Sorbonne Université – 3M101 – Description du projet

Équations elliptiques non-linéaires

Julien Guillod

21 novembre 2018

1 Introduction

Le but de ce projet est d'étudier l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u \pm |u|^{p-1} u = 0\,, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0\,, \tag{1}$$

dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec $p > 1$ un réel donné. Dans cette équation Δ désigne le laplacien en dimension n,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\,,$$

avec donc $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Le signe $\pm$ désigne au choix soit le signe plus soit le signe moins. Enfin $u|_{\partial\Omega} = 0$ précise que l'on cherche uniquement des solutions étant nulle sur le bord du domaine Ω. Finalement il est aussi possible d'étudier la même équation mais en enlevant les valeurs absolues.

Cette équation est non-linéaire (sauf pour $p = 1$), car la somme de deux solutions n'est pas forcément une solution. La partie linéaire de l'équation est Δu et la partie non-linéaire $|u|^{p-1}u$. La partie linéaire étant un laplacien et la partie non-linéaire ne contenant pas de dérivées de u, l'équation considérée (1) fait partie de l'ensemble des équations aux dérivées partielles elliptiques non-linéaires. L'équation (1) est essentiellement l'équation la plus simple de ce type et donc permet d'observer plusieurs comportements génériques présent dans cette classe d'équations. En particulier cette équation peut service de modèle très basique en mécanique des fluides ou en mécanique quantique.

Le but de ce projet est d'étudier les solutions de cette équation en fonction de la dimension $n \geq 1$, du paramètre $p > 1$ et du choix du signe $\pm$. Une propriété fondamentale de l'équation (1) est que si $u(\boldsymbol{x})$ est une solution dans Ω, alors pour tout $\lambda > 0$,

$$u_\lambda(\boldsymbol{x}) = \lambda^{\frac{-2}{p-1}} u(\lambda^{-1}\boldsymbol{x})\,, \tag{2}$$

est aussi une solution mais dans le domaine $\lambda\Omega = \{\lambda\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{x} \in \Omega\}$. C'est propriété est appelée une invariance d'échelle.

Ce document contient un certain nombre de questions. Celles-ci sont uniquement là pour vous guider dans les directions possibles pour la réalisation de ce projet. En particulier il n'est pas nécessaire d'y répondre à toutes, ni de le faire dans l'ordre présenté. Les parties marquées comme « plus avancé » sont plutôt à faire en dernier. Enfin le but est aussi d'interpréter les résultats obtenus numériquement.

2 Études des solutions pour $n = 1$

En une dimension, l'équation (1) est en fait une équation différentielle ordinaire. Plus précisément, pour $\Omega = (0, 1)$, l'équation (1) se réduit à

$$u'' \pm |u|^{p-1} u = 0\,, \qquad u(0) = 0\,, \qquad u(1) = 0\,. \tag{3}$$

Question 1. *Interpréter l'équation (3) comme l'équation d'une particule se déplaçant dans un potentiel,*

$$u'' + V'(u) = 0\,,$$

pour un certain potentiel $V(u)$. Dessiner ce potentiel $V(u)$ pour différentes valeurs de $p > 1$ et les deux signes $\pm$. Quelles sont les différences avec l'équation d'une particule se déplaçant dans un potentiel concernant les conditions aux bords ?

Le but est ensuite de développer un code informatique (en python avec numpy et scipy de préférence) permettant de résoudre l'équation (3) pour différentes valeurs de $p > 1$. Il y a plusieurs méthodes permettant de résoudre ce problème.

2.1 Méthode de tir

La première méthode qu'il est suggéré d'implémenter est une méthode venant des équations différentielles. Plus précisément il s'agit de résoudre l'équation

$$u'' \pm |u|^{p-1}u = 0\,, \qquad u(0) = 0\,, \qquad u'(0) = \sigma\,, \tag{4}$$

pour différentes valeurs de $\sigma \in \mathbb{R}$ sur l'intervalle $(0, 1)$. Pour une valeur générique de σ, la solution vérifiera $u(1) = \kappa$ avec $\kappa \neq 0$. Par contre en variant la valeur de σ, alors il est possible d'obtenir une solution ayant $\kappa = 0$, *i.e.* telle que $u(1) = 0$.

Question 2. *En utilisant la méthode d'Euler ou une méthode Runge-Kutta, résoudre l'équation différentielle (4) et tracer le graphe paramétrique $(\kappa, \|u\|_{L^2})$ en fonction de $\sigma \in \mathbb{R}$. Faire cela pour différentes valeurs de $p > 1$ et du signe $\pm$.*

Question 3. *A l'aide d'une méthode de Newton déterminer plus précisément que sur le graphique précédent les premières valeurs de σ telles que $\kappa = 0$.*

2.2 Méthode utilisant l'invariance d'échelle

Une autre façon de déterminer les solutions de (3) est de procéder ainsi. Les solutions de (4) sont périodiques, donc il suffit de choisir une valeur de σ (par exemple $\sigma = 1$ ou $\sigma = -1$) et de résoudre l'équation différentielle (4) jusqu'au premier temps $\lambda > 0$ tel que $u(\lambda) = 0$. Ensuite en utilisant l'invariance d'échelle (2) cette solution peut être transformée en une solution u telle que $u(1) = 0$. Il s'agit alors (si elle existe) de la première solution non-nulle de (3). En mettant bout à bout cette solution, alors on obtient toutes les solutions de (3).

Question 4. *Implémenter numériquement cette méthode pour représenter graphiquement les premières solutions de (3).*

2.3 Méthode des différences finies

Le problème (3) étant une équation avec une condition à chaque bord de l'intervalle, la méthode des différences finies est particulièrement adaptée et simple à mettre en œuvre. L'idée de base est d'approximer la dérivée seconde de u par

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}\,,$$

pour un certain $h > 0$ assez petit. Plus précisément si u_n désigne la valeur de u au point $x_n = \frac{n}{N+1}$ pour $n = \{0, 1, \dots, N+1\}$, alors (3) peut-être approximée par

$$u_0 = 0\,, \qquad \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} \pm |u_n|^{p-1}u_n = 0\,, \qquad u_{N+1} = 0\,, \tag{5}$$

pour $n = 1, 2, \dots, N$ et avec $h = \frac{1}{N+1}$. Ce système d'équations non-linéaire peut alors être résolu à l'aide de la méthode de Newton à partir d'une certaine donnée initiale non-nulle. On pourra prendre par exemple $u_n = A\sin(\pi k x_n)$ avec certains $A > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ donnés.

2.4 Méthode d'éléments finis (plus avancé)

Les méthodes d'éléments finis consiste à approximer la solution par exemple à l'aide de polynômes de degré deux raccordés de manière continûment différentiable. Si vous êtes intéressé par cette méthode, je vous propose d'utiliser le logiciel open source FEniCS (`https://fenicsproject.org`) et en particulier de lire le tutoriel disponible à l'adresse `https://fenicsproject.org/pub/tutorial/sphinx1/` et de vous inspirer de l'exemple « A nonlinear Poisson equation ».

Question 5. *Développer un algorithme par éléments finis permettant de déterminer numériquement les premières solutions de l'équation* (3).

2.5 Méthode spectrale (plus avancé)

Finalement une troisième méthode pour résoudre l'équation (3) est une méthode dite spectrale ou plus précisément pseudo-spectrale. L'idée est d'approximer la solution à l'aide d'un nombre fini d'éléments, par exemple avec un nombre fini de modes de Fourier

$$u(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}_n \sin(\pi(n+1)x)\,.$$

Avec une telle approximation le calcul de u'' en fonction des coefficients $\hat{u}_n$ est complètement triviale, par contre le calcul analogue pour la non-linéarité $|u|^{p-1}u$ est plus complexe. Pour cela l'idée est de revenir dans l'espace direct en évaluant l'approximation u aux points $x_k = \frac{k+1}{N+1}$ pour $k \in \{0, 1, \dots N-1\}$, c'est-à-dire en utilisant $u_k = u(x_k)$. Le lien entre les $\hat{u}_n$ et les u_k sont donnés par la transformée de Fourier discrète notée : $u_k = \mathcal{F}(\hat{u}_n)$. En terme des u_k l'évaluation de la non-linéarité est maintenant triviale. La fonction qui donné $\hat{u}_n$ redonne les coefficients de Fourier de $|u|^{p-1}u$ est donc

$$N(\hat{u}_n) = \mathcal{F}^{-1}\left(|\mathcal{F}(\hat{u}_n)|^{p-1}\mathcal{F}(\hat{u}_n)\right)\,.$$

Ainsi l'idée de base d'évaluer la non-linéarité avec les u_k et la linéarité avec les $\hat{u}_n$ le passage entre les deux représentations se faisant avec la transformée de Fourier discrète. Le système d'équations discrètes résultant pour $\hat{u}_n$ est donc

$$-\pi^2(n+1)^2\hat{u}_n + N(\hat{u}_n) = 0\,.$$

Ce système d'équations non-linéaire peut alors être résolu à l'aide de la méthode de Newton à partir d'une certaine donnée initiale non-nulle (par exemple $\hat{u}_n = A\delta_{nm}$ pour certains m et A donnés).

Question 6. *Développer un algorithme spectral permettant de déterminer numériquement les premières solutions de l'équation* (3).

3 Études des solutions radiales pour $n \geq 2$

Pour simplifier cette étude, nous allons supposer que le domaine Ω est la boule en dimension $n \geq 2$ de rayon un centrée à l'origine. Pour simplifier encore plus le problème, nous allons étudier les solutions radiales de l'équation, *i.e.* les solutions qui dépendent uniquement de $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. Ainsi en supposant que $u(\boldsymbol{x}) = v(|\boldsymbol{x}|)$, l'équation (1) se simplifie en une équation différentielle ordinaire

$$v'' + \frac{n-1}{r}v' \pm |v|^{p-1}v = 0\,, \qquad v'(0) = 0\,, \qquad v(1) = 0\,, \tag{6}$$

sur l'intervalle $(0, 1)$ en la variable $r = |\boldsymbol{x}|$. La condition $v'(0) = 0$ provient du fait que sinon la solution $u(\boldsymbol{x}) = v(|\boldsymbol{x}|)$ n'est pas régulière en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. La condition $v(1) = 0$ provient du fait que u doit être nul sur le bord de la boule unité.

Question 7. *Déduire l'équation* (6) *à partir de* (1).

La transformation d'Emden-Fowler (Evans, 1998, Problem 4.7.4)

$$r = \mathrm{e}^{-t}\,, \qquad v(r) = r^{\frac{-2}{p-1}}x(-\log r)\,,$$

permet de transformer (6) en une équation différentielle autonome, *i.e.* dont les coefficients ne dépendent pas du temps

$$\ddot{x} + \left(\frac{4}{p-1} + 2 - n\right)\dot{x} + \left(\frac{4p}{(p-1)^2} - \frac{2n}{p-1} \pm |x|^{p-1}\right)x = 0\,, \qquad x(0) = 0\,, \tag{7}$$

sur l'intervalle $(0, \infty)$ avec en plus une condition de décroissance sur x à l'infini.

Question 8. *Déduire l'équation* (7) *à partir de* (6).

Question 9. *Interpréter l'équation* (7) *comme celle d'une particule dans un potentiel avec un terme de frottement. Déterminer la forme du potentiel et étudier de quelle forme le terme de frottement doit être pour espérer obtenir une solution de* (7).

3.1 Méthode de tir

Par analogie avec le cas $n = 1$, l'idée est de résoudre l'équation différentielle

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' \pm |v|^{p-1} v = 0 \,, \qquad v'(0) = 0 \,, \qquad v(0) = \sigma \,, \tag{8}$$

pour différentes valeurs de $\sigma \in \mathbb{R}$. Pour une valeur générique de σ, la solution vérifiera $v(1) = \kappa$ avec $\kappa \neq 0$. Mais on peut espérer que pour certaines valeurs de σ bien précises alors $\kappa = 0$.

Question 10. *Résoudre numériquement l'équation différentielle* (8) *et tracer le graphe paramétrique* $(\kappa, \|u\|_{L^2})$ *en fonction de* $\sigma \in \mathbb{R}$. *L'équation différentielle étant singulière en* $r = 0$*, il faut la résoudre numériquement sur* $(\varepsilon, 1)$ *avec* $\varepsilon > 0$ *très petit par exemple.*

3.2 Méthode utilisant l'invariance d'échelle

Par analogie avec le cas $n = 1$, une autre méthode consiste à résoudre l'équation différentielle (8) pour un certain σ donné (par exemple $\sigma = 1$) et de déterminer les temps $\lambda_i > \cdots > \lambda_2 > \lambda_1 > 0$ tel que $v(\lambda_i) = 0$. Ensuite en utilisant l'invariance (2), cela permet de construire i solutions différentes.

Question 11. *Implémenter numériquement cette méthode pour représenter graphiquement les premières solutions de* (6) *pour différentes valeurs de* $p > 1$ *et en différentes dimensions* $n \geq 2$.

4 Autres questions plus avancées

Voici quelques exemples de questions plus avancées voir beaucoup plus compliquées qui peuvent être traitées si vous êtes intéressés :

Question 12. *Étudier numériquement (par éléments finis par exemple) l'équation* (1) *pour* $n = 2$ *(voir* $n = 3$*) mais en regardant pas uniquement les solutions radiales.*

Question 13. *Étudier numériquement les solutions auto-similaires considérées par Cazenave* et al. *(2017).*

Si vous êtes intéressés par l'aspect plus mathématique, vous pouvez aller regarder dans le livre d'Evans (1998), dans Cazenave (2017) ou dans Brezis & Nirenberg (1983).

Références

Brezis, H. & Nirenberg, L. 1983, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **36** (4), 437–477, doi:10.1002/cpa.3160360405

Cazenave, T. 2017, An introduction to semilinear evolution equations, `https://www.ljll.math.upmc.fr/cazenave/77.pdf`

Cazenave, T., Dickstein, F., Naumkin, I., & Weissler, F. B. 2017, Sign-changing self-similar solutions of the nonlinear heat equation with positive initial value, arXiv:1706.01403

Evans, L. C. 1998, *Partial differential equations*, vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI