convergence. En particulier la convergence du schéma d'Euler fournit une preuve alternative du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 9.1.3. de Cauchy–Peano.

Si X est de dimension finie (c'est-à-dire $X = \mathbb{R}^n$) alors il y a existence locale de solution pour (EDO).

Attention : à ce degré de généralité, il n'y a pas forcément unicité locale.
On parle aussi de théorème de Peano tout court.
Par rapport à Cauchy–Lipschitz : moins d'hypothèses sur f mais moins de conclusion sur x.
L'intervalle sur lequel est définie la solution est le même que pour le théorème de Cauchy–Lipschitz.

Preuve. Comme $I \times O$ est ouvert, f est continue, et X est localement compact ; il existe $\tau, \rho > 0$ tels que $K := \overline{B}(t_0, \tau) \times \overline{B}(x_0, \rho) \subset I \times O$ est compact, et $M := \sup_{(t,x)\in K} \|f(t,x)\| < \infty$. Par le théorème de Stone–Weierstrass (théorème 5.3.2) appliqué à chacune des n fonctions coordonnées de f qui sont dans $\mathcal{C}(K \subset \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$, il existe une suite (f_k) de fonctions Lipschitz $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ convergeant uniformément vers f sur K (un polynôme est Lipschitz sur tout compact). Sans perte de généralité, on peut supposer que $M' := \sup_k \sup_{(t,x)\in K} \|f_k(t,x)\| \leq (1+\eta)M$ pour $\eta > 0$ arbitrairement petit. Pour tout k, le théorème de Cauchy–Lipschitz (théorème 9.1.1) donne une solution $x_k \in \mathcal{C}(\overline{I_\varepsilon}, \overline{B}(x_0, \rho))$ de (EDO) avec f_k sur $I_\varepsilon = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, pour tout $\varepsilon < \min(\tau, \frac{\rho}{M'})$, intervalle qui ne dépend pas de k.

La famille des fonctions (x_k) est ponctuellement compacte car les x_k sont toutes à valeur dans le compact $\overline{B}(x_0, \rho) \subset \mathbb{R}^n$, et uniformément équicontinue car $\|x_k(t) - x_k(s)\| \leq 2M|t - s|$ pour tous $s, t \in \overline{I_\varepsilon}$, donc par le théorème d'Arzelà–Ascoli (théorème 5.2.1), elles forment une famille relativement compacte de l'espace métrique $\mathcal{C}(\overline{I_\varepsilon}, \overline{B}(x_0, \rho))$. En particulier, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(k)})$ qui converge quand $k \to \infty$ vers une fonction x, dans $\mathcal{C}(\overline{I_\varepsilon}, \overline{B}(x_0, \rho))$. Or l'équation $A_k x_k = x_k$ où A_k est l'opérateur A avec f_k au lieu de f dans l'itération de Picard permet d'obtenir que $Ax = x$ grâce aux convergences uniformes $x_{\varphi(k)} \to x$ et de $(f_{\varphi(k)}) \to f$. □

— La preuve est emblématique des techniques d'approximation et d'extraction de sous-suites, pour l'analyse des équations aux dérivées partielles.
— Ce théorème peut aussi être démontré avec un théorème de point fixe de Schauder.
— Une preuve alternative, plus connue, du théorème de Cauchy–Peano consiste à approcher la solution par une fonction affine par morceaux associée à un schéma d'Euler de l'équation différentielle ordinaire, puis à procéder par extraction de sous-suite grâce au théorème de Arzelà–Ascoli. Dans ce cas il n'y a pas de réduction au théorème de Cauchy–Lipschitz via le théorème de Stone–Weierstrass.

— Les preuves du théorème de Cauchy–Peano font appel à un argument de compacité qui n'est plus disponible quand X est de dimension infinie, et il existe des contre-exemples notamment de Dieudonné (remarque 9.1.5). Il est possible de restaurer le théorème en dimension infinie en imposant par exemple à f d'être compacte : les images par f des boules fermées sont relativement compactes dans X.
— Le théorème de Cauchy–Peano possède des généralisations comme le théorème d'existence de Carathéodory (existence locale sous condition de continuité en temps et mesurabilité en espace). Par ailleurs un théorème d'Okamura donne une condition nécessaire et suffisante pour l'unicité.

Remarque 9.1.4. Solutions maximales, Cauchy–Lipschitz, Cauchy–Peano, et Zorn.

Une solution locale de (EDO) pour (t_0, x_0) peut admettre plusieurs prolongements, sur des intervalles maximaux éventuellement différents. Cela n'est pas contradictoire avec l'unicité locale en (t_0, x_0). L'absence éventuelle d'unicité du prolongement correspond à l'existence d'un point (t, x) de branchement où nait une multiplicité de prolongements, une rupture d'unicité locale. Ainsi la structure des prolongements maximaux est arborescente éventuellement recombinante, dans le passé comme dans le futur. La sélection d'une branche peut se faire en utilisant un ordre total sur O. Plus généralement, la sélection ou plutôt la construction d'un prolongement maximal d'une solution locale peut se faire au moyen du lemme de Zorn, c'est-à-dire de l'axiome du choix. Lorsque qu'il y a unicité locale partout, il y a alors unicité de solution maximale. Le théorème de Cauchy–Lipschitz peut fournir l'existence et l'unicité locale, en revanche il ne peut pas s'appliquer en un point de branchement. Le théorème de Cauchy–Peano peut s'appliquer en un point de branchement car il n'affirme pas d'unicité locale. Lorsque que le théorème de Cauchy–Lipschitz d'applique partout, la solution maximale est unique.

Remarque 9.1.5. Contre-exemple : non existence locale en dimension infinie.

Suivant Dieudonné [15], considérons $X = \ell_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, muni de la norme $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. C'est un sous-espace fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, donc un Banach. On définit $f : X \to X$ par $f(x)_n = \sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}$. Elle est continue car $x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{|x|}$ est uniformément continue (près de zéro par théorème de Heine et loin de zéro par bornitude de sa dérivée). Cependant, l'EDO $x' = f(x)$ n'a pas de solution en $(t_0, x_0) = (0, 0)$. Pour le voir, supposons par l'absurde que x est solution. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n' = \sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}$, donc x_n est strictement croissante, et comme $x_n(0) = 0$, il vient que $x_n(t) > 0$ pour $t > 0$, d'où, pour $t > 0$,

$$2\big(\sqrt{x_n(t)}\big)' = \frac{x_n'(t)}{\sqrt{x_n(t)}} \geq \frac{x_n'(t)}{\sqrt{x_n(t)} + \frac{1}{n+1}} = 1,$$

d'où $\sqrt{x_n(t)} \geq \frac{1}{2}t$, d'où $x_n(t) \geq \frac{1}{4}t^2$, ce qui contredit le fait que $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = 0$.
Le théorème de Cauchy-Peano est vrai sur un Banach X si et seulement X est de dimension finie [20].

9.2 Solutions globales et lemme de Grönwall

Me 06/01

Une solution maximale de (EDO) est globale lorsque $I_{\max} = I$.
Rappelons que $I = \mathbb{R}$ dans le cas autonome où f ne dépend pas du temps.

Théorème 9.2.1. Explosion au bord des solutions maximales.

Supposons que les hypothèses du théorème 9.1.1 de Cauchy–Lipschitz sont vérifiées en tout point de $I \times O$.
Soit x une solution maximale de (EDO) et $I_{\max} \subset I$ son intervalle de définition. Alors :
— Si $T_{\max} := \sup I_{\max} < \sup I$ alors x explose (sort de tout compact) au bord droit de $I_{\max}$: pour tout compact $K \subset O$, il existe $T_K < T_{\max}$ tel que $x(t) \notin K$ pour tout $t > T_K$.
— Si $T_{\min} := \inf I_{\max} > \inf I$ alors x explose (sort de tout compact) au bord gauche de $I_{\max}$: pour tout compact $K \subset O$, il existe $T_K > T_{\min}$ tel que $x(t) \notin K$ pour tout $t < T_K$.
En particulier, si $O = X$ et X est de dimension finie ($X = \mathbb{R}^n$), alors

$$\|x(t)\| \to \infty \quad \text{quand} \quad t \to T_{\max} \text{ ou } T_{\min}.$$

Si $O = X$ et X est de dimension infinie, il peut arriver que $\sup I_{\max} < \sup I$ et $x(t)$ reste bornée lorsque $t \to T_{\max}$, cf. [15], et ceci est dû au caractère local des hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz.

Si $O \subsetneq X$, la sortie de tout compact $K \subset O$ n'entraîne pas forcément l'explosion, même si X est de dimension finie, mais plutôt la convergence vers le bord de O.

Preuve. Par renversement du temps, les deux cas sont équivalents, et il suffit de traiter le premier par exemple. Supposons que $T_{\max} < \sup I$. Supposons par l'absurde qu'il existe un compact $K \subset O$ tel que pour tout $T_K < T_{\max}$, il existe $t > T_K$ tel que $x(t) \in K$. En prenant par exemple $T_K = T_{\max} - 1/n$, on obtient une suite (t_n) telle que $t_n \nearrow T_{\max}$ quand $n \to \infty$ et $x(t_n) \in K$ pour tout n. Comme K est compact dans X métrique, quitte a extraire une sous-suite, on a $x(t_{\varphi(n)}) \to x_* \in K \subset O$. Soit $\overline{B}(T_{\max}, \tau) \times \overline{B}(x_*, \rho) \subset I \times O$ un voisinage de $(T_{\max}, x_*)$ vérifiant les hypothèses du théorème 9.1.1 de Cauchy–Lipschitz au point $(T_{\max}, x_*)$:

$$M := \sup_{t \in \overline{B}(T_{\max}, \tau)} \sup_{x \in \overline{B}(x_*, \rho)} \|f(t,x)\| < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{t \in \overline{B}(T_{\max}, \tau)} \sup_{\substack{x,y \in \overline{B}(x_*, \rho) \\ x \neq y}} \frac{\|f(t,x) - f(t,y)\|}{\|x - y\|} < \infty.$$

Comme $\lim_{n\to\infty}(t_{\varphi(n)}, x(t_{\varphi(n)})) = (T_{\max}, x_*)$, à partir d'un certain rang sur n, on a $(t_{\varphi(n)}, x(t_{\varphi(n)})) \in \overline{B}(T_{\max}, \frac{\tau}{2}) \times \overline{B}(x_*, \frac{\rho}{2})$, donc $\overline{B}(t_{\varphi(n)}, \frac{\tau}{2}) \times \overline{B}(x(t_{\varphi(n)}), \frac{\rho}{2}) \subset \overline{B}(T_{\max}, \tau) \times \overline{B}(x_*, \rho)$, et le théorème 9.1.1 de Cauchy–Lipschitz s'applique au point $(t_{\varphi(n)}, x(t_{\varphi(n)}))$ avec constantes $\frac{\tau}{2}$, $\frac{\rho}{2}$, et M, et fournit une solution locale en $(t_{\varphi(n)}, x(t_{\varphi(n)}))$ avec un intervalle I_ε, pour ε arbitrairement proche de $\min(\frac{\tau}{2}, \frac{\rho}{2M})$, seuil qui ne dépend pas de n. Ceci contredit la maximalité de la solution x dès que n est assez grand pour que $T_{\max} - t_{\varphi(n)} < \varepsilon$.

Il est inutile d'appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz en $(T_{\max}, x_*)$ car pour bénéficier de l'unicité locale et prolonger la solution maximale d'origine avec la nouvelle solution, il faudrait que les deux intervalles (ouverts) de définition de ces solutions contiennent $T_{\max}$, ce qui n'est pas le cas pour le premier (bord !). □

Le lemme fondamental suivant et ses variantes sont essentiels pour l'étude des EDO.

Lemme 9.2.2. de Grönwall[a].

a. Démontré à l'origine par Thomas Hakon Grönwall vers 1919. Il en existe des variantes différentielles ou intégrales, à coefficients variables en temps et signés, et des extensions non linéaires (inégalité de Bihari–LaSalle).

Si $u \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$, et, pour des constantes $a \geq 0$ et $c \in \mathbb{R}$,

$$u(t) \leq c + a \int_0^t u(s)\mathrm{d}s \text{ pour tout } t \in [0,T], \quad \text{alors } u(t) \leq c\mathrm{e}^{at} \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Plus généralement (ou en particulier) si $v \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$, et si pour des constantes $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$

$$v(t) \leq c + \int_0^t (av(s) + b)\mathrm{d}s \text{ pour tout } t \in [0,T], \quad \text{alors } v(t) + \frac{b}{a} \leq (c + \frac{b}{a})\mathrm{e}^{at} \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Autrement dit, la version intégrale de l'inégalité différentielle $u' \leq au$, $u(0) \leq c$, permet de comparer u avec la solution de l'équation différentielle de $u' = au$, $u(0) = c$, qui est l'exponentielle $t \mapsto c\mathrm{e}^{at}$.

Preuve. On itère la condition (*bootstrap* !), ce qui donne, par récurrence sur $n \geq 0$,

$$u(t) \leq c + c(at) + \cdots + c\frac{(at)^n}{n!} + a^{n+1} \int_0^{t_0} \cdots \int_0^{t_n} u(t_{n+1})\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{n+1}, \text{ pour tout } t \in [0,T] \ (t_0 := t).$$

L'erreur est bornée par $\|u\|_\infty \frac{(at)^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (Stirling !). Pour le « plus généralement », on pose $u = v + \frac{b}{a}$. □

Théorème 9.2.3. Condition suffisante pour la globalité des solutions maximales.

Supposons que f dans (EDO), en plus d'être continue, est globalement Lipschitz en la variable d'espace uniformément sur tout intervalle de temps borné : pour tout intervalle borné $J \subset I$,

$$\sup_{t \in J} L_t < \infty \quad \text{où} \quad L_t := \sup_{\substack{x,y \in O \\ x \neq y}} \frac{\|f(t,x) - f(t,y)\|}{\|x - y\|}.$$

Alors :

— il y a existence et unicité locales pour (EDO) en tout point de $I \times O$

— lorsque $O = X$, toute solution maximale de (EDO) est globale : $I_{\max} = I$.

Preuve. Si I est non borné, le résultat se déduit du résulat avec I borné, en prennant des intervalles bornés de plus en plus grand. Ainsi il reste à prouver le cas où I est borné, et dans ce cas en prenant $J = I$, l'hypothèse équivaut f globalement Lipschitz :

$$L := \sup_{t\in I} \sup_{\substack{x,y\in O\\ x\neq y}} \frac{\|f(t,x)-f(t,y)\|}{\|x-y\|} < \infty.$$

Le théorème 9.1.1 de Cauchy–Lipschitz donne existence et unicité locales pour (EDO) en tout point de $I \times O$. Soit à présent $x \in \mathcal{C}^1(I_{\max}, X)$ la solution maximale de (EDO). Supposons par l'absurde que $T_{\max} := \sup I_{\max} < \sup I$, en particulier $T_{\max} < \infty$. Pour tout $t \in [t_0, T_{\max})$, soit

$$v(t) := \|x(t) - x_0\|.$$

Notons que $v(t_0) = 0$. Comme f est globalement Lipschitz, on a

$$\begin{aligned}\|x'(t)\| = \|f(t,x(t))\| &\leq \|f(t,x(t)) - f(t,x_0)\| + \|f(t,x_0)\| \\ &\leq L\|x(t) - x_0\| + \|f(t,x_0)\| \leq Lv(t) + C\end{aligned}$$

où $C := \sup_{t\in[t_0,T_{\max})} \|f(t,x_0)\| < \infty$ car $t \mapsto f(t,x_0)$ est continue. Donc pour tout $t \in [t_0, T_{\max})$,

$$v(t) - v(t_0) \leq \int_{t_0}^{t} (Lv(s) + C)\mathrm{d}s.$$

En effet, en utilisant (EDO), il est tentant d'écrire $v'(t) \leq \|x'(t)\|$, mais la dérivabilité de v n'est pas évidente, cependant en utilisant (EDOI) et le fait que $t \geq t_0$ on obtient

$$v(t) - v(t_0) = v(t) = \|x(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s,x(s))\|\mathrm{d}s \leq \int_{t_0}^{t} (Lv(s) + C)\mathrm{d}s.$$

Alternativement, on passe par les sommes de Riemann : pour toute partition $s_0 := t_0 < s_1 < \cdots < s_n := t$ du segment $[t_0, t]$, grâce à l'inégalité triangulaire puis à l'inégalité des accroissements finis (lemme 8.2.1)

$$\begin{aligned}v(s_{k+1}) - v(s_k) = \|x(s_{k+1}) - x_0\| - \|x(s_k) - x_0\| &\leq \|x(s_{k+1}) - x(s_k)\| \leq (s_{k+1} - s_k) \max_{s\in[s_k,s_{k+1}]} \|x'(s)\| \\ &\leq (s_{k+1} - s_k) \max_{s\in[s_k,s_{k+1}]} (Lv(s) + C),\end{aligned}$$

d'où $v(t) - v(t_0) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (s_{k+1} - s_k) \max_{s\in[s_k,s_{k+1}]} (Lv(s) + C)$, d'où l'inégalité intégrale.

Ensuite, le lemme de Grönwall (lemme 9.2.2) donne

$$v(t) \leq \frac{C}{L}(\mathrm{e}^{L(t-t_0)} - 1) \text{ pour tout } t \in [t_0, T_{\max}).$$

En particulier $\|v(t)\|$ reste bornée quand $t \to T_{\max}$, ce qui contredit le théorème 9.2.1 sur l'explosion au bord des solutions maximales quand $O = X$ et X est de dimension finie.

Quand X est Hilbert, il est commode et considérer la fonction $w(t) := \|x(t) - x_0\|^2$, $t \in [t_0, T_{\max})$ au lieu de $u(t) := \|x(t) - x_0\|$, qui a l'avantage d'être dérivable. Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$w'(t) = 2\langle x'(t), x(t) - x_0\rangle \leq 2\|x'(t)\|\|x(t) - x_0\|$$

et donc, en utilisant l'estimée antérieure sur $\|x'(t)\|$ et les inégalités $2ab \leq a^2 + b^2$ puis $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$,

$$w'(t) \leq 2(L\|x(t) - x_0\| + C)\|x(t) - x_0\| \leq (2L^2 + 1)w(t) + 2C^2,$$

et il ne reste plus qu'à utiliser le lemme de Grönwall et raisonner comme précédemment.

Examinons le cas où $O = X$ et X est de dimension infinie. Comme $t \mapsto f(t, x_0)$ est continue en tout $t \in [t_0, T_{\max}]$, il existe $\tau > 0$ tel que $C := \sup_{s\in[t_0,T_{\max}+\tau]} \|f(s,x_0)\| < \infty$. D'autre part, comme f est globalement Lipschitz, pour tout $s \in [t_0, T_{\max} + \tau]$ et $x \in X$,

$$\|f(s,x)\| \leq \|f(s,x) - f(s,x_0) + f(s,x_0)\| \leq L\|x - x_0\| + C.$$

Pour $\rho > 0$ fixé, comme $t \mapsto v(t)$ est bornée sur $t \in [t_0, T_{\max})$, on obtient

$$M := \sup_{s\in[t_0,T_{\max}+\tau]} \sup_{x\in\overline{B}(x(t),\rho)} \|f(s,x)\| < \infty,$$

uniformément en $t \in [t_0, T_{\max})$. À remarquer que sans l'hypothèse $O = X$, le paramètre ρ dépendrait de $x(t)$ donc de t, et pourrait tendre vers zéro. Il en découle que pour tout $t \in [t_0, T_{\max})$, le théorème 9.1.1 de Cauchy–Lipschitz s'applique en $(t, x(t))$ avec τ, ρ, M uniformes en t, d'où, pour t arbitrairement proche de $T_{\max}$, une solution sur $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ avec ε qui ne dépend pas de t, d'où une contradiction avec la maximalité de la solution x quand $T_{\max} - t < \varepsilon$. □

Remarque 9.2.4. Représentation graphique.

- Si on conçoit $x(t)$ comme la position d'un mobile dans $O \subset X$ à l'instant t, alors la quantité $x'(t) = f(t, x(t))$ est sa vitesse à l'instant t, c'est un vecteur, élément de X. L'espace X sert donc à la fois à coder la position et la vitesse. Seule la position est contrainte par O. L'ensemble O est appelé espace d'états ou espace des phases. Pour tout $t \in I$, on représente $f(t, \cdot)$ comme un champ de vecteurs (de X) sur $O \subset X$.
- L'EDO est autonome quand ce champ de vecteurs ne dépend pas du temps t, et dans ce cas on représente les trajectoires des solutions par des courbes paramétrées (par le temps) tracées sur O, traditionnellement appelées courbes intégrales, dont le vecteur vitesse (forcément tangent à la courbe) est donné par le champ de vecteur, ce qui indique la manière de les parcourir. Cela est particulièrement agréable à visualiser quand $\dim(X) = 2$.
- Si l'EDO n'est pas forcément autonome, le champ de vecteurs évolue en temps, et on représente les solutions par leur courbe représentative dans $I \times O \subset \mathbb{R} \times X$. Un schéma d'Euler correspond, à partir d'un point x_0 dans O au temps t_0, de suivre linéairement le vecteur $f(t_0, x_0)$ pendant un temps Δt, ce qui donne $t_1 = t_0 + \Delta t$ et $x_1 = x_0 + (\Delta t) f(t_0, x_0)$, puis de suivre linéairement le vecteur $f(t_1, x_1)$ pendant un temps Δt, etc. L'usage d'un pas de temps Δt adaptatif permet d'éviter la sortie de O. Lorsque $\dim(X) = 1$, on a coutume de représenter f sous forme de champ des pentes sur $\mathbb{R}^2$, avec t en abscisse, x en ordonnée, et de petites pentes régulièrement espacées. Le cas autonome correspond alors à une invariance par translation horizontale. Les pentes des courbes représentatives des solutions sont données par le champ des pentes.
- Sous les hypothèses d'existence et d'unicité locales en tout point :
  - Les courbes représentatives des solutions ne peuvent pas se croiser et $I \times O$ est partitionné en courbes représentatives des solutions maximales (existence et unicité).
    Dans le cas autonome, les trajectoires des solutions (courbes paramétrées sur O) ne peuvent pas se croiser, O est partitionné en trajectoires des solutions maximales, et cette représentation est appelée diagramme des phases de l'EDO autonome.
  - Les solutions explosent en espace aux bords finis de l'intervalle temporel maximal de définition (théorèmes 9.2.1 et 9.2.3). Aux bords infinis, elles peuvent exploser ou non.

Exemple 9.2.5. Cas autonome, cas d'une équation de Riccati.

Considérons l'équation autonome de Riccati $x'(t) = (x(t))^2 - 1$ dans $I \times O = I \times X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On a $f(x) = x^2 - 1$, qui vérifie partout les hypothèses du théorème 9.1.1 de Cauchy–Lipschitz, mais pas celles du théorème 9.2.3 sur le prolongement global. Il y a donc existence et unicité locale partout, les solutions locales sont prolongeables en solutions maximales, mais ces solutions ne sont pas forcément globales, et dans ce cas elles explosent aux bords finis de l'intervalle de temps maximal.

- On dispose de deux solutions constantes $x(t) \equiv \pm 1$.
- Si $x_0 \in (-1, 1)$ alors en raison de l'unicité locale, la solution ne peut pas croiser les lignes ± 1, elle reste donc bornée, elle est donc globale c'est-à-dire qu'elle existe pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- En fait, toutes les solutions de cette équation s'écrivent

$$x(t) = \frac{1 + c\mathrm{e}^{2t}}{1 - c\mathrm{e}^{2t}}, \quad \text{où} \quad c := \frac{x(0) - 1}{x(0) + 1} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

  Pour le voir, on peut écrire $\frac{x'(t)}{x(t)^2-1} = \frac{x'(t)}{(x(t)-1)(x(t)+1)} = \frac{x'(t)}{2(x(t)-1)} + \frac{x'(t)}{2(x(t)+1)} = 1$, d'où on tire $\log\left|\frac{x(t)-1}{x(0)-1}\right| - \log\left|\frac{x(t)+1}{x(0)+1}\right| = 2t$, c'est-à-dire $\log\left|\frac{x(t)-1}{x(t)+1}\right| + \log\left|\frac{x(0)+1}{x(0)-1}\right| = 2t$, d'où $\frac{x(t)-1}{x(t)+1} = c\mathrm{e}^{2t}$ où $c := \frac{x(0)-1}{x(0)+1}$, d'où le résultat car $\frac{x-1}{x+1} = y \Leftrightarrow x = \frac{1+y}{1-y}$ (homographie ou transformée de Möbius).

— Si $x_0 > 1$ ou si $x_0 < -1$, alors $c > 0$ et la solution explose en temps fini en $t = -\frac{\log(c)}{2}$.

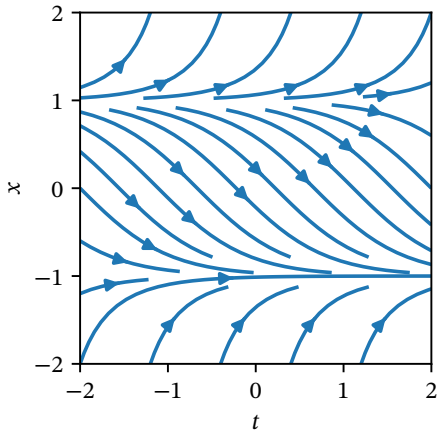


FIGURE 9.2 – Champ des pentes sur $I \times O = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour $x' = x^2 - 1$. Les pentes sont nulles en $x = \pm 1$, et tendent vers l'infini quand x tend vers l'infini.

Exemple 9.2.6. Cas autonome de l'équation du pendule à petites oscillations.

Pour un pendule simple de longueur ℓ et de masse m, en notant θ l'angle, le lagrangien est la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle : $L(t, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta$. Ainsi les équations d'Euler–Lagrange sont : $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin(\theta)$, où $\omega^2 = g/\ell$. Pour transformer cette équation du second ordre en (EDO) on pose

$$x := \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad f\begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\omega^2 \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Ici, le diagramme des phases est $\mathbb{R}^2$ avec θ en abscisse, $\dot{\theta}$ en ordonnée, et des courbes paramétrées, « intégrales », qui partitionnent cet espace.

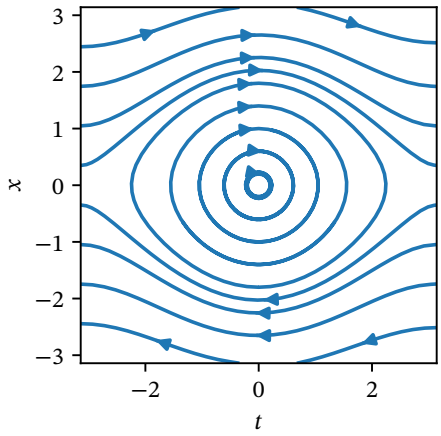


FIGURE 9.3 – Courbes intégrales de f sur $O = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour le pendule simple.

En petites oscillations, l'équation se linéarise en $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$, ou sous la forme (EDO) en $f(x) = Ax$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

qui mène à l'étude des (EDO) linéaires générales de la section suivante.

9.3 Équations différentielles linéaires, résolvante, formule de Duhamel

Lu 11/01

Dans cette section, on considère l'équation différentielle linéaire

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad t \in I, \quad x(t_0) = x_0 \tag{EDOL}$$

où $I \subset \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{C}(I, L(X))$ et $b \in \mathcal{C}(I, X)$, $t_0 \in I$, $x_0 \in X$. Il s'agit d'un cas particulier de (EDO) avec $O = X$ et $f(t,x) = A(t)x + b(t)$. Lorsque $X = \mathbb{R}^n$ (vecteurs colonne) on identifie $L(X) \equiv \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 9.3.1. Résolvante et formule de Duhamel.

(i) Toute solution maximale de (EDOL) est globale.

(ii) L'équation différentielle ordinaire, posée dans $L(X)$,

$$R'_{t_0}(t) = A(t)R_{t_0}(t), \quad R_{t_0}(t_0) = \mathrm{id},$$

admet une unique solution globale R_{t_0}, appelée résolvante de (EDOL). On note

$$R(t, t_0) := R_{t_0}(t).$$

Dans le cas où A est constante, on a, en notant également A cette constante,

$$R(t, t_0) = \exp((t - t_0)A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}(t - t_0)^n.$$

(iii) Pour tout $t_1, t_2, t_3 \in I$, $R(t_3, t_1) = R(t_3, t_2)R(t_2, t_1)$. En particulier, pour tous $s, t \in I$,

$$R(s,t)R(t,s) = \mathrm{id} \quad \text{c'est-à-dire} \quad R(s,t)^{-1} = R(t,s).$$

(iv) Formule de Duhamel : l'unique solution globale de (EDOL) est donnée par

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)\mathrm{d}s, \quad t \in I.$$

La formule de Duhamel fait apparaître clairement que la solution dépend linéairement de x_0 et b.
Dans le cas homogène $b \equiv 0$, on a tout simplement $x(t) = R(t, t_0)x_0$.
Le nom résolvante souligne le fait que cela permet de résoudre (EDOL). À ne pas confondre avec la résolvante d'un opérateur u définie pour un nombre complexe z par $R_u(z) := (u - z\,\mathrm{id})^{-1}$.

Preuve.

(i) Comme $f(t,x) = A(t)x + b(t)$ est linéaire et continue en la variable d'espace x, elle est globalement Lipschitz en la variable d'espace et cette constante de Lipschitz, la norme de $A(t)$, dépend continûment de t. Donc par le théorème 9.2.3, toute solution maximale est globale.

(ii) Cas particulier de (EDOL). On vérifie que l'exponentielle est bien solution dans le cas constant.

(iii) Les deux membres résolvent l'EDO $R'(t) = A(t)R(t)$ en t_3 avec même valeur en $t_3 = t_2$.

(iv) Vérifions tout d'abord que la formule proposée pour $x(t)$ est bien solution de (EDOL). L'identité $\partial_t \int_{t_0}^{t} a(t,s)\mathrm{d}s = a(t,t) + \int_{t_0}^{t} \partial_t a(t,s)\mathrm{d}s$, l'item précédent, et $R(t,t) = \mathrm{id}$, donnent

$$x'(t) = A(t)R(t,t_0)x_0 + R(t,t)b(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)R(t,s)b(s)\mathrm{d}s = A(t)x(t) + b(t).$$

Mais la justification qu'il est possible de commuter, n'est pas si simple.

Alternativement, la formule de Duhamel peut être obtenue par la méthode de variation de la constante d'Euler et Lagrange. Plus précisément, à partir de la solution $R(t,t_0)x_0$ de l'équation homogène, on cherche une solution de l'équation inhomogène sous la forme $x(t) = R(t,t_0)y(t)$. Elle vérifie alors d'une part $x'(t) = R'(t,t_0)y(t) + R(t,t_0)y'(t)$, qui doit être égal d'autre part à $A(t)R(t,t_0)y(t) + b(t)$, d'où $R(t,t_0)y'(t) = b(t)$, d'où $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)b(s)\mathrm{d}s$, tandis que $x_0 = R(t_0,t_0)y(t_0) = y(t_0)$. En multipliant par $R(t,t_0)$ et en utilisant $R(t,t_0)R(t_0,s) = R(t,s)$, on obtient exactement la formule annoncée.

□

La formule $R(t,t_0) = \exp \int_{t_0}^t A(s)\mathrm{d}s$ reste vraie si les $\{A(s) : s \in [t_0,t]\}$ commutent, ce qui est toujours vrai en dimension 1 (voir lemme 9.6.6), mais n'a pas lieu en général quand A n'est pas constante. Dans le cas général, il faut utiliser l'exponentielle ordonnée en temps (time-ordered exponential) : $R(t,t_0) = \mathcal{T} \exp \int_{t_0}^t A(s)\mathrm{d}s$. L'exponentielle ordonnée apparaît par exemple en mécanique quantique dans la série de Dyson en représentation d'interaction. On dispose cependant du résultat plus faible suivant, où la non commutativité est effacée par la cyclicité de la trace :

Théorème 9.3.2. Formule du déterminant de la résolvante.

Lorsque $X = \mathbb{R}^n$, on a, pour tous $t_0, t \in I$,

$$\det(R(t,t_0)) = \exp \int_{t_0}^t \operatorname{trace}(A(s))\mathrm{d}s.$$

Ce théorème est utilisé pour la preuve du théorème de Liouville des systèmes hamiltoniens (section 9.5).

À retenir au passage : $\det \exp = \exp \operatorname{trace}$ sur les matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\log \det = \operatorname{trace} \log$ lorsque le logarithme est bien défini.

Preuve. Comme $X = \mathbb{R}^n$, $R(t,t_0) = [c_1(t), \dots, c_n(t)]$ est une matrice, sa i-eme colonne c_i est solution de $c_i'(t) = A(t)c_i(t)$, $c_i(t_0) = e_i$. Comme det est multilinéaire et $R(t,t_0)^{-1} = R(t_0,t)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\det(R(t,t_0))'}{\det(R(t,t_0))} &= \sum_{i=1}^n \det(R(t_0,t)[c_1(t), \dots, c_{i-1}(t), A(t)c_i(t), c_{i+1}(t), \dots, c_n(t)]) \\ &= \sum_{i=1}^n \det([e_1, \dots, e_{i-1}, R(t_0,t)A(t)R(t,t_0)e_i, e_{i+1}, \dots, e_n]) \\ &= \operatorname{trace}(R(t_0,t)A(t)R(t,t_0)) = \operatorname{trace}(A(t)),\end{aligned}$$

d'où le résultat en tenant compte de la condition initiale $R(t_0,t_0) = \mathrm{id}$.

Par linéarité en la i-colonne, la forme linéaire $v \in \mathbb{R}^n \mapsto \ell(v) := \det([e_1, \dots, e_{i-1}, v, e_{i+1}, \dots, e_n])$ vérifie $\ell(v) = \sum_{j=1}^n v_j \ell(e_j) = v_i$, car $\ell(e_i) = 1$ et $\ell(e_j) = \det([e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_n]) = 0$ si $j \neq i$. Alternativement, permuter $i-1$ lignes et $i-1$ colonnes pour obtenir une matrice triangulaire inférieure dont la première colonne commence par v_i les autres étant $e_2, \dots, e_n$, ce qui revient à conjuguer par une matrice de permutation. □

Applications aux EDO linéaires d'ordre n, système fondamental de solutions, déterminant Wronskien, etc. TD

Exemple 9.3.3. Un pendule forcé et son phénomène de résonance.

Suite à l'exemple 9.2.6, considérons l'EDO[a] $\ddot\theta(t) = -\theta(t) + \varepsilon \sin(\omega t)$, $t \geq 0$, avec condition initiale $\theta(0) = \dot\theta(0) = 0$. On la réécrit comme cas particulier de (EDOL) comme suit : $(x_1, x_2) := (\theta, \dot\theta)$ et

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas[b] $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$, ce qui donne

$$R(t,s) = \exp\Big[(t-s)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\Big] = \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix}.$$

Ceci permet d'obtenir la solution par la formule de Duhamel :

$$\theta(t) = x_1(t) = \varepsilon \int_0^t \sin(t-s)\sin(\omega s)\mathrm{d}s = \varepsilon \begin{cases} \dfrac{\omega \sin(t) - \sin(\omega t)}{\omega^2 - 1} & \text{si } \omega \neq \pm 1 \\ \frac{\omega}{2}(\sin(t) - t\cos(t)) & \text{si } \omega = \pm 1 \end{cases},$$

où on a utilisé $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$. Au passage, cette formule est continue en ω au sens où le cas $\omega = \pm 1$ dérive du cas $\omega \neq \pm 1$ par passage à la limite. Il apparaît que si $\omega \neq \pm 1$, alors

la solution reste bornée pour tout t, tandis que si $\omega = \pm 1$, alors elle croît linéairement en t, même si ε est arbitrairement petit. Plus généralement, avec l'équation plus physique $\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta + \varepsilon\sin(\omega t)$, $\omega_0 \neq 0$, le phénomène se produit quand $\omega = \pm\omega_0$, et on dit qu'il y a résonance avec la fréquence propre ω_0.

a. C'est un oscillateur harmonique forcé (équation de Newton pour masse accrochée à un ressort). C'est également la linéarisation de l'équation d'un pendule à entraînement circulaire uniforme dans le cas de petites oscillations.
b. Toute matrice antisymétrique est normale, donc diagonalisable en base orthonormée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

9.4 Dépendance à la condition initiale, notion de flot

Définition 9.4.1. Flot.

Lorsqu'il y a existence et unicité locale pour (EDO) :
- On note $I_{\max}(t_0, x_0)$ l'intervalle d'existence maximal de (EDO)
- On pose $\mathcal{D}_{t_0} := \cup_{x\in O} I_{\max}(t_0, x)\times\{x\} \subset I\times O$.
- On définit le flot de (EDO) comme étant l'application qui a $(t, x) \in \mathcal{D}_{t_0}$ associe la valeur en t de la solution partant de x au temps t_0. Autrement dit $\varphi_{t_0} : \mathcal{D}_{t_0} \to X$ est définie par $\varphi_{t_0}(t, x) := x_{t_0,x}(t)$ où $x_{t_0,x}$ est la solution de (EDO) avec condition initiale $x_{t_0,x}(t_0) = x$.
- Dans le plan temps-espace : flot des courbes représentatives des solutions partant de t_0.
- Propriété de groupe : $\varphi_s(t, \varphi_{t_0}(s, x)) = \varphi_{t_0}(t, x)$.

Exemple 9.4.2. Cas autonome et équation de Riccati.

Dans le cas autonome $x'(t) = f(x(t))$, le flot $\varphi_{t_0}(t, x)$ ne dépend de (t_0, t) que via $t - t_0$:

$$\varphi_{t_0}(t, x) = \varphi_0(t - t_0, x) = \varphi_{t-t_0}(x) \quad \text{où} \quad \varphi_s(x) := \varphi_0(s, x).$$

Considérons l'équation autonome de Riccati $x'(t) = (x(t))^2 - 1$ de l'exemple 9.2.5. Le flot est

$$\varphi_t(x) = \frac{1 + \frac{x-1}{x+1}\mathrm{e}^{2t}}{1 - \frac{x-1}{x+1}\mathrm{e}^{2t}} = \frac{x + 1 + (x-1)\mathrm{e}^{2t}}{x + 1 - (x-1)\mathrm{e}^{2t}} = \frac{x(1+\mathrm{e}^{2t}) + 1 - \mathrm{e}^{2t}}{1 + \mathrm{e}^{2t} + x(1-\mathrm{e}^{2t})} = \frac{x - \tanh(t)}{1 - x\tanh(t)},$$

tandis que $\mathcal{D}_0 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x\tanh(t) < 1\}$. Rappel : $\tanh(z) := \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}} = \frac{\mathrm{e}^{2z}-1}{\mathrm{e}^{2z}+1}$.

Lemme 9.4.3. Une conséquence du lemme de Grönwall.

Si x_1 et x_2 sont solutions de (EDO) sur I_1 et I_2 avec conditions initiales $x_1(t_0)$ et $x_2(t_0)$ et telles que[a]

$$\|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))\| \leq C\|x_1(t) - x_2(t)\|$$

pour une constante $C > 0$ et tout $t \in I_1 \cap I_2$, alors pour tout $t \in I_1 \cap I_2$,

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \mathrm{e}^{C|t-t_0|}\|x_1(t_0) - x_2(t_0)\|.$$

a. A lieu par exemple lorsque f est Lipschitz en la variable d'espace sur un voisinage des solutions.

Preuve. L'argument ressemble à celui utilisé dans la preuve du théorème 9.2.3 de globalité des solutions maximales. On pose $u(t) := \|x_1(t) - x_2(t)\|$ de sorte que pour tout $t \geq t_0$, par (EDOI),

$$u(t) \leq u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\|\mathrm{d}s \leq u(t_0) + \int_{t_0}^{t} Cu(s)\mathrm{d}s,$$

d'où $u(t) \leq u(t_0)\mathrm{e}^{C(t-t_0)}$ par le lemme 9.2.2 de Grönwall. Idem pour $t < t_0$ par renversement du temps. □

Théorème 9.4.4. Flot.

Supposons que f dans (EDO), en plus d'être continue, est localement uniformément en temps Lipschitz en la variable d'espace (voir théorème 9.1.1) en tout point $(t,x) \in I \times O$, alors :

(i) l'ensemble $\mathcal{D}_{t_0} \subset I \times O \subset \mathbb{R} \times X$ est ouvert

(ii) le flot φ_{t_0} est localement Lipschitz sur $\mathcal{D}_{t_0}$.

L'hypothèse de régularité sur f est inspirée de la preuve des théorèmes 9.2.1 et 9.2.3 et permet d'appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz avec des constantes uniformes sur un voisinage fermé borné.

Preuve.

(i) Soit $x_0 \in O$, et $t_1 > t_0$ tel que $t_1 < T_{\max}(t_0,x_0) := \sup I_{\max}(t_0,x_0)$, le cas $t_1 < t_0$ étant similaire. Il suffit d'établir que $t_1 < T_{\max}(t_0,x) := \sup I_{\max}(t_0,x)$ pour x dans un voisinage de x_0. On peut supposer que $T_{\max}(t_0,x) < +\infty$ sinon il n'y a rien à démontrer.
Pour tout $s \in [t_0,t_1]$, il existe $\tau(s),\rho(s),M(s),L(s) > 0$ tels que $\overline{B}(s,\tau(s)) \times \overline{B}(\varphi_{t_0}(s,x_0),\rho(s)) \subset I \times O$ et :
— $\|f(t,x)\| \leq M(s)$ pour tout $(t,x) \in \overline{B}(t_0,\tau(s)) \times \overline{B}(x_0,\rho(s))$
— $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(s)\|x-y\|$ pour tout $t \in \overline{B}(t_0,\tau(s))$ et tous $x,y \in \overline{B}(x_0,\rho(s))$.
Comme $[t_0,t_1]$ est compact, la trajectoire $\{(s,\varphi_{t_0}(s,x_0)), s \in [t_0,t_1]\}$ est compacte. Il existe donc un sous-recouvrement fini des boules précédentes, donc en particulier un ouvert V contenant la trajectoire et $M,L > 0$ tels que $\|f(t,x)\| \leq M$ et $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|$ pour tout $(t,x) \in V$ et $(t,y) \in V$. Puisque V est ouvert, pour tout $s \in [t_0,t_1]$, il existe $r(s) > 0$ tel que $B(s,r(s) \times B(\varphi_{t_0}(s,x_0)),r(s)) \subset V$. A nouveau par compacité, la trajectoire est reconverte par un nombre fini de telle boules, donc il existe $r > 0$ et un voisinage tubulaire autour de la trajectoire

$$W := \big\{(t,x) \in [t_0,t_1] \times O \,:\, \|x - \varphi_{t_0}(t,x_0)\| \leq r\big\} \subset V.$$

À présent, on va montrer que si $\|x-x_0\| \leq re^{-L|t_1-t_0|}$, alors $\varphi_{t_0}(t,x)$ existe pour tout $t \in [t_0,t_1]$. Tout d'abord, remarquons que $(t_0,x) \in W$ car $\varphi_{t_0}(t_0,x) = x$. On introduit le premier temps de sortie de $(t,\varphi_{t_0}(t,x))$ de W :

$$t_{\text{sortie}} := \inf\big\{t \in [t_0,T_{\max}(t_0,x)) \,:\, (t,\varphi_{t_0}(t,x)) \notin W\big\}.$$

La solution $\varphi_{t_0}(\cdot,x)$ doit quitter W strictement avant d'arrêter d'exister : $t_{\text{sortie}} < T_{\max}(t_0,x)$. En effet, si on avait $t_{\text{sortie}} = T_{\max}(t_0,x)$, on pourrait alors appliquer le théorème 9.1.1 de Cauchy–Lipschitz en $(s,\varphi_{t_0}(s,x)) \in W$ avec s arbitrairement proche de $T_{\max}(t_0,x)$, ce qui donnerait une solution sur $(s-\varepsilon,s+\varepsilon) \subset I_{\max}(t_0,x)$ avec $\varepsilon > 0$ indépendant de s, ce qui contredirait la maximalité de la solution dès que $s > T_{\max}(t_0,x) - \varepsilon$.
Ainsi $t_{\text{sortie}} < T_{\max}(t_0,x)$ et puisque $t_{\text{sortie}} \leq t_1 < T_{\max}(t_0,x_0)$, les solutions partant de x_0 et x existent sur un interval ouvert contenant $[t_0,t_{\text{sortie}}]$, donc par le lemme 9.4.3 (lié au lemme de Grönwall), on a

$$\|\varphi_{t_0}(t_{\text{sortie}},x) - \varphi_{t_0}(t_{\text{sortie}},x_0)\| \leq e^{L(t_{\text{sortie}}-t_0)}\|x-x_0\| \leq re^{-L|t_1-t_{\text{sortie}}|},$$

dès que $\|x-x_0\| \leq re^{-L|t_1-t_0|}$. Cela termine de démontrer que $t_{\text{sortie}} = t_1$, car si $t_{\text{sortie}} < t_1$, alors le point $(t_{\text{sortie}},\varphi_{t_0}(t_{\text{sortie}},x))$ serait à l'intérieur de W (car borne $< r$) et non pas sur son bord (borne $= r$).

(ii) Soit $(t,x_0) \in \mathcal{D}_{t_0}$ et $t_1 > t$ tel que $t_1 < T_{\max}(t_0,x_0) := \sup I_{\max}(t_0,x_0)$. En procédant comme en (i) on obtient

$$\|\varphi_{t_0}(t,x) - \varphi_{t_0}(t,x_0)\| \leq e^{L(t_1-t_0)}\|x-x_0\|$$

dès que $\|x-x_0\| \leq r = r_{t_0,x_0,t_1}$, en d'autres termes, le flot φ_{t_0} est Lipschitz en la variable d'espace dans un voisinage en espace du point (t,x).
D'autre part, le flot est localement Lipschitz en temps, car la bornitude locale de f donne via (EDOI) $\|\varphi_{t_0}(t',x) - \varphi_{t_0}(t,x)\| \leq M|t-t'|$ pour tout t' assez proche de t et tout x tel que $\|x-x_0\| \leq r$.

□

Dans le cas de (EDOL), le flot $\varphi_{t_0}(t,x)$ est donné par la formule de Duhamel du théorème 9.3.1, il est affine en x, et en particulier, $D_x\varphi_{t_0}(t,x) = R(t,t_0)$ ne dépend pas de x. Dans le cas autonome et homogène, $D_x\varphi_{t_0}(t,x) = \exp((t-t_0)A)$. Le théorème suivant traite de la linéarisation de (EDO) en (EDOL).

Théorème 9.4.5. Équation différentielle linéaire de la dérivation du flot.

Supposons que f dans (EDO), en plus d'être continue, admet une dérivée partielle en espace $D_x f : I\times O \to L(X)$ continue. Alors pour tout $t \in I_{\max}(t_0, x_0)$, la fonction $\varphi_{t_0}(t, \cdot)$ est dérivable en x_0 et

$$\partial_t(D_x\varphi_{t_0})(t, x_0) = (D_x f)(t, \varphi_{t_0}(t, x_0))\circ(D_x\varphi_{t_0})(t, x_0),$$

en d'autres termes $t \mapsto (D_x\varphi_{t_0})(t, x_0)$ résout (EDOL) homogène dans $L(X)$ avec

$$A(t) := (D_x f)(t, \varphi_{t_0}(t, x_0))$$

et condition initiale id en t_0. En notant R la résolvante associée à A : $(D_x\varphi_{t_0})(t, x_0) = R(t, t_0)$.
En particulier, le flot $\varphi_{t_0} : \mathcal{D}_{t_0} \to X$ est $\mathcal{C}^1$, et en fait $\mathcal{C}^n$ si f l'est aussi.

Concernant la preuve du théorème 9.4.5, l'argument formel

$$\partial_t(D_x\varphi_{t_0})(t, x_0) \approx (D_x\partial_t\varphi_{t_0})(t, x_0) = (Df(t, \varphi_{t_0}(t, \cdot)))(x_0) = (D_x f)(t, \varphi_{t_0}(t, x_0))\circ(D_x\varphi_{t_0})(t, x_0)$$

est difficile à justifier, et d'ailleurs la preuve du théorème 9.4.5 ci-dessous procède différemment.

Preuve. Par définition, $\varphi_{t_0}(t_0, x) = x$ et donc $(D_x\varphi_{t_0})(t_0, x) = \mathrm{id}$.

En notant $R(t, t_0)$ la résolvante associée à $A(t) := (D_x f)(t, \varphi_{t_0}(t, x_0))$, on montrera que pour x proche de x_0

$$y(t, x) := \varphi_{t_0}(t, x) - \varphi_{t_0}(t, x_0) = R(t, t_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|),$$

ce qui par définition de la dérivée montrera que $(D_x\varphi_{t_0})(t, x_0)$ existe et est égale à $R(t, t_0)$.

Par continuité, $D_x f$ est localement bornée et donc par le lemme 8.2.1 des accroissements finis, f est localement uniformément en temps Lipschitz en espace, donc satisfait l'hypothèse du théorème 9.4.4.

Par le théorème 9.4.4, pour x assez proche de x_0, il existe $t_1 > t_0$ tel que $\varphi_{t_0}(t, x_0)$ et $\varphi_{t_0}(t, x)$ sont bien définis pour tout $t \in [t_0, t_1]$. Pour un tel t, on a par (EDOI)

$$y(t, x) := \varphi_{t_0}(t, x) - \varphi_{t_0}(t, x_0) = x - x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(f(s, \underbrace{\varphi_{t_0}(s, x)}_{z}) - f(s, \underbrace{\varphi_{t_0}(s, x_0)}_{z_0})\big)\mathrm{d}s.$$

L'idée à présent est de linéariser le terme sous l'intégrale quand $x \to x_0$ pour faire apparaître (EDOL). Pour la linéarisation de f, comme $D_x f$ est continûment dérivable selon x, le reste

$$r(s, z, z_0) := f(s, z) - f(s, z_0) - (D_x f)(s, z_0)(z - z_0)$$

est uniforme en $s \in [t_0, t]$: $\sup_{s\in[t_0,t]} \|r(s, z, z_0)\| = o(\|z - z_0\|)$ pour tout z assez proche de z_0, cela découle de l'application du lemme 8.2.1 des accroissements finis sur $z \mapsto r(s, z, z_0)$. L'idée est de chosir $z := \varphi_{t_0}(s, x)$ et $z_0 := \varphi_{t_0}(s, x_0)$. Le lemme 9.4.3 (lié au lemme de Grönwall) donne $L > 0$ tel que

$$\|z - z_0\| = \|\varphi_{t_0}(s, x) - \varphi_{t_0}(s, x_0)\| \le \mathrm{e}^{L(s-t_0)}\|x - x_0\|,$$

pour tous x assez proche de x_0 et $s \in [t_0, t]$, et donc l'estimation précédente devient :

$$f(s, \varphi_{t_0}(s, x)) - f(s, \varphi_{t_0}(s, x_0)) = A(s)y(s, x) + b(s, x),$$

où $\sup_{s\in[t_0,t]} \|b(s, x)\| \le \sup_{s\in[t_0,t]} \|r(s, \varphi_{t_0}(s, x))\| = o(\|x - x_0\|)$. Ainsi :

$$y(t, x) = x - x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(s)y(s, x) + b(s, x)\big)\mathrm{d}s,$$

et la formule de Duhamel du théorème 9.3.1 donne

$$y(t, x) = R(t, t_0)(x - x_0) + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s, x)\mathrm{d}s = R(t, t_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

Comme $y(t, x) := \varphi_{t_0}(t, x) - \varphi_{t_0}(t, x_0)$, cela montre que $\varphi_{t_0}(t, \cdot)$ est dérivable en x_0 et $D_x\varphi_{t_0}(t, x_0) = R(t, t_0)$.

Pour montrer que φ_{t_0} est de classe $\mathcal{C}^1$, il reste à montrer que $\partial_t\varphi_{t_0}$ et $D_x\varphi_{t_0}$ sont continues. Or $(t, x_0) \mapsto \partial_t\varphi_{t_0}(t, x_0) = f(t, \varphi_{t_0}(t, x_0))$ est évidemment continue. Il est possible de montrer (en adaptant la preuve du théorème 9.1.1 de Cauchy–Lipschitz ou alternativement en suivant [11, théorème 1.11.1]) que $(D_x\varphi_{t_0})$ est bien continue, car $(D_x\varphi_{t_0})(t, x_0)$ est solution de (EDOL) avec $A(t; x_0) := (D_x f)(t, \varphi_{t_0}(t, x_0))$ continue en tout (t, x_0). □

9.5 Systèmes hamiltoniens de la mécanique classique

En mécanique classique, les systèmes hamiltoniens constituent une classe d'EDO dans l'espace des phases d'un système vu comme un point dans l'espace euclidien. Plus précisément, soit [3]

$$x(t) = (q(t), p(t)) \in \mathbb{R}^{2n}$$

où $q(t) \in \mathbb{R}^n$ est la position au temps t, et $p(t) \in \mathbb{R}^n$ l'impulsion ou quantité de mouvement ou momentum au temps t (masse $\times$ vitesse). L'énergie du système au temps t est donnée par $H(t, q(t), p(t))$ où $H : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ est une fonction appelée hamiltonien du système. Un système hamiltonien d'EDO a la forme suivante :

$$\begin{cases} q'(t) &= \nabla_p H(t, q(t), p(t)) \\ p'(t) &= -\nabla_q H(t, q(t), p(t)) \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } x'(t) = \Omega \nabla_x H(t, x(t)) \text{ où } \Omega := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ -\mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}.$$

Au passage, ceci conduit à la géométrie symplectique. À titre d'exemple, on peut penser au cas

$$H(t, q, p) = H(q, p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k^2}{2m_k} + V(q_1, \dots, q_n),$$

somme d'une énergie cinétique et d'une énergie potentielle, de sorte que l'EDO $x'(t) = \Omega \nabla H(x(t))$ n'est rien d'autre que l'équation ou relation fondamentale de la dynamique de Newton : $q_k'(t) = v_k(t)$ (tautologique) où $p_k(t) = m_k v_k(t)$, tandis que $m_k q_k''(t) = m_k v_k'(t) = p_k'(t) = -\partial_k V(q_1(t), \dots, q_n(t))$.

Un fait remarquable est le suivant : si $H(t, q, p)$ ne dépend pas du temps t, alors $H(q(t), p(t))$ est constante le long des trajectoires, ce qui exprime la conservation de l'énergie du système :

$$\begin{aligned} \partial_t(H(q(t), p(t))) &= \nabla_x H(q(t), p(t)) \cdot \Omega \nabla_x H(q(t), p(t)) \\ &= \nabla_p H(q(t), p(t)) \cdot \nabla_q H(q(t), p(t)) - \nabla_q H(q(t), p(t)) \cdot \nabla_p H(q(t), p(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Géométriquement, cela signifie que $x'(t) = (q'(t), p'(t)) \perp \nabla_x H(q(t), p(t))$, c'est-à-dire que l'EDO d'Hamilton force la trajectoire $t \mapsto (q(t), p(t))$ à rester sur une ligne de niveau [4] de l'hamiltonien H, d'où la conservation de l'énergie, naturelle car l'équation d'Hamilton est une formulation de la mécanique classique.

Il existe une loi de conservation plus profonde, valable pour les hamiltoniens dépendants du temps ou non, appelée théorème de Liouville : *le flot $\varphi_{t_0}(t, \cdot)$ de l'hamiltonien du système conserve le volume dans l'espace des phases : le déterminant du jacobien de $\varphi_{t_0}(t, \cdot)$ est égal à* 1. Pour le voir, le système hamiltonien correspond à $f(t, x) := \Omega \nabla_x H(t, x)$ et donc par le théorème 9.4.5, $(D_x \varphi_{t_0})(t, x_0) = R(t, t_0; x_0)$ où $R(t, t_0; x_0)$ est la résolvante de $A(t; x_0) := (D_x f)(t, \varphi_{t_0}(t, x_0))$. Ainsi en utilisant le théorème 9.3.2,

$$\det((D_x \varphi_{t_0})(t, x_0)) = \det(R(t, t_0; x_0)) = \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{trace}(A(s; x_0)) \mathrm{d}s.$$

Or explicitement $(D_x f) = \Omega \nabla_x^2 H = \Omega \mathrm{Hess}(H)$, donc $A(t; x_0) = \Omega \mathrm{Hess}(H)(t, \varphi_{t_0}(t, x_0))$. La symétrie $\mathrm{Hess}(H)^\top = \mathrm{Hess}(H)$ et l'antisymétrie $\Omega^\top = -\Omega$ donnent :

$$\operatorname{trace}(A(s; x_0)) = \operatorname{trace}(A(s; x_0)^\top) = -\operatorname{trace}(A(s; x_0)) = 0,$$

de sorte que $\det((D_x \varphi_{t_0})(t, x_0)) = 1$ ou $\det(\mathrm{Jac}\ \varphi_{t_0}(t, \cdot)) = 1$. A remarquer qu'on a utilisé que H est de classe $\mathcal{C}^2$.

3. Cette notation contre-intuitive voire déroutante – *impulsion* ne commence pas par p, *position* ne contient pas la lettre q, qui vient après p – ne semble pas être utilisée par Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813), tandis que la lettre H des systèmes hamiltoniens serait en l'honneur de Christian Huygens (1629 – 1695) et non pas de William Rowan Hamilton (1805 – 1865)! Les lettres p et q sont utilisées comme nous le faisons dans des commentaires de l'oeuvre de Lagrange postérieurs à Hamilton. Mais l'origine de la notation p pour le « momentum » n'est pas claire. Il a été suggéré que comme la lettre m était déjà utilisée pour la masse, l'usage pourrait provenir du latin *petere* ou du mot *progrès*, un terme utilisé par Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). En sociologie des sciences, la loi de Stigler stipule qu'« Une découverte scientifique ne porte jamais le nom de son auteur », et le statisticien Stephen Stiegler l'attribue lui-même à Robert K. Merton. Dans la même veine, le professeur Michael Berry a formulé les deux principes suivants : « Si une notion porte un nom propre, ce n'est pas celui de son créateur » (Principe d'Arnold) et « Le principe d'Arnold s'applique à lui-même » (Principe de Berry). Malgré tout, (mal) nommer reste utile.

4. C'est l'occasion de penser au passage à la méthode de descente de gradient en optimisation.
L'opposé du gradient est la direction de plus forte pente. En physique, l'opposé du gradient du potentiel donne la force.

9.6 Stabilité au sens de Lyapounov des points stationnaires

Lu 18/01

Dans cette section, on considère (EDO) dans le cas de dimension finie $X = \mathbb{R}^n$, et autonome $x' = f(x)$, avec $f \in \mathcal{C}^1(O \subset X, X)$, qui est donc un champ de vecteurs. Ceci inclut deux exemples importants :

- les descentes de gradient pour lesquelles $f = -\nabla\mathcal{E}$ où $\mathcal{E} \in \mathcal{C}^2(O, \mathbb{R})$
  géométriquement le système descend aux ensembles de niveau de $\mathcal{E}$ de plus en plus bas
- les systèmes hamiltoniens pour lesquels $f = \Omega\nabla H$ avec Ω antisymétrique et $H \in \mathcal{C}^2(O, \mathbb{R})$
  géométriquement le système conserve l'ensemble de niveau de H de départ.

L'hypothèse de régularité sur f assure l'existence et unicité locale en tout point (théorème 9.1.1 de Cauchy–Lipschitz). On s'intéresse au comportement en temps long des solutions et aux point stationnaires qui sont les zéros du champ de vecteurs. Comme l'équation est autonome, concernant le flot, on peut supposer sans perte de généralité que $t_0 = 0$, et on a en particulier pour $x \in O$ et $t \in I_{\max}(x) := I_{\max}(0, x)$, on a $\varphi_t(x) := \varphi_0(t, x)$ et de plus $\varphi_0 \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}_0, O)$ et $\varphi_t \in \mathcal{C}(O, O)$ pour t assez petit.

Définition 9.6.1. Courbes intégrales, points stationnaires, points stables.

- Les courbes $(\varphi_t(x))_{t \in I_{\max}(x)}$ sont les courbes intégrales de f, et le partitionnement de l'espace des phases O en courbes intégrales est le diagramme des phases de l'équation.
- Si $f(x_0) \neq 0$, alors les courbes intégrales près de x_0 ressemblent à des droites allant vers $f(x_0)$.
- Si $f(x_0) = 0$, alors $\varphi_t(x_0) = x_0$ pour tout $t \geq 0$ et x_0 est un point stationnaire de f :
  - instable s'il n'est pas stable.
  - stable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{B}(x_0, \eta) \subset O$,

    $$T_{\max}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \|\varphi_t(x) - x_0\| \leq \varepsilon \text{ pour tout } t \geq 0.$$

    On peut rester advitam aussi proche qu'on veut de x_0 en partant d'assez près.
  - asymptotiquement stable si de plus pour tout $x \in \overline{B}(x_0, \eta_0)$ avec $\eta_0 > 0$ assez petit,

    $$\varphi_t(x) \to x_0 \text{ quand } t \to +\infty.$$

  - exponentiellement stable si de plus il existe $\alpha, C > 0$ telles pour tout $x \in \overline{B}(x_0, \eta_0)$,

    $$\|\varphi_t(x) - x_0\| \leq C\mathrm{e}^{-\alpha t}\|x - x_0\| \text{ pour tout } t \geq 0.$$

▾ compléments

Remarque 9.6.2. Linéarisation et étude en basse dimension.

Près d'un point stationnaire x_0, l'équation différentielle se linéarise en

$$\partial_t(x(t) - x_0) = A(x(t) - x_0) + o(\|x(t) - x_0\|), \quad \text{où} \quad A := (Df)(x_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On considère donc l'approximation linéaire $x' = Ax$ de l'EDO. Si A a des valeurs propres nulles, alors le comportement des trajectoires près de l'espace propre correspondant ne peuvent pas être modélisées par cette approximation linéaire. On considère donc le cas où A n'a pas de valeurs propres nulles. Examinons les situations de basse dimension pour développer l'intuition :

- Cas $n = 1$. Si $A > 0$, alors la solution s'éloigne de l'origine quand $t \to +\infty$, tandis que si $A < 0$, alors la solution tend exponentiellement vers l'origine quand $t \to +\infty$. C'est ce qui se produit avec les solutions de l'équation de Riccati $x' = x^2 - 1$ de l'exemple 9.2.5 près des points critiques $x = \pm 1$: le point stationnaire $x = +1$ est instable tandis que $x = -1$ est exponentiellement stable.
- Cas $n = 2$. La matrice A réelle 2×2 a soit deux valeurs propres réelles, soit deux valeurs propres complexes conjuguées. Supposons pour simplifier que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Quitte à changer de base dans $\mathbb{R}^2$, on peut supposer qu'on se trouve dans l'un des deux cas suivants :

  $$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, (\lambda_1, \lambda_2) = (a_1, a_2), \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (\lambda_1, \lambda_2) = (a + \mathrm{i}b, a - \mathrm{i}b).$$

  - Cas de deux valeurs propres réelles $\lambda_1 = a_1$ et $\lambda_2 = a_2$:
    - si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ alors toutes les solutions tendent vers l'origine quand $t \to \infty$, tandis que si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ alors qu'elles s'éloignent de l'origine quand $t \to \infty$. Comme $\exp(t\lambda_2) = (\exp(t\lambda_1))^{\lambda_2/\lambda_1}$, les solutions de l'équation linéarisée suivent des courbes en loi de puissance.

Un point stationnaire avec un tel comportement local est appelé nœud stable ou nœud instable.

— si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ alors la solution démarrée en $(x, 0)$ décroît exponentiellement tandis que toutes les autres solutions croissent quand $t \to +\infty$. Un tel point stationnaire est un point selle. Cette terminologie vient du fait que dans le cas de la descente de gradient $x'(t) = -\nabla\mathcal{E}(x(t))$, les minima locaux de $\mathcal{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnent lieu à des nœuds stables, les maxima locaux à des nœuds instables, et les points selles sont tels que $\nabla\mathcal{E}(x_0) = 0$ et la hessienne $\nabla^2\mathcal{E}(x_0)$ a des valeurs propres de signes opposés.

— Cas de deux valeurs propres complexes conjuguées. Dans ce cas les solutions s'écrivent

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{at}(x_1(0)\cos(bt) + x_2(0)\sin(bt)) \quad \text{et} \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{at}(-x_1(0)\sin(bt) + x_2(0)\cos(bt))$$

— Si $a \neq 0$, les solutions de l'équation linéarisée sont des spirales logarithmiques, allant vers l'origine quand $a < 0$ ou divergeant de l'origine quand $a > 0$. Un tel point stationnaire est appelé foyer stable ou foyer instable.

— Si $a = 0$ alors les trajectoires de $x' = Ax$ sont des cercles ou des ellipses dans le système de coordonnées d'origine. Un tel point stationnaire est appelé centre. Mais ce comportement n'est pas stable par perturbation de l'équation, comme le montre par exemple le phénomène de résonance abordé dans l'exemple 9.3.3.

— Lorsque la dimension n augmente, des situations de plus en plus sophistiquées apparaissent, en fonction des propriétés des valeurs propres de A. Malgré tout, dans la situation où les parties réelles des valeurs propres de A sont non nulles, le cas $n = 2$ est assez instructif car A peut être pensée comme somme directe de blocs dimensionnels.

C'est un point de départ de la théorie des catastrophes en géométrie différentielle, chère à René Thom, qui classifie qualitativement les singularités et leurs comportements par perturbation.

▲ compléments

Lorsque le champ de vecteurs f n'est pas une descente de gradient, il reste possible de rechercher une fonction qui assure une décroissance le long des trajectoires, c'est l'idée des fonctions de Lyapounov.

Définition 9.6.3. Fonction de Lyapounov et intégrale première.

(i) $\Phi \in \mathcal{C}^2(O, \mathbb{R})$ est une fonction de Lyapounov lorsque $\langle \nabla\Phi(x), f(x)\rangle \leq 0$ pour tout $x \in O$.

(ii) $H \in \mathcal{C}^2(O, \mathbb{R})$ est une intégrale première lorsque $\langle \nabla H(x), f(x)\rangle = 0$ pour tout $x \in O$.

Lemme 9.6.4. Caractérisation trajectorielles des fonctions de Lyapounov et intégrales premières.

(i) Φ est une fonction de Lyapounov ssi $\partial_t\Phi(\varphi_t(x)) \leq 0$ pour toutes les trajectoires.

(ii) H est une intégrale première ssi $H(\varphi_t(x))$ reste constante le long de toutes les trajectoires.

— Pour une descente de gradient, la fonction $\mathcal{E}$ est une fonction de Lyapounov.
— Pour un système hamiltonien autonome, l'hamiltonien H est une intégrale première.

Preuve.

(i) Si Φ est une fonction de Lyapunov, alors comme $\partial_t\varphi_t(x) = f(\varphi_t(x))$, la règle de la chaîne donne

$$\partial_t\Phi(\varphi_t(x)) = \langle \nabla\Phi(\varphi_t(x)), f(\varphi_t(x))\rangle \leq 0,$$

avec $\partial_t\mathcal{E}(\varphi_t(x)) = -\|\nabla\mathcal{E}(\varphi_t(x))\|^2 \leq 0$ pour une descente de gradient. Pour la réciproque : $\varphi_0(x) = x$.

(ii) Découle du (i) car H est une intégrale première ssi $\pm H$ sont des fonctions de Lyapounov. On peut aussi écrire directement $\partial_t H(\varphi_t(x)) = \langle \nabla H(\varphi_t(x)), f(\varphi_t(x))\rangle = 0$, avec $\partial_t H(\varphi_t(x)) = \langle \nabla H(\varphi_t(x)), \Omega\nabla H(\varphi_t(x))\rangle = 0$ pour un système hamiltonien. Réciproque par $\varphi_0(x) = x$.

□

Théorème 9.6.5. Critères de stationnarité et de stabilité.

(i) Si x_0 est un minimum local strict d'une fonction de Lyapounov Φ alors x_0 est stationnaire stable.

(ii) Si x_0 est stationnaire et si $\max \Re\mathrm{spec}(\mathrm{Jac}(f)(x_0)) < 0$, alors x_0 est exponentiellement stable.

La preuve montre qu'il suffit que Φ soit une fonction de Lyapounov locale, c'est-à-dire pour une EDO restreinte à une boule arbitrairement petite centrée en x_0, en lieu et place de O. Ceci a un impact a priori sur $T_{\max}$, mais au bout du compte on obtient que $T_{\max} = +\infty$.

Preuve.

(i) Il s'agit d'un raisonnement par continuité. Comme x_0 est un minimum local strict, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $\overline{B}(x_0,\varepsilon) \subset O$ et $\Phi(x_0) < \Phi(x)$ pour tout $x \in \overline{B}(x_0,\varepsilon) \setminus \{x_0\}$. Comme la sphère $S(x_0,\varepsilon)$ est compacte car la dimension est finie, et comme Φ est continue, il existe $x_1 \in S(x_0,\varepsilon)$ tel que $m := \min_{S(x_0,\varepsilon)} \Phi = \Phi(x_1)$, et comme $\Phi(x_1) > \Phi(x_0)$, il vient que $m > \Phi(x_0)$. D'un autre côté, comme Φ est continue en x_0 et $\Phi(x_0) < m$, il existe $0 < \eta < \varepsilon$ tel que le maximum M de Φ sur $\overline{B}(x_0,\eta)$ est $< m$. Maintenant, pour tout $x \in \overline{B}(x_0,\eta)$, comme $\varphi_0(x) = x$ et $t \mapsto \Phi(\varphi_t(x))$ décroît car Φ est une fonction de Lyapounov (lemme 9.6.4), la fonction Φ reste $\leq M < m$ le long de la trajectoire, la trajectoire ne peut donc pas atteindre la sphère $S(x_0,\varepsilon)$, elle reste ainsi dans $B(x_0,\varepsilon)$. Comme la trajectoire est bornée, et comme la dimension est finie, le théorème 9.2.1 donne $T_{\max}(x) = +\infty$. Donc x_0 est stable. Mais est-il stationnaire ? En fait, cela s'obtient naturellement à partir de la définition : on a $\|\varphi_t(x_0) - x_0\| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $t \geq 0$, donc $\varphi_t(x_0) = x_0$, et en utilisant $\partial_t \varphi_t(x_0) = f(\varphi_t(x_0))$ on obtient directement que $f(x_0) = 0$.
Observons que la monotonie le long de la trajectoire ne sert qu'à établir que $\sup_t \Phi(\varphi_t(x)) \leq \Phi(x)$.

(ii) Soit $A := \mathrm{Jac}(f)(x_0)$ la matrice jacobienne de f en x_0, et sa décomposition de Jordan

$$A = P^{-1}(D+E)P, \quad D := \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n), \quad P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Le vecteur x_0 (et x ci-dessous) et la matrice A sont réels mais P et D sont complexes (E est réelle mais ce n'est pas utilisé dans ce qui suit). On note P^* l'adjoint de P, c'est-à-dire la transposée conjugée complexe. On peut toujours supposer que $\|E\|$ est arbitrairement petite car les blocs de Jordan peuvent être conjugués, quitte à détériorer le conditionnement de P, en effet :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(1,\varepsilon,\varepsilon^2,\dots) \begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \varepsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \mathrm{diag}(1,\varepsilon^{-1},\varepsilon^{-2},\dots).$$

On a $\alpha := \max \mathfrak{R}\,\mathrm{spec}(\mathrm{Jac}(f)(x_0)) = \max_{1\leq k\leq n} \mathfrak{R}\lambda_k < 0$. Soit à présent

$$\Phi(x) := \|P(x-x_0)\|^2 = \langle P^*P(x-x_0), x-x_0\rangle,$$

d'où, en utilisant le fait que $x - x_0$ est réel pour la première égalité,

$$\nabla\Phi(x) = 2\mathfrak{R}(P^*P)(x-x_0) \quad \text{et en particulier} \quad \|\nabla\Phi(x)\| = O(\|x-x_0\|).$$

D'autre part $f(x_0) = 0$ car x_0 est stationnaire et donc $f(x) = A(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)$. On a donc, en utilisant le fait que A et $x - x_0$ sont réels pour la première égalité,

$$\begin{aligned} \langle \nabla\Phi(x), f(x)\rangle &= 2\mathfrak{R}\langle P^*P(x-x_0), A(x-x_0)\rangle + o(\|x-x_0\|^2) \\ &= 2\mathfrak{R}\langle P(x-x_0), (D+E)P(x-x_0)\rangle + o(\|x-x_0\|^2) \\ &= 2\mathfrak{R}\langle z, Dz\rangle + 2\mathfrak{R}\langle z, Ez\rangle + o(\|x-x_0\|^2) \end{aligned}$$

où $z := P(x-x_0)$. Or l'inégalité de Cauchy–Schwarz donne

$$2\mathfrak{R}\langle z, Ez\rangle \leq 2\|E\|\|z\|^2$$

tandis que

$$\langle z, Dz\rangle = \langle z, (\mathfrak{R}D)z\rangle - \mathrm{i}\langle z, (\mathfrak{I}D)z\rangle = \sum_k |z_k|^2 \mathfrak{R}\lambda_k - \mathrm{i}\sum_k |z_k|^2 \mathfrak{I}\lambda_k$$

donne

$$2\mathfrak{R}\langle z, Dz\rangle \leq -2|\alpha|\|z\|^2.$$

Donc, pour $0 < \beta < 2|\alpha|$, $\|E\|$ assez petit, et $\|x-x_0\| \leq \eta_0$ avec $\eta_0 > 0$ assez petit, il vient

$$\begin{aligned} \langle \nabla\Phi(x), f(x)\rangle &\leq -2|\alpha|\|P(x-x_0)\|^2 + 2\|E\|\|P(x-x_0)\|^2 + o(\|x-x_0\|^2) \\ &\leq -\beta\|P(x-x_0)\|^2 = -\beta\Phi(x). \end{aligned}$$

En particulier Φ est une fonction de Lyapounov sur l'ouvert restreint $O_0 := B(x_0, \eta_0) \subset O$, avec un minimum strict en x_0 car P est inversible, donc x_0 est stable par le (i). De plus $\partial_t \Phi(\varphi_t(x)) \leq -\beta\Phi(\varphi_t(x))$ pour $x \in \overline{B}(x_0, \eta_0)$, et comme $\varphi_0(x) = x$, le lemme de Grönwall différentiel (lemme 9.6.6) donne

$$\Phi(\varphi_t(x)) \leq \mathrm{e}^{-\beta t}\Phi(x).$$

Comme P est inversible, il existe $C > 0$ telle que $C^{-1}\|x - x_0\|^2 \leq \Phi(x) \leq C\|x - x_0\|^2$, et donc

$$\|\varphi_t(x) - x_0\| \leq C\mathrm{e}^{-\beta t/2}\|x - x_0\|$$

pour $\|x - x_0\| \leq \eta_0$ et tout $t \geq 0$, c'est-à-dire que x_0 est exponentiellement stable.

□

Lemme 9.6.6. Lemme de Grönwall différentiel.

Si $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur (a, b), et vérifie $u'(t) \leq \alpha(t)u(t)$ pour tout $t \in (a, b)$, avec $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, alors $u(t) \leq u(a)\exp\big(\int_a^t \alpha(s)\mathrm{d}s\big)$ pour tout $t \in [a, b]$.

Notons que α peut prendre des valeurs négatives, contrairement à la situation dans le lemme 9.2.2.

Le cas d'égalité $u'(t) = \alpha(t)u(t)$ est une EDOL non autonome de dimension 1.

Le lemme de Grönwall est une comparaison de la solution d'une inégalité différentielle ordinaire linéaire (IDOL) à la solution de l'EDOL associée.

Preuve. On a $v(t) := \exp\big(\int_a^t \alpha(s)\mathrm{d}s\big) > 0$ si $t \in [a, b]$, $v'(t) = \alpha(t)v(t)$ si $t \in (a, b)$, et $v(a) = 1$, d'où

$$\Big(\frac{u(t)}{v(t)}\Big)' = \frac{u'(t)v(t) - u(t)v'(t)}{v(t)^2} = \frac{(u'(t) - \alpha(t)u(t))v(t)}{v(t)^2} \leq 0$$

si $t \in (a, b)$, et donc $u(t)/v(t) \leq u(a)/v(a) = u(a)$ si $t \in [a, b]$. □

Remarque 9.6.7. EDO linéaires non autonomes : phénomènes contre-intuitifs.

Il semble qu'aussi bien Alexandre Lyapounov que Henri Poincaré avaient déjà remarqué que la solution d'une EDO linéaire non autonome $x'(t) = A(t)x(t)$ peut très bien diverger quand $t \to \infty$ alors même que pour tout t la matrice $A(t)$ n'a que des valeurs propres strictement négatives. Pour en savoir plus : [26].

Troisième partie

Compléments

Annexe A

Autour des variétés

Pour aller plus loin : cours du DMA de géométrie différentielle.

Variétés abstraites versus variétés plongées ou sous-variétés

Pour un espace topologique M, nous avons trois concepts de variété[1] $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, de dimension $n \geq 1$:

(0) Variété abstraite (voir définition 1.7.1) : un atlas $\{(O_i, f_i)\}_{i\in I}$ de $M = \cup_{i\in I} O_i$ formé d'homéomorphismes $f_i : O_i \subset M \to \mathbb{R}^n$ (cartes), avec changements de cartes $f_j \circ f_i^{-1} : f_i(O_i \cap O_j) \to f_j(O_i \cap O_j)$ de classe $\mathcal{C}^k$.

(1) Sous-variété de $\mathbb{R}^N$ définie localement par une équation : $M \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq n$, pour tout $a \in M$, il existe un voisinage ouvert $O_a \subset \mathbb{R}^N$ et $f_a \in \mathcal{C}^k(O_a, \mathbb{R}^{N-n})$ tels que $\mathrm{rang}(Df_a(a)) = N - n$ et

$$M \cap O_a = \{x \in O_a \,:\, f_a(x) = 0\}.$$

Le nombre d'équations à valeurs réelles est égal à la codimension $N - n$.

(2) Sous-variété de $\mathbb{R}^N$ définie localement par un graphe : $M \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq n$, et pour tout $a \in M$, il existe n coordonnées $I_a \subset \{1, \dots, N\}$, un voisinage ouvert $O_a = U_a \times V_a \subset \mathbb{R}^{I_a} \times \mathbb{R}^{I_a^c}$, et $g_a \in \mathcal{C}^k(U_a, V_a)$ tels que

$$M \cap O_a = \{(x_{I_a}, g_a(x_{I_a})) \,:\, x_{I_a} \in U_a\}.$$

Le nombre de variables réelles est égal à la dimension n.

Exemple A.0.1. Cercle et sphères.

— S^1 comme variété abstraite : projections stéréographiques comme cartes (par exemple).
— S^1 comme sous-variété de $\mathbb{R}^2$: équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
— S^1 comme sous-variété de $\mathbb{R}^2$: graphes de $x \mapsto (x, \pm\sqrt{1-x^2})$ et $y \mapsto (y, \pm\sqrt{1-y^2})$.

Idem pour la sphère $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ de $\mathbb{R}^n$, plongée dans $\mathbb{R}^n$.

Dans (1) et (2), on parle de courbe si $n = 1$, de surface si $n = 2$, et d'hypersurface si $n = N - 1$.

Les trois concepts de variété (0), (1), (2) sont équivalents, quitte à prendre N assez grand.

L'équivalence entre (1) et (2) à N fixé découle du théorème des fonctions implicites (théorème 8.4.4).

Pour déduire (0) de (2), on peut penser par exemple au cas du cercle S^1 mentionné ci-dessous, qui fournit les cartes. Plus précisément, pour tout $a \in M$, on fait en sorte par restriction dans (2) que $U_a \subset \mathbb{R}^{I_a}$ soit une boule ouverte, et on définit $f_a : O_a \cap M \to U_a$ comme étant la projection sur $\mathbb{R}^{I_a}$. C'est un homéomorphisme car $f_a^{-1} = (\mathrm{id}, g_a)$. De plus, pour tout $b \in M$ tel que $O_a \cap O_b \neq \emptyset$, le changement de carte $f_b \circ f_a^{-1}$ est $\mathcal{C}^k$ sur son ensemble de définition car f_b est une projection sur un autre sous-ensemble de coordonnées.

On dit que les sous-variétés sont des variétés abstraites plongées dans $\mathbb{R}^N$, car (1) et (2) impliquent (0).

La notion de fonction $\mathcal{C}^k$ et en particulier de difféomorphisme $\mathcal{C}^k$ entre deux variétés abstraites fait sens : si M_1 et M_2 vérifient (0), alors on dit qu'une fonction $F : M_1 \to M_2$ est $\mathcal{C}^k$ lorsque les fonctions $f_2 \circ F \circ f_1^{-1}$ sont $\mathcal{C}^k$ sur leur ensemble de définition pour tout choix de carte compatibles f_1 dans M_1 et f_2 dans M_2.

Une manière de montrer que (0) implique (2) consiste à établir que M est difféomorphe à une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ avec N assez grand au sens de (2). Cette notion de difféomorphisme fait sens d'après ce qui précède car (2) implique (0). Une idée naturelle est d'exploiter les cartes de M pour obtenir un graphe. De (0) on tire, pour tout $a \in M$, un homéomorphisme $f_a : O_a \subset M \to \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x\| < 1\}$ tel que $f_a(a) = 0$. Supposons pour simplifier que M est compacte. Il existe alors un entier m fini et $a_1, \dots, a_m \in M$ tels que $M = \cup_{k=1}^m U_k$ et $a_k \in U_k := f_{a_k}^{-1}(B(0, \frac{1}{2}))$. Soit

$$F = (F_k)_{1\leq k\leq m} : M \to \mathbb{R}^{(n+1)m} \text{ où } F_k(x) := \begin{cases} \big(\eta(\|f_{a_k}(x)\|) f_{a_k}(x), \theta(\|f_{a_k}(x)\|)\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} & \text{si } x \in O_{a_k} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

1. L'usage de la lettre M vient du fait qu'en anglais, *variété* se dit *manifold*, de l'allemand *Mannigfaltigkeit* utilisé par Bernhard Riemann. Mais le terme *varieties* est utilisé en anglais pour désigner les variétés algébriques : (2) avec f polynomiale.

avec $\eta, \theta \in \mathcal{C}^\infty_0([0,\infty),[0,1])$ définies par

— $\eta(t) = 1$ si $t \leq \frac{1}{2}$, η est strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, et $\eta(t) = 0$ si $t \geq \frac{3}{4}$.

— $\theta(t) = 1$ si $t \leq \frac{1}{4}$, θ est strictement décroissante sur $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, et $\theta(t) = 0$ si $t \geq \frac{3}{4}$.

Vérifions tout d'abord que F est une bijection de M sur son image $F(M)$. Soient donc $x, y \in M$.

— si $x, y \in U_k$ pour un certain k, alors $F_k(x) = F_k(y)$ implique $x = y$ car les premières n coordonnées de F_k sont égales à f_{a_k} sur U_k et cette application est injective.

— si $x \in U_k$ et $y \notin U_k$, alors $x \neq y$ et comme les secondes composantes de $F_k(x)$ sont $> \theta(\frac{1}{2})$ tandis que les premières composantes de $F_k(y)$ sont $\leq \theta(\frac{1}{2})$, on a $F_k(x) \neq F_k(y)$.

Vérifions à présent que $F(M)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{(n+1)m}$ au sens de (2). On a

$$\begin{aligned} F(U_1) &= F(M) \cap \{y \in \mathbb{R}^{(n+1)m} \,:\, y_{n+1} > \theta(\tfrac{1}{2})\} \\ &= F(M) \cap \{y \in \mathbb{R}^{(n+1)m} \,:\, y_1^2 + \cdots + y_n^2 < \tfrac{1}{4}, y_{n+1} > \theta(\tfrac{1}{2})\}. \end{aligned}$$

De plus, sur $F(U_k)$, toutes les autres coordonnées sont des fonctions $\mathcal{C}^k$ de $f_{a_{k'}}(x)$, $k' \neq k$, et donc des fonctions $\mathcal{C}^k$ de $f_{a_k}(x) = (y_1, \dots, y_n)$ puisque toutes les $f_{a_{k'}} \circ f_{a_k}^{-1}$ sont $\mathcal{C}^k$ et $y_{n+1} = \theta(\|f_{a_k}(x)\|)$ est une fonction $\mathcal{C}^k$ de $y_1^2 + \cdots + y_n^2 = \|f_{a_k}(x)\|^2$ sur $F(U_k)$. Il existe donc $g : B(0, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}^{(n+1)m-n}$ $\mathcal{C}^k$ telle que

$$\begin{aligned} F(U_k) &= F(M) \cap [B(0, \tfrac{1}{2}) \times ((\theta(\tfrac{1}{2}), +\infty) \times \mathbb{R}^{(n+1)m-n})] \\ &= \{(y_1, \dots, y_n, g(y_1, \dots, y_n)) \,:\, (y_1, \dots, y_n) \in B(0, \tfrac{1}{2})\}. \end{aligned}$$

En particulier $F(M)$ vérifie (2) avec $N = (n+1)m$, est compacte comme image du compact M par l'application continue F. Enfin les variétés abstraites M et $F(M)$ sont difféomorphes car $(y_1, \dots, y_n) = f_{a_k}(x)$ sur U_k donc il n'y a rien à démontrer si on considère la carte (U_k, f_{a_k}) de M et la carte $(F(U_k), \pi_{\mathbb{R}^n})$ sur $F(M)$.

Le théorème de plongement de Whitney[2], abordé dans le cours de géométrie différentielle, affirme que (0) implique (2) avec $N = 2n$. La preuve peut procéder par décrémentation de la dimension N jusqu'à $2n+1$, puis jusqu'à $2n$. Ce théorème est optimal en un certain sens car on peut montrer par exemple que l'espace projectif réel de dimension n ne peut pas être plongé dans $\mathbb{R}^{2n-1}$ lorsque n est une puissance de 2. On peut faire mieux que ce seuil universel dans certains cas, par exemple pour la sphère S^{n-1}, on peut prendre $N = n$.

Remarque A.0.2. Non équivalence dans les cadres plus rigides.

L'équivalence entre (0), (1), et (2), notamment avec (1), n'a plus lieu aussi facilement voire n'a plus lieu du tout dans des cadres plus rigides, par exemple lorsqu'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ (géométrie différentielle complexe) ou alors les fonctions lisses par des polynômes (géométrie algébrique). Dans le premier cas l'obstruction vient de la rigidité de l'holomorphie tandis que dans le second cas l'obstruction vient du fait que les solutions d'équations polynomiales ne sont pas polynomiales.

Espace tangent et fibré tangent

Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension n, et si f et g sont comme en (1) et (2) ci-dessus, alors il est naturel de définir l'espace tangent en $a \in M$ par le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$

$$T_a M = \ker((Df)(a)) = \{(u, (Dg)(a_I)u) \,:\, u \in \mathbb{R}^I\}.$$

Une idée à tester sans tarder sur S^{n-1} ! Cet objet dépend de M et de a mais pas du choix des fonctions f et g ni des coordonnées I, on dit qu'il est intrinsèque (versus extrinsèque). Démontrons la seconde égalité ci-dessus. Comme $f(x_I, g(x_I)) = 0$, la règle de la chaîne donne $(Df)(a)(u, (Dg)(a_I)u) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^I$, d'où $\ker((Df)(a)) \supset \{(u, (Dg)(a_I)u) \,:\, u \in \mathbb{R}^I\}$. Or la condition de non dégénérescence $\operatorname{rang}((Df)(a)) = N - n$ peut s'écrire $\dim \ker((Df)(a)) = n$, d'où l'égalité des deux espaces car $\dim\{(u, (Dg)(a_I)u) \,:\, u \in \mathbb{R}^I\} = \dim \mathbb{R}^I = n$.

2. Démontré vers 1936 par Hassler Whitney, possède des variantes et des raffinements. Ce théorème de Hassler Whitney a notamment inspiré Stephen Smale pour sa preuve de la conjecture de (Henri) Poincaré en dimension ≥ 5.

Définition A.0.3. Espace tangent à une variété abstraite.

Soit M une variété abstraite de dimension n et de classe $\mathcal{C}^k$, comme en (0), et $a \in M$.
Soit Γ_a l'ensemble des chemins $\gamma : [-1,1] \to M$ tels que $\gamma(0) = a$ et $(f_a \circ \gamma)'(0)$ existe pour toute carte f_a de M en a, muni de la relation d'équivalence

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \text{ssi} \quad (f_a \circ \gamma_1)'(0) = (f_a \circ \gamma_2)'(0) \quad \text{(même vecteur vitesse en } a\text{)}$$

pour une certaine (et donc toutes par la règle de la chaîne) carte $O_a \ni a$. L'espace tangent de M en a est $T_aM := \Gamma_a/\sim$ muni de la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ par l'identification $[\gamma] \leftrightarrow (f_a \circ \gamma)'(0)$, et cette structure ne dépend pas du choix de la carte grâce à la règle de la chaîne.

Soit $F : M \to N$ une fonction entre deux variétés de dimensions respectives m et n. Une manière simple de définir la dérivée $DF(a)$ pour $a \in M$ serait de considérer une carte (O_a, f_a) de M en a, une carte (U_b, g_b) de N en $b = F(a)$, et de dériver en a l'application $g_b \circ F \circ f_a^{-1} : f_a(O_a) \subset \mathbb{R}^m \to g_b(U_b) \subset \mathbb{R}^n$. Mais comme on peut vérifier, ceci donnerait une définition qui serait dépendante des cartes choisies.

Il s'avère qu'il est préférable de définir $(DF)(a)$ comme étant l'opérateur

$$\begin{aligned}(DF)(a) : T_aM &\to T_{F(a)}N \\ [\gamma \in \Gamma_a] &\mapsto [F \circ \gamma] \in \Gamma_{F(a)}.\end{aligned}$$

Vérifions que ceci fait bien sens : $\gamma \mapsto F \circ \gamma$ s'écrit en coordonnées locales

$$f_a \circ \gamma \mapsto (g_b \circ F \circ f_a^{-1}) \circ (f_a \circ \gamma) = g_b \circ F \circ \gamma,$$

et donc la dérivée $D(g_b \circ F \circ f_a^{-1})(f_a(a)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est l'opérateur linéaire

$$(f_a \circ \gamma)'(0) \mapsto (D(g_b \circ F \circ f_a^{-1})(f_a(a)))(f_a \circ \gamma)'(0) = (g_b \circ F \circ \gamma)'(0).$$

Comme T_aM et $T_{F(a)}N$ dépendent de a, il n'est pas évident de définir les dérivées de F d'ordre ≥ 2 sans introduire de structure supplémentaire. Identifier les T_a pour différentes valeurs de a en utilisant des cartes locales serait dépendant de ces cartes. On renvoie au cours de géométrie différentielle pour aller plus loin.

Plutôt que de tenter d'identifier les espaces tangents T_aM pour différentes valeurs de $a \in M$, on peut considérer leur union disjointe, appelée fibré tangent, qui a une structure de variété de dimension $2m$.

Définition A.0.4. Fibré tangent d'une variété abstraite.

Soit M une variété abstraite de dimension n et de classe $\mathcal{C}^k$ comme en (0).
Le fibré tangent TM de M est une variété abstraite de dimension $2n$ et de classe $\mathcal{C}^{k-1}$:

- en tant qu'ensemble $TM := \bigsqcup_{a \in M} T_aM := \{(a,u) : a \in M, u \in T_aM\}$.
- chaque carte (O_i, f_i) de M définit une carte $(\widetilde{O}_i, \widetilde{f}_i)$ de TM, avec $\widetilde{O}_i := \bigsqcup_{a \in O_i} T_aM$ et $\widetilde{f}_i : \widetilde{O}_i \to B^n \times \mathbb{R}^n$ défini par

$$\widetilde{f}_i : (a, [\gamma_a]) \mapsto \big(f_i(a), (f_i \circ \gamma)'(0)\big), \quad \gamma_a \in \Gamma_a.$$

- la topologie sur TM est induite par les application $\widetilde{f}_i$, $i \in I$.

On vérifie que ceci définit bien un espace topologique séparé, qui n'est jamais compact même si M est compact, en raison de la nature vectorielle de la seconde composante. La régularité $\mathcal{C}^{k-1}$ de TM vient de

$$\widetilde{f}_j \circ \widetilde{f}_i^{-1} : (x,u) \mapsto ((f_j \circ f_i^{-1})(x), D(f_j \circ f_i^{-1})(x)u).$$

Il découle de cette définition que si $F : O \subset M \to MN$ est $\mathcal{C}^k$ alors $DF : TO \subset TM \to TN$ définie par $(DF)(a,u) := (F(a), (DF)(a)u)$ est $\mathcal{C}^{k-1}$. Mais les choses sont plus compliquées pour la dérivée seconde.

Un point de vue hérité de Bernhard Riemann : l'appréhension quantitative du monde physique est faite de variables et de relations entre variables, et les relations entre variables forment des variétés : de la géométrie, pas forcément euclidienne. En définissant un produit scalaire sur chaque espace tangent et en les connectant, on obtient une notion de longueur de chemin tracé sur une variété, une structure d'espace métrique, tandis que la notion de surface de triangle conduit à la notion de courbure, on parle de variétés et géométrie riemanniennes (version complexe : variétés et géométrie kählériennes). Cela permet également de définir une mesure de volume,

qui joue le rôle de la mesure de Lebesgue, et qui permet de définir des mesures de Boltzmann–Gibbs, et il y a également une notion de Laplacien, d'où des liens multiples avec l'équation de la chaleur.

En concevant l'espace tangent comme les vecteurs vitesses des courbes paramétrées sur la variété, une contrainte d'appartenance à un cône dans l'espace tangent conduit à la géométrie sous-riemannienne.

Un point de vue complémentaire et algébrisant hérité du programme d'Erlangen de Felix Klein, et de son alter ego Sophus Lie : toute géométrie revient à l'étude de transformations d'un espace, qui peuvent s'inverser et se composer, et qui constituent donc un groupe qui incorpore les symétries de la géométrie (comme pour les groupes de symétries des équations, de Galois). Étudier l'algèbre de ce groupe en dit long sur la géométrie.

Annexe B

Autour de l'équation de la chaleur

Quelques mots autour de l'équation de la chaleur, avec des liens avec des médaillés Fields du XXI^{e} siècle.

Pour aller plus loin : cours du DMA d'analyse fonctionnelle, d'analyse des EDP, et de processus stochastiques.

L'équation de la chaleur[1] [2] est une célèbre équation aux dérivées partielles qui s'écrit

$$\partial_t u(t,x) = \Delta_x u(t,x), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad \text{de condition initiale } u(0,x)=f(x),$$

où $\Delta_x := \partial_1^2+\cdots+\partial_n^2$ et le laplacien. En concevant Δ comme une application linéaire de dimension infinie, agissant sur les fonctions, c'est-à-dire un opérateur, on peut concevoir l'équation de la chaleur comme une (EDOL) $u'=\Delta u$ de dimension infinie, de sorte que formellement

$$u(t,x) = (\mathrm{e}^{t\Delta} f)(x).$$

Il est possible de donner un sens rigoureux à cette formule grâce à la théorie des opérateurs non bornés abordable dans les cours d'analyse fonctionnelle et d'équations aux dérivées partielles.

C'est un flot de gradient car par intégration par parties

$$\partial_t u = -\nabla\mathcal{E}(u) \quad \text{où} \quad \mathcal{E}(u) := \frac{1}{2}\int |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int u(x)\Delta u(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\langle u, \Delta u\rangle, \quad \text{au sens où } \nabla\mathcal{E}(u)=\Delta u.$$

La justification rigoureuse nécessite de préciser la nature de u, son comportement au bord pour l'intégration par parties, et les espaces fonctionnels (dimension infinie) utilisés pour le gradient.

Il se trouve que la solution de l'équation de la chaleur est explicite, donnée par le noyau de la chaleur :

$$u(t,x) = (f * p_t)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)p_t(x-y)\mathrm{d}y = \mathbb{E}(f(x+\sqrt{2t}Z)), \quad p_t(x,y) := \frac{\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4t\pi)^{\frac{n}{2}}}, \qquad Z\sim\mathcal{N}(0,I_n).$$

On voit émerger ici les probabilités à partir du noyau de la chaleur p_t via les lois gaussiennes. On peut concevoir $p_t(x)$ comme la solution avec donnée initiale distributionnelle : $f=\delta_x$. La théorie des distributions a été développée par Laurent Schwartz. L'analyse harmonique, développée à l'origine par Fourier pour résoudre l'équation de la chaleur, est présente dans la formule ci-dessus via le noyau gaussien, vecteur propre de la transformée de Fourier. Ici la régularité de la solution est $\mathcal{C}^\infty$ en x dès que $t>0$, grâce à la convolution. L'étude de la régularité des solutions des EDP est un sujet de prédilection d'Alessio Figalli.

L'entropie est une fonction de Lyapunov (théorème H à la Boltzmann) car (identité de de Bruijn)

$$\partial_t \int u(t,x)\log(u(t,x))\mathrm{d}x = -\int \frac{|\nabla u(t,x)|^2}{u(t,x)}\mathrm{d}x = -4\mathcal{E}(\sqrt{u(t,x)}) \le 0.$$

L'entropie le long de l'équation de Boltzmann (EDP non linéaire) est au coeur du travail de Cédric Villani sur la conjecture de Cercignani. L'étude de l'entropie le long du flot d'une équation de la chaleur sur la courbure de Ricci est un ingrédient important de la preuve de la conjecture de Poincaré par Grigori Perelman.

Tout ceci se généralise notamment et par exemple à l'opérateur de diffusion

$$A = \Delta - \nabla V\cdot\nabla,$$

1. Cette équation peut être résolue avec l'analyse harmonique de Fourier, développée par Joseph Fourier pour cela !

2. Au-delà de $\mathbb{R}^n$, on peut définir un laplacien sur une variété riemannienne, appelé opérateur de Laplace–Beltrami. Ces laplaciens continus peuvent être conçus comme limite d'échelle de laplaciens discrets, qui reviennent à une moyennisation sur les voisins, le passage à la limite s'opérant via une fonction test par une formule de Taylor à l'ordre deux, la symétrie des voisins tuant la première dérivée. Dans le contexte des formes modulaires, on parle d'opérateur de Hecke.

avec $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\nabla^2(V) \geq c > 0$, à condition de remplacer $\mathrm{d}x$ par la loi de Boltzmann–Gibbs

$$\mathrm{d}\mu(x) = \frac{\mathrm{e}^{-V(x)}}{Z}\mathrm{d}x, \quad Z := \int \mathrm{e}^{-V}\mathrm{d}x.$$

Le noyau de la chaleur n'est alors plus forcément explicite ni gaussien en général [3] :

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)p_t(x,y)\mathrm{d}y = \mathbb{E}(f(X_t^x)) = \mathrm{e}^{tA}f(x).$$

où $(X_t^x)_{t\geq 0}$ est le processus de Markov sur $\mathbb{R}^n$ solution de l'équation différentielle stochastique

$$X_t^x = x - \int_0^t \nabla V(X_s)\mathrm{d}s + \sqrt{2}B_t \quad \text{(EDO avec bruit !)}$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard de $\mathbb{R}^n$. Pour $V \equiv 0$, on retrouve l'équation de la chaleur du cas précédent. Le semigroupe $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ conserve la positivité et les constantes, c'est un semigroupe de Markov. Il s'agit là de notions avancées de processus stochastiques, de niveau M1-M2. On peut noter ici le lien entre une EDO non linéaire avec bruit sur $\mathbb{R}^n$ et une EDOL en dimension infinie.

Il est aussi possible d'étudier des EDP linéaires ou non, avec bruit, par exemple additif, on parle d'EDP stochastiques (EDPS), comme par exemple l'équation de la chaleur stochastique

$$\partial_t u(t,x) = \Delta_x u(t,x) + \xi(t,x)$$

où $\xi(t,x)$ est un bruit gaussien en temps et en espace totalement décorrélé (bruit blanc). Les EDS et les EDPS sont le sujet de prédilection de Martin Hairer.

3. Cependant dans le cas $V = \frac{\rho}{2}\|\cdot\|^2$, alors $\mu = \mathcal{N}(0, \frac{1}{\rho}I_n)$, et $p_t(x,\cdot)$ est la densité de $\mathrm{e}^{-\rho t}x + \sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{-2\rho t}}{\rho}}Z, Z \sim \mathcal{N}(0, I_n)$.

Annexe C

Autour de l'équation des ondes non-linéaire

Quelques propriétés d'une équation des ondes non-linéaire en lien avec la recherche actuelle.

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assez régulière, considérons les solutions $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation des ondes non-linéaire

$$-\partial_{tt}u + \partial_{xx}u = f'(u), \qquad u(0,\cdot) = u_0, \qquad \partial_t u(0,\cdot) = v_0, \tag{C.1}$$

avec $u_0, v_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la donnée initiale. L'équation des ondes défocalisante[1] est le cas particulier où $f(u) = \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}$:

$$-\partial_{tt}u + \partial_{xx}u = u|u|^{p-1}, \qquad u(0,\cdot) = u_0, \qquad \partial_t u(0,\cdot) = v_0. \tag{C.2}$$

Pour simplifier, on ne s'intéressera pas vraiment à la régularité ni à la décroissance en espace, donc on supposera que u_0 et v_0 sont assez réguliers et décroissants quand $x \to \pm\infty$.

Pour $f = 0$, il s'agit de l'équation des ondes linéaire, dont la solution est explicite :

Théorème C.0.1. Propriétés de l'équation des ondes linéaire.

La solution de l'équation (C.1) pour $f = 0$ est :

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+t) + u_0(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(s)\mathrm{d}s.$$

En particulier :

1. si $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $v_0 \in L^1(\mathbb{R})$, alors[a] la norme $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ est bornée supérieurement : $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R})}$;
2. si $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ est non-triviale avec $\lim_{x\to\pm\infty} u_0 = 0$[b] et $v_0 = 0$[c] alors la norme $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ est bornée inférieurement pour t assez grand : il existe $T > 0$ et $c > 0$ tel que $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq c$ pour $t \geq T$.

a. Si v_0 est seulement bornée mais pas intégrable, cela n'est pas vrai : prendre par exemple $u_0(x) = 0$ et $v_0(x) = (1+|x|)^{-1}$ qui donne $u(t,0) = \log(1+t)$.

b. Cette hypothèse de limite à l'infini est nécessaire : prendre par exemple $u_0(s) = \sin(x)$.

c. L'hypothèse $v_0 = 0$ peut être relaxée en demandant de l'intégrabilité sur v_0.

Preuve. Il est possible de vérifier explicitement que l'expression résout bien l'équation et la donnée initiale. Mais pour trouver la solution explicitement, effectuons le changement de variable $(t,x) \mapsto (x_1,x_2) := (x+t, x-t)$. En posant $\bar{u}(x_1,x_2) = u(t,x)$, alors $\partial_{tt}u = \partial_{11}\bar{u} - \partial_{12}\bar{u} - \partial_{21}\bar{u} + \partial_{22}\bar{u}$ et $\partial_{xx}u = \partial_{11}\bar{u} + \partial_{12}\bar{u} + \partial_{21}\bar{u} + \partial_{22}\bar{u}$ donc $\bar{u}$ résout l'équation $\partial_{12}\bar{u} = 0$ et ainsi $\bar{u}$ et u sont de la forme :

$$\bar{u}(x_1,x_2) = a(x_1) + b(x_2), \qquad u(t,x) = a(x+t) + b(x-t),$$

avec $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions à déterminer. En notant V_0 la primitive de v_0 s'annulant en zéro :

$$V_0(x) = \int_0^x v_0(s)\mathrm{d}s,$$

et utilisant la condition initiale, les fonctions a et b doivent vérifier

$$a + b = u_0, \qquad a - b = V_0,$$

1. La version focalisante est lorsque f à le signe négatif.

ce qui donne

$$a = \frac{u_0 + V_0}{2}, \qquad b = \frac{u_0 - V_0}{2}.$$

Ainsi la solution générale de l'équation des ondes linéaire est :

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+t) + u_0(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[V_0(x+t) - V_0(x-t)\right],$$

ce qui donne l'expression annoncée. Enfin pour les propriétés :

1. En particulier, la norme L^∞ en espace est borné supérieurement

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|V_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

   car

$$\|V_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_0^x v_0(s)\mathrm{d}s \right| \leq \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

2. Puisque u_0 n'est pas identiquement nul, soit $\varepsilon = \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} > 0$. Par hypothèse de limite nulle à l'infini, il existe $M > 0$ tel que $|u_0(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $|x| > M$. Ainsi pour $t > M$,

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_0(x+t) + u_0(x-t)| &\geq \sup_{x>t-M} |u_0(x+t) + u_0(x-t)| \\
&\geq \sup_{x>t-M} |u_0(x-t)| - \sup_{x>t-M} |u_0(x+t)| \\
&\geq \sup_{x>-M} |u_0(x)| - \sup_{x>M} |u_0(x)| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

□

L'équation des ondes non-linéaire à une structure hamiltonienne :

Théorème C.0.2. Structure hamiltonienne de l'équation des ondes.

L'équation des ondes non-linéaire (C.1) se réécrit comme un système du premier ordre :

$$\partial_t u = v, \qquad \partial_t v = \partial_{xx} u - f'(u), \qquad u(0,\cdot) = u_0, \qquad v(0,\cdot) = v_0, \tag{C.3}$$

et il s'agit d'un système hamiltonien avec $H : H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ défini par[a]

$$H(u,v) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 + f(u) \right) \mathrm{d}x. \tag{C.4}$$

En particulier l'hamiltonien est conservé le long des trajectoires : $H(u(t), v(t)) = H(u_0, v_0)$.

a. Pour montrer que l'hamiltonien est bien définit sur $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, il faut supposer par exemple que $|f(z)| \leq |z|^{p+1}$ pour $p \geq 1$ et utiliser l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$.

Preuve. Premièrement, en posant $v = \partial_t u$, l'équation (C.1) est équivalente à (C.3). Explicitement

$$\begin{aligned}
H(u+h,v) - H(u,v) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\partial_x u \partial_x h + f'(u) h \right) \mathrm{d}x + o(h) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(-\partial_{xx} u + f'(u) \right) h \mathrm{d}x + o(h), \\
H(u,v+h) - H(u,v) &= \int_{\mathbb{R}} v h \mathrm{d}x + o(h),
\end{aligned}$$

et en identifiant les dérivées avec le théorème 7.2.1 de représentation de Riesz[2],

$$\begin{aligned}
(D_u H)(u,v) &= -\partial_{xx} u + f'(u), \\
(D_v H)(u,v) &= v.
\end{aligned}$$

2. Pour être précis, il faut supposer $u \in H^2(\mathbb{R})$ ou considérer des dérivées au sens faibles.

Ainsi système du premier ordre (C.3) est bien un système hamiltonien

$$\partial_t u = (D_v H)(u,v), \qquad \partial_t v = -(D_u H)(u,v).$$

□

La conservation de l'énergie permet d'obtenir une solution globale bornée :

Théorème C.0.3. Globalité des solutions.

Pour $p > 1$, si $H(u_0, v_0)$ est fini, alors la solution de l'équation des ondes défocalisante (C.2) reste bornée dans $L^\infty(\mathbb{R})$: il existe $K > 0$ dépendant uniquement de p et $H(u_0, v_0)$ tel que $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K$.

Preuve. Par le résultat précédent, l'énergie est conservée, ce qui implique que la solution u reste bornée dans $\dot{H}^1(\mathbb{R}) \cap L^{p+1}(\mathbb{R})$: il existe $L > 0$ tel que

$$\|\partial_x u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u(t,\cdot)\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} \leq L,$$

et v dans $L^2(\mathbb{R})$. En utilisant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg en une dimension

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\|u\|^{\theta}_{L^{p+1}(\mathbb{R})}\|\partial_x u\|^{1-\theta}_{L^2(\mathbb{R})}, \qquad \text{où} \qquad \theta = \frac{p+1}{p+3},$$

la solution reste bornée. Il reste à démontrer l'existence localement en temps et d'invoquer un argument de continuation la solution ne pouvant pas explosée car bornée dans l'espace d'énergie. □

A remarquer que pour $u_0 = 0$ et $v_0 \in L^2(\mathbb{R})$, l'énergie est finie donc la solution de l'équation non-linéaire restée bornée, mais la solution de l'équation linéaire peut croître lorsque $v_0 \notin L^1(\mathbb{R})$. Ceci est dû au terme non-linéaire qui permet le contrôle de la norme $L^{p+1}(\mathbb{R})$ de u [3].

Vu cela, une question naturelle est : quel est le comportement de $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ en temps long dans les cas non-linéaire ? Il se pourrait que l'énergie se concentre sur des courbes, mais H. Lindblad et T. Tao ont démontré que ce n'est pas le cas :

Théorème C.0.4. Comportement en temps long par Lindblad–Tao [32].

Pour $p > 1$, si $H(u_0, v_0)$ est fini, alors la solution de l'équation des ondes défocalisante (C.2) satisfait :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\mathrm{d}t = 0.$$

Donc l'équation non-linéaire ne se comporte pas comme l'équation linéaire en temps grand ! Intuitivement, la raison est que la partie linéaire force les ondes à ce propager à vitesse un, mais la nature défocalisante de la non-linéarité diffusera toute onde qui se propage le long d'une trajectoire à vitesse constante. A priori, il serait possible que l'équation non-linéaire propage selon des trajectoires plus compliquées $t \mapsto x(t)$. Le résultat précédent prouve que ce n'est pas le cas, mais est très faible dans le sens où il n'indique aucun taux de décroissance.

Pour la suite, l'idée est de résoudre numériquement l'équation pour essayer d'obtenir une intuition sur le comportement en temps long.

Discrétisation spatiale La première étape est de se ramener à un système hamiltonien en dimension finie, donc d'approximer les fonctions $u(t,\cdot)$ et $v(t,\cdot)$ en espace à un temps t fixe. On le fait par différence finies en utilisant le résultat suivant :

Lemme C.0.5.

Pour $L > 0$ et n un entier, soit la grille de discrétisation uniforme de $[-L, L]$: $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ où $x_i = hi - L$ où $h = \frac{2L}{n+1}$. Si $\varphi \in \mathcal{C}^2([-L,L],\mathbb{R})$, alors

$$\sup_{0\leq i\leq n}\left|\varphi'(x_i) - \frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)}{h}\right| \leq \frac{h}{2}\|\varphi''\|_{L^\infty([-L,L])}.$$

3. Le contrôle uniforme en temps de u dans $\dot{H}^1(\mathbb{R})$, n'est pas suffisant pour avoir u bornée dans $L^\infty(\mathbb{R})$, et cela malgré l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$!

Preuve. Il s'agit d'utiliser le théorème 8.3.16 pour effectuer un développement de Taylor en x_i :

$$\varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i) + h\varphi'(x_i) + r_1^{\varphi,x_i}(x_{i+1}),$$

où

$$|r_1^{\varphi,x_i}(x_{i+1})| \leq \frac{h^2}{2}\|\varphi''\|_{L^\infty([-L,L])}.$$

□

Avec ce résultat, les fonctions $u(t,\cdot)$ et $v(t,\cdot)$ seront approximées respectivement par les vecteurs $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t) \in \mathbb{R}^n$ où $u_i(t) = u(t,x_i)$ et $v_i(t) = v(t,x_i)$ et par conséquent l'hamiltonien (C.4) sera approximé par[4]

$$\tilde{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} v_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} f(u_i), \tag{C.5}$$

où on choisit comme condition au bord artificielle $u_0 = u_{n+1} = 0$. Ainsi le système hamiltonien discrétisé en espace est :

$$\partial_t \boldsymbol{u} = (\nabla_v \tilde{H})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}, \qquad \partial_t \boldsymbol{v} = -(\nabla_u \tilde{H})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = T_n\boldsymbol{u} - f'(\boldsymbol{u}), \tag{C.6}$$

où du coup $T_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice d'approximation de la dérivée seconde

$$(T_n\boldsymbol{u})_i = \frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2} \qquad \text{ou} \qquad T_n = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{C.7}$$

Nous avons ainsi approximé le système hamiltonien de dimension infinie (C.3) par une équation différentielle ordinaire (C.6)) sur $\mathbb{R}^{2n}$ avec une structure hamiltonienne.

Discrétisation temporelle Pour intégrer numériquement en temps un système hamiltonien $x'(t) = \Omega\nabla_x H(x(t))$ sur $\mathbb{R}^{2n}$, de multiples méthodes sont possibles, par exemple la formule d'Euler :

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t\Omega\nabla_x H(x_k),$$

qui donne une approximation x_k de $x(t_k)$ au temps $t_k = k\Delta t$. Mais une telle approximation n'utilise pas du tout le caractère hamiltonien du système, et en particulier l'hamiltonien n'est pas conservé. L'idée est de trouver une approximation numérique conservant la structure hamiltonienne. Avant de faire cela, nous avons besoin d'un peu plus de structure hamiltonienne.

Définition C.0.6. Application symplectique.

Pour un système hamiltonien $x'(t) = \Omega\nabla_x H(x(t))$ sur $\mathbb{R}^{2n}$, introduisons la forme $\omega(x,y) = \langle x, \Omega y\rangle$. Une application $g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ est dite symplectique, lorsque en tout point $x_0 \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\mathrm{Jac}(g)(x_0)^T\Omega\mathrm{Jac}(g)(x_0) = \Omega \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega(\mathrm{Jac}(g)(x_0)x, \mathrm{Jac}(g)(x_0)y) = \omega(x,y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Lemme C.0.7. Flot hamiltonien.

Le flot φ_t d'un système hamiltonien $x'(t) = \Omega\nabla H(x(t))$ est symplectique.

Preuve. Par le théorème 9.4.5, $\mathrm{Jac}(\varphi_t)(x_0)$ est la résolvante de $A(t;x_0) := \Omega\mathrm{Hess}(H)(\varphi_t(x_0))$, donc $\partial_t\mathrm{Jac}(\varphi_t) = \Omega(\mathrm{Hess}(H)\circ\varphi_t)\mathrm{Jac}(\varphi_t)$. Par conséquent

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{Jac}(\varphi_t)^T\Omega\mathrm{Jac}(\varphi_t)\right) = \mathrm{Jac}(\varphi_t)^T(\mathrm{Hess}(H)\circ\varphi_t)\Omega^T\Omega\mathrm{Jac}(\varphi_t) + \mathrm{Jac}(\varphi_t)^T\Omega\Omega(\mathrm{Hess}(H)\circ\varphi_t)\mathrm{Jac}(\varphi_t) = 0,$$

car $\Omega^T\Omega = \mathrm{id}$ et $\Omega^2 = -\mathrm{id}$. Cela montre bien que $\mathrm{Jac}(\varphi_t)^T\Omega\mathrm{Jac}(\varphi_t) = \Omega$ vu que c'est vrai à $t = 0$. □

L'idée est de construire une approximation numérique en temps respectant la structure symplectique, cela se fait avec des schémas symplectiques. Pour aller plus loin on pourra consulter [21].

4. Pour qu'il s'agisse d'une vraie approximation il faudrait multiplier $\tilde{H}$ par le pas h, mais cela revient juste à redéfinir le temps en changeant son unité.

Définition C.0.8. Schéma symplectique.

Un schéma numérique en temps $x_{k+1} = \Phi_{\Delta t}(x_k)$ donnant une approximation x_k de $x(t_k)$ au temps $t_k = k\Delta t$ est dit symplectique lorsque $\Phi_{\Delta t} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ est symplectique.

Lemme C.0.9. Méthodes d'Euler symplectiques.

Pour un système hamiltonien séparé

$$H(u, v) = T(v) + V(u),$$

la méthode d'Euler symplectique

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= v_k - \Delta t \nabla_u V(u_k), \\ u_{k+1} &= u_k + \Delta t \nabla_v T(v_{k+1}), \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + \Delta t \nabla_v T(v_k), \\ v_{k+1} &= v_k - \Delta t \nabla_u V(u_{k+1}), \end{aligned}$$

est symplectique d'ordre un.

Preuve. On traite uniquement le premier cas, le second étant identique par symétrie. Explicitement,

$$\Phi_{\Delta t}(u, v) = (u + \Delta t \nabla_v T(v - \Delta t \nabla_u V(u)), v - \Delta t \nabla_u V(u)),$$

et

$$\mathrm{Jac}(\Phi_{\Delta t}) = \begin{pmatrix} \mathrm{id} + AB & A \\ B & \mathrm{id} \end{pmatrix},$$

où A et B sont les matrices symétriques

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \Delta t \nabla_v^2 T(v - \Delta t \nabla_u V(u)), \\ B(u, v) &= -\Delta t \nabla_u^2 V(u). \end{aligned}$$

On vérifie explicitement que $\mathrm{Jac}(\Phi_{\Delta t})^T \Omega \mathrm{Jac}(\Phi_{\Delta t}) = \Omega$.

Finalement, le schéma est d'ordre un :

$$\begin{aligned} v(t_{k+1}) - v(t_k) &= \Delta t \partial_t v(t_k) + O(\Delta t^2) = -\Delta t \nabla_u V(u(t_k)) + O(\Delta t^2), \\ u(t_{k+1}) - u(t_k) &= \Delta t \partial_t u(t_{k+1}) + O(\Delta t^2) = \Delta t \nabla_v T(v(t_{k+1})) + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

□

Lemme C.0.10. Méthode de Störmer-Verlet.

Pour un système hamiltonien séparé, la méthode de Störmer-Verlet :

$$\begin{aligned} v_{k+1/2} &= v_k - \frac{\Delta t}{2} \nabla_u V(u_k), \\ u_{k+1} &= u_k + \Delta t \nabla_v T(v_{k+1/2}), \\ v_{k+1} &= v_{k+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \nabla_u V(u_{k+1}). \end{aligned}$$

est symplectique d'ordre deux.

Preuve. Le caractère symplectique provient du fait qu'il s'agit de la composition de deux applications d'Euler symplectiques :

$$\begin{aligned} v_{k+1/2} &= v_k - \frac{\Delta t}{2} \nabla_u V(u_k), \\ u_{k+1/2} &= u_k + \frac{\Delta t}{2} \nabla_v T(v_{k+1/2}), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_{k+1} &= u_{k+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \nabla_v T(v_{k+1/2}), \\ v_{k+1} &= v_{k+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \nabla_u V(u_{k+1}). \end{aligned}$$

Le schéma est d'ordre deux par symétrie, mais on peut le montrer explicitement. □

Implémentation numérique On considère l'équation des ondes cubique : $p = 3$ et $f(u) = \frac{1}{4}|u|^4$ si bien que le système hamiltonien (C.6) découlant de la discrétisation spatiale de l'hamiltonien (C.5) est :

$$\partial_t \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} =: f_u(v), \qquad \partial_t \boldsymbol{v} = T_n \boldsymbol{u} - u^3 =: f_v(u),$$

où T_N est définit par (C.7). Ensuite il s'agit ensuite d'intégrer en temps ce système hamiltonien avec la méthode symplectique de Störmer-Verlet. Ici on choisit une donnée initiale bien localisée :

$$u_0(x) = \sin(x)\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad v_0(x) = 0.$$

Sur l'intervalle $[-L, L]$ avec $L = 10^3$ et $n = 10^4$, la décroissance de $\|u(t)\|_{L^\infty}$ jusqu'à $t = L$ (ensuite la solution sort de l'intervalle) à l'air d'être en $(1+t)^{-1/4}$ mais pas strictement monotone, voir figure C.1. Comme attendu l'énergie est très bien conservée du à l'utilisation d'un schéma symplectique.

A noter que récemment une décroissance explicite a été obtenue sous hypothèse de décroissance des données initiales :

Théorème C.0.11. Décroissance explicite en temps long par Wei–Yang [50].

Pour $p > 1$, si

$$\int (1+|x|)\big(|u_0'|^2 + |v_0|^2 + \frac{2}{p+1}|u_0|^{p+1} < \infty,$$

alors la solution de l'équation des ondes défocalisante (C.2) satisfait :

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(1+t)^{-\frac{p-1}{(p+1)^2+4}}.$$

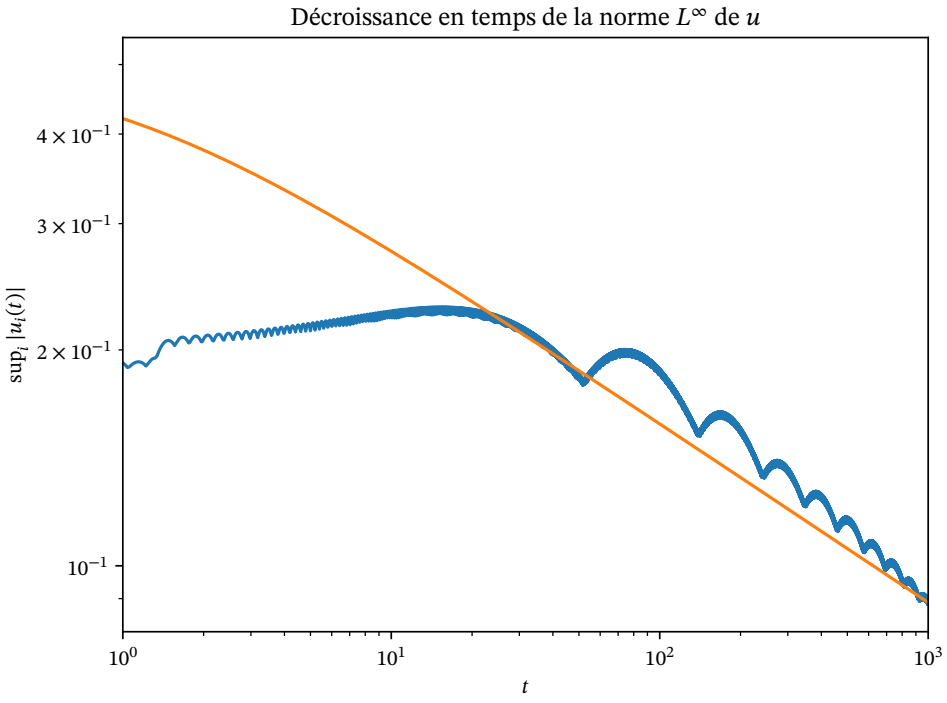


FIGURE C.1 – Décroissance de la norme L^∞ de la solution numérique u et comparaison avec la fonction $(1+t)^{-1/4}$. La borne théorique de Wei–Yang en $(1+t)^{-1/10}$ est donc probablement pas optimale.

Annexe D

Rétrospective des principaux concepts et résultats abordés en cours

Voici une liste parfois redondante des principaux concepts et résultats abordés dans le cours, présentés d'une manière conceptuelle et pratique, ce qui la rend différente de la table des matières du cours.

- Garanti dans les espaces métriques mais pas dans les espaces topologiques généraux
  - Séparation (axiome T_2 de Hausdorff)
  - Base dénombrable de voisinages (boules)
  - Caractérisation de la convergence par la distance
  - Caractérisation séquentielle des fermés
  - Caractérisation séquentielle de la continuité
  - Caractérisation séquentielle de la compacité (Bolzano–Weierstrass)
  - Caractérisation de la compacité par complétude et pré-compacité
  - Caractérisation de la convergence sans explicitation de la limite (critère de Cauchy si complet)
- Utilité de la compacité (notion topologique générale)
  - Existence de valeur d'adhérence par extraction de sous-suite (espaces métrisables)
  - Existence d'extremum de fonction continue
  - Existence via théorème de Baire
- Comment établir la compacité
  - Caractérisation séquentielle de Bolzano–Weierstrass (espaces métrisables)
  - Propriété de Borel–Lebesgue
  - Image continue d'un compact (en particulier si homéomorphe à un compact)
  - Fermé dans un compact
  - Produit de compacts (théorème de Tikhonov)
  - Complet et pré-compact (espaces métriques)
  - Compacité ponctuelle et équicontinuité uniforme (théorème d'Arzelà–Ascoli pour $\mathcal{C}(K, Y)$)
  - En compactifiant ! (Alexandrov, Stone–Čech)
- Utilité de la complétude (notion purement métrique)
  - Existence de limite par critère de Cauchy
  - Convergence absolue ou normale des séries (espaces de Banach)
  - Existence et unicité de projeté orthogonal (espaces de Hilbert)
  - Théorème de représentation de Riesz et identification avec dual topologique (espaces de Hilbert)
  - Prolongement automatique de fonction uniformément continue à l'adhérence
  - Existence via théorème de Baire
  - Continuité automatique linéaire (théorèmes de Banach–Steinhaus et de Banach–Schauder)
  - Existence et unicité de point fixe d'application contractante (théorème de Picard–Banach)
  - Existence d'inverse (théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites)
- Comment établir la complétude
  - Fermé dans un complet
  - Compact
  - Critère de Cauchy
  - Toute série absolument convergente est convergente
  - Isométrie avec un espace complet
- Comment approcher une fonction avec un polynôme
  - Uniformément par le théorème de Stone–Weierstrass $\mathcal{C}(K, \mathbb{K})$
  - Ponctuellement en linéarisant (dérivée directionnelle ou au sens de Fréchet)
  - Ponctuellement par série de Taylor (dérivée directionnelle ou au sens de Fréchet)
- Comment prolonger
  - À l'adhérence si uniformément continue et espace métrique complet
  - À tout l'espace si linéaire continue à valeurs dans $\mathbb{K}$ (théorème de Hahn–Banach)

— Comment établir une continuité uniforme
  — Application linéaire continue
  — Théorèmes de Heine et de Dini pour $\mathcal{C}(K,Y)$
  — Théorème d'Arzelà–Ascoli pour $\mathcal{C}(K,Y)$
— Comment résoudre une EDO
  — Résolvante voire exponentielle si EDOL
  — Intégration directe ou après changement de variable ou variation de la constante
  — Réduction au cas linéaire du premier ordre en augmentant la dimension
  — Réduction au cas autonome en incorporant le temps à l'espace
  — Existence et unicité locale (théorème de Cauchy–Lipschitz, théorème de Cauchy–Peano)
  — Caractère borné de la solution ou globalement Lipschitz de f pour maximalité et globalité
— Espaces et constructions de base
  — topologie trace, produit, quotient, initiale, finale
  — $\mathcal{C}(K,Y)$, $\mathcal{C}^k(X,Y)$, $\mathcal{C}^\infty(X,Y)$
  — $\ell^p(I,\mathbb{K})$
  — $\mathbb{K}^n \equiv \mathcal{C}(\{1,\dots,n\},\mathbb{K}) \equiv \ell^2(\{1,\dots,n\},\mathbb{K})$
  — $L(X,Y)$, $L_n(X,Y)$, $L_n^{\mathrm{sym}}(X,Y)$
  — dual topologique $X' = L(X,\mathbb{K})$
— Optimisation
  — Compacité pour extrema
  — Point critiques, signature de la dérivée seconde
  — Vecteur gradient, matrice jacobienne, matrice hessienne
  — Descente de gradient, fonction de Lyapounov
— Variétés
  — Abstraite (atlas, cartes)
  — Localement une équation
  — Localement un graphe
— Arguments, procédés, méthodes
  — Recherche d'invariants par transformation
  — Recherche de transformations laissant invariantes des propriétés
  — Discrétisation par séparabilité
  — Finitisation par compacité
  — Séquentialisation par métrisabilité
  — Réduction au compact par approximation (troncature)
  — Argument diagonal
  — Raisonnement par connexité
  — Argument de point fixe
  — Méthode bootstrap
  — Linéarisation ou approximation par un polynôme
  — Compactification d'un espace topologique
  — Complétion d'un espace métrique
  — Introduction d'une topologie, d'une norme, d'un produit scalaire
  — Interpolation avec une famille paramétrée
  — Comparaison (lemme de Grönwall = comparaison à EDOL donc à exponentielle)
  — Recherche d'une fonction de Lyapounov d'un champ de vecteur (EDO autonome du premier ordre)
— Usage de l'axiome du choix faible ou via lemme de Zorn
  — Théorème de Tikhonov (produit infini non dénombrable, cas non métrique)
  — Théorème de Baire métrique (l'axiome du choix dépendant suffit, pas besoin du lemme de Zorn)
  — Théorème de Hahn–Banach (cas non séparable non Hilbert)
  — Existence de base algébrique d'un espace vectoriel normé et de base hilbertienne d'un Hilbert
  — Construction d'une solution maximale d'une EDO.

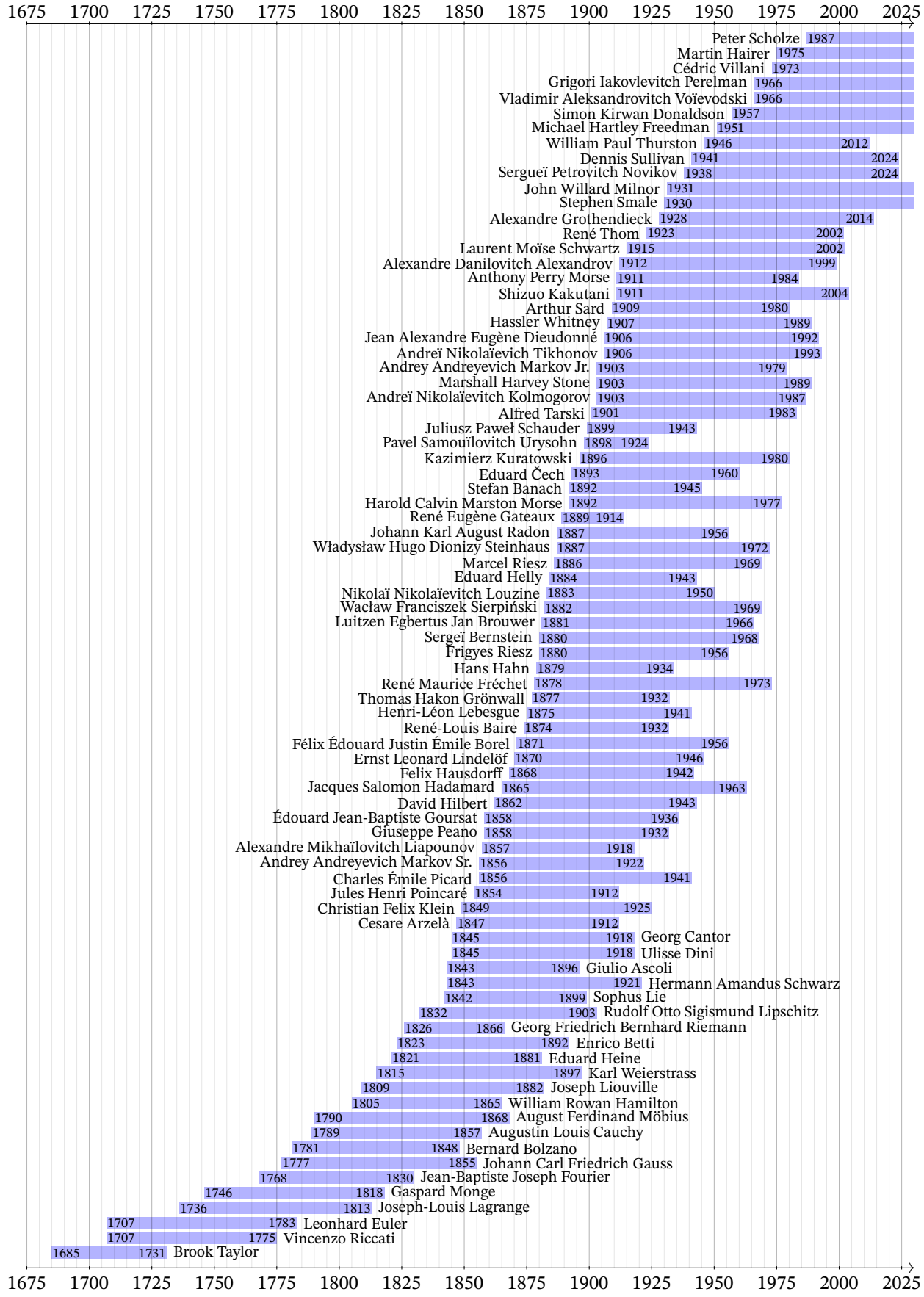
Annexe E

Lexique bilingue

Français	Anglais
Produit scalaire	Scalar product, dot product
Espace vectoriel normé	Normed vector space
Espace métrique, distance	Metric space, distance
Espace topologique	Topological space
Topologie discrète, topologie grossière	Discrete topology, trivial or rough topology
Topologie plus fine	Finer topology
Topologie moins fine ou plus grossière	Coarser topology
Suite convergente	Converging sequence
Fonction continue	Continuous function
Continuité séquentielle	Sequential continuity
Ouvert, fermé	Open, closed
Intérieur, fermeture (adhérence), frontière	Interior, closure, boundary
Point intérieur / adhérent / isolé / d'accumulation	Interior / adherent / isolated / accumulation point
Voisinage	Neighborhood (US) or neighbourhood (UK)
À base dénombrable de voisinages	First countable
À base dénombrable	Second countable
Boule ouverte, boule fermée	Open ball, closed ball
Complet, complétude	Complete, completeness
Compact, compacité	Compact, compactness
Pré-compact	pre-compact or totally bounded
Connexe, connexité	Connected, connectedness
Espace normal	Normal space
Propriété (de séparation) de Hausdorff	Hausdorff (separation) property or T2 axiom
Espace séparable	Separable space
Homéomorphisme, homéomorphe	Homeomorphism, homeomorphic
Espace dénombrable à l'infini	σ-compact space
Ensemble maigre	Meagre or first category set
Nulle part dense	Nowhere dense
Partout dense	Everywhere dense
Connexe et connexe par arcs	Connected and path-connected
Espace bien enchaîné	Chain connected space
Théorème/inégalité des accroissements finis	Mean-value theorem/inequality
Théorème de l'application ouverte	Open mapping theorem
(Sous-)Variété	(Sub)Manifold
Variété abstraite ou plongée	Abstract or embeded manifold
Carte	Chart
Espace tangent	Tangent space
Fibré tangent	Tangent bundle
Champ de vecteur	Vector field
Résolvante	Resolvent
EDO/EDP	ODE/PDE
Foyer/foyers	Focus/foci
Variation de la constante	Variation of parameters/Variation of constants
Flot	Flow

Annexe F

Chronologie [1]



1. Quelques personnages historiques liés à ces notes, certains sont aussi dans [28].

Bibliographie

[1] E. Acosta G. and C. Delgado G. Fréchet vs. Carathéodory. *Am. Math. Mon.*, 101(4) :332–338, 1994. doi:10.2307/2975625.

[2] V. I. Arnol'd. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 1989. Translated from the 1974 Russian original by K. Vogtmann and A. Weinstein, Second edition. doi:10.1007/978-1-4757-2063-1.

[3] V. I. Arnol'd. *Equations différentielles ordinaires*. Ellipses, reprint of the 1984 edition, 3rd edition edition, 2012. URL : https://www.editions-ellipses.fr/fr/accueil/744-equations-differentielles-ordinaires-9782729873608.html.

[4] S. Arora, H. Browne, and D. Daners. An alternative approach to Fréchet derivatives. *J. Aust. Math. Soc.*, 111(2) :202–220, 2021. doi:10.1017/S1446788720000166.

[5] S. Banach. *Théorie des opérations linéaires*. Hafner Publishing Company, New York, 1932. URL : https://eudml.org/doc/urn:eudml:doc:268537.

[6] S. Baron and S. Leader. Solution to problem #5299. *The American Mathematical Monthly*, 73(6) :677–678, 1966. doi:10.2307/2314834.

[7] E. T. Bell. *Men of Mathematics*. Simon and Schuster, 1937. URL : https://www.simonandschuster.com/books/Men-of-Mathematics/E-T-Bell/9780671628185.

[8] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*. Hermann, Paris, 1971. doi:10.1007/978-3-540-33982-3.

[9] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 5 à 10*. Hermann, Paris, 1974. doi:10.1007/978-3-540-34486-5.

[10] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011. doi:10.1007/978-0-387-70914-7.

[11] H. Cartan. *Cours de calcul différentiel*. Paris : Hermann, 1997.

[12] S. Chatterjee. Convergence of gradient descent for deep neural networks. prépublication arXiv :2203.16462, 2022. doi:10.48550/arXiv.2203.16462.

[13] D. Chelkak. Lectures notes for topologie et calcul différentiel. Cours L3 ENS Paris, 2020. URL : https://www.pdmi.ras.ru/~dchelkak/Notes/.

[14] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. Les Ulis : EDP Sciences, 4th edition edition, 2016. doi:10.1051/978-2-7598-1926-3.

[15] J. Dieudonné. Deux exemples singuliers d'équations différentielles. *Acta Sci. Math.*, 12 :38–40, 1950. URL : https://acta.bibl.u-szeged.hu/13615/.

[16] J. Dixmier. *Topologie générale*. Presses Universitaires de France, 1981.

[17] A. Doxiadis and C. Papadimitriou. *Logicomix*. Ikaros, 2010. URL : https://ikarosbooks.gr/en/catalogue/logicomix_5488/.

[18] R. Engelking. *General topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1989. Translated from the Polish by the author. URL : https://openlibrary.org/books/OL17772271M.

[19] R. Godement. *Analyse mathématique IV. Intégration et théorie spectrale, analyse harmonique, le jardin des délices modulaires*. Berlin : Springer, 2003. URL : https://openlibrary.org/books/OL9861706M.

[20] A. N. Godunov. Peano's theorem in Banach spaces. *Funct. Anal. Appl.*, 9 :53–55, 1975. doi:10.1007/BF01078180.

[21] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner. *Geometric Numerical IntegrationStructure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, 2 edition, 2006. doi:10.1007/3-540-30666-8.

[22] E. Hairer and G. Wanner. *L'analyse au fil de l'histoire*, volume 10 of *SCOPOS*. Springer-Verlag, Berlin, 2001. URL : https://link.springer.com/book/9783540674634.

[23] B. Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations*, volume 222 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, second edition, 2015. An elementary introduction. doi:10.1007/978-3-319-13467-3.

[24] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Amsterdam : Academic Press, 3rd ed. edition, 2013. URL : https://openlibrary.org/books/OL25206247M.

[25] T. J. Jech. *The axiom of choice*, volume 75 of *Stud. Logic Found. Math.* Elsevier, Amsterdam, 1973. URL : https://openlibrary.org/books/OL5429338M.

[26] K. Josić and R. Rosenbaum. Unstable solutions of nonautonomous linear differential equations. *SIAM Rev.*, 50(3) :570–584, 2008. doi:10.1137/060677057.

[27] M. Kac. *Enigmas of chance*. Alfred P. Sloan Foundation. Harper & Row, Publishers, New York, 1985. An autobiography. URL : https://openlibrary.org/books/OL20944507M.

[28] J.-M. Kantor and L. Graham. *Au nom de l'infini. Une histoire vraie de mysticisme religieux et de création mathématique*. Belin, Paris, 2010.

[29] J. L. Kelley. *General topology*. Mineola, NY : Dover Publications, reprint of the 1955 original published by van Nostrand edition, 2017. URL : https://openlibrary.org/books/OL28624056M.

[30] Y. Le Cun. *Quand la machine apprend : La révolution des neurones artificiels et de l'apprentissage profond*. Odile Jacob, 2019. URL : https://www.odilejacob.fr/catalogue/sciences/informatique/quand-la-machine-apprend_9782738149312.php.

[31] M. Lewin. *Théorie spectrale et mécanique quantique*, volume 87 of *Math. Appl. (Berl.)*. Cham : Springer, 2022. doi:10.1007/978-3-030-93436-1.

[32] H. Lindblad and T. Tao. Asymptotic decay for a one-dimensional nonlinear wave equation. *Analysis & PDE*, 5(2) :411–422, 2012. doi:10.2140/apde.2012.5.411.

[33] R. D. Mauldin, editor. *The Scottish Book*. Birkhäuser, Boston, Mass., 1981. Mathematics from the Scottish Café, Including selected papers presented at the Scottish Book Conference held at North Texas State University, Denton, Tex., May 1979. URL : https://openlibrary.org/books/OL4264065M.

[34] A. McLennan. The generalized Morse-Sard theorem. *Expo. Math.*, 39(4) :515–539, 2021. doi:10.1016/j.exmath.2021.01.002.

[35] J. A. Mingo and R. Speicher. *Free probability and random matrices*, volume 35 of *Fields Inst. Monogr.* Toronto : The Fields Institute for Research in the Mathematical Sciences ; New York, NY : Springer, 2017. doi:10.1007/978-1-4939-6942-5.

[36] J. R. Munkres. *Topology*. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2nd ed. edition, 2000. URL : https://openlibrary.org/books/OL49636M.

[37] L. Narici and E. Beckenstein. *Topological vector spaces*, volume 296 of *Pure and Applied Mathematics (Boca Raton)*. Chapman and Hall/CRC, second edition, 2010. doi:10.1201/9781584888673.

[38] F. Paulin. Topologie, analyse, et calcul différentiel. Cours ENS Paris, 2008-2009. URL : https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~frederic.paulin/notescours/cours_analyseI.pdf.

[39] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. I : Functional analysis*. Academic Press, 1980. URL : https://shop.elsevier.com/books/i-functional-analysis/reed/978-0-08-057048-8.

[40] S. Rideau-Kikuchi. Notes de cours de logique. Cours ENS Paris, 2024. URL : https://www.math.ens.psl.eu/~rideau/teaching/logic/logique.pdf.

[41] L. Schwartz. *Analyse. Topologie générale et analyse fonctionnelle.*, volume 11 of *Collect. Enseign. Sci.* Hermann, Paris, 1986. URL : https://www.editions-hermann.fr/livre/analyse-laurent-schwartz.

[42] L. Schwartz. *Analyse. I*, volume 42 of *Collection Enseignement des Sciences [Collection : The Teaching of Science]*. Hermann, Paris, 1991. Théorie des ensembles et topologie. [Set theory and topology], With the collaboration of K. Zizi. URL : https://www.editions-hermann.fr/livre/analyse-volume-1-laurent-schwartz.

[43] A. D. Sokal. A really simple elementary proof of the uniform boundedness theorem. *Amer. Math. Monthly*, 118(5) :450–452, 2011. doi:10.4169/amer.math.monthly.118.05.450.

[44] L. A. Steen and J. A. j. Seebach. Counterexamples in topology. 2nd ed. New York - Heidelberg - Berlin : Springer-Verlag. XI, 244 p. (1978)., 1978. doi:10.1007/978-1-4612-6290-9.

[45] G. Tomkowicz and S. Wagon. *The Banach-Tarski paradox*, volume 163 of *Encycl. Math. Appl.* Cambridge : Cambridge University Press, 2nd edition edition, 2016. doi:10.1017/CBO9781107337145.

[46] B. Tsirelson. Measure and category. cours en ligne, 2014. URL : https://math.huji.ac.il/~ohadfeld/Tsirelson/Courses/MeasCategory/main.html.

[47] S. M. Ulam. *Adventures of a mathematician*. Charles Scribner's Sons, New York, 1976. URL : https://openlibrary.org/books/OL5197649M/Adventures_of_a_mathematician.

[48] D. van Dalen. *L. E. J. Brouwer. Topologist, intuitionist, philosopher. How mathematics is rooted in life*. Berlin : Springer, updated revision of the two volume biography 'Mystic, geometer, and intuitionist. The life of L. E. J. Brouwer' published 1999 and 2005 edition, 2013. doi:10.1007/978-1-4471-4616-2.

[49] J. van Mill. *Infinite-dimensional topology. Prerequisites and introduction*, volume 43 of *North-Holland Math. Libr.* Elsevier (North-Holland), Amsterdam, 1989. URL : https://openlibrary.org/books/OL2053397M.

[50] D. Wei and S. Yang. Asymptotic decay for defocusing semilinear wave equations in $\mathbb{R}^{1+1}$. *Annals of PDE*, 7(1), 2021. doi:10.1007/s40818-021-00096-0.