Mécanique II : Corrigé 2

1 Avant-propos

Lire l'article *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.* par E. P. Wigner, 1959. Comm. Pure Appl. Math., 13 : 1–14. doi : 10.1002/cpa.3160130102

2 Différentiabilité

Définition. Une application $\Phi : V \to W$ entre deux espaces vectoriels normés est différentiable en $x \in V$ s'il existe une application linéaire continue $\Phi'(x) : V \to W$ telle que

$$\Phi(x+h) = \Phi(x) + \Phi'(x)h + o(h)\,,$$

pour tout $h \in V$.

1. Montrer que l'espace $C([-1,1])$ des fonctions continues sur l'intervalle $[-1,1]$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|\ .$$

L'ensemble des fonctions de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel donc pour montrer que $C([-1,1])$ est un espace vectoriel il suffit de montrer que les lois d'addition et de multiplication par des scalaires sont bien définies. Cela découle du fait que la somme de deux fonctions continues est continue et que la multiplication par un scalaire d'une fonction continue est continue. Ainsi il reste à montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $C([-1,1])$. Pour tout $f, g \in C([-1,1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la norme est sous-additive,

$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &= \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)+g(x)| \le \sup_{x\in[-1,1]} (|f(x)|+|g(x)|)\\ &\le \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[-1,1]} |g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\ ,\end{aligned}$$

homogène,

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |\lambda f(x)| = \sup_{x\in[-1,1]} |\lambda|\,|f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)| = |\lambda|\,\|f\|_\infty\ ,$$

et non-dégénérée,

$$\|f\|_\infty = 0 \quad\Rightarrow\quad \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)| = 0 \quad\Rightarrow\quad \forall x\in[-1,1]\,,\ |f(x)| = 0 \quad\Rightarrow\quad f = 0\,.$$

2. Montrer que la fonction $\Phi : C([-1,1]) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(f) = f^2(0)\,,$$

est différentiable et calculer sa différentielle.

Pour $h \in C([-1,1])$, alors

$$\Phi(f+h) - \Phi(f) = (f(0)+h(0))^2 - f^2(0) = 2f(0)h(0) + h^2(0)\,.$$

La différentielle de Φ en f est donc $\Phi'(f)h = 2f(0)h(0)$, car

$$\left|\Phi(f+h) - \Phi(f) - \Phi'(f)h\right| = \left|h^2(0)\right| = |h(0)|^2 \le \|h\|_\infty^2\ .$$

*Contact pour cette série : Julien Guillod (julien.guillod@unige.ch)

3. Montrer que la fonction $\Phi : C([-1,1]) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(f) = \int_{-1}^{1} f^2(x)\mathrm{d}x \,,$$

est différentiable et calculer sa différentielle.

Pour $h \in C([-1,1])$, alors

$$\Phi(f+h) - \Phi(f) = \int_{-1}^{1} (f(x)+h(x))^2 \,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} f(x)^2 \mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} f(x)h(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} h^2(x)\mathrm{d}x \,.$$

La différentielle de Φ en f est donc $\Phi'(f)h = 2\int_{-1}^{1} f(x)h(x)\mathrm{d}x$, car

$$\left|\Phi(f+h) - \Phi(f) - \Phi'(f)h\right| = \left|\int_{-1}^{1} h^2(x)\mathrm{d}x\right| \leq 2\left\|h\right\|_{\infty}^{2} \,.$$

3 Espaces affines

Définition (espace affine)**.** Un espace affine (A, V) consiste en un ensemble A, un espace vectoriel V et une application $A \times V \to A$ notée $+$ telle que pour tout $a \in A$ et $v, w \in V$,

$$a + 0 = a\,, \qquad\qquad (a + v) + w = a + (v + w)\ ,$$

et telle pour tout $a, b \in A$ il existe un unique $v \in V$ tel que $a = b + v$. Cet unique v est noté $v = a - b$. La dimension d'un espace affine (A, V) est définie par la dimension de l'espace vectoriel V.

Remarque. L'application $+$ vérifiant les propriétés ci-dessus est appelée une action transitive et libre du groupe additif de l'espace vectoriel V sur l'ensemble A.

Définition (application affine)**.** Donnés deux espaces affines (A, V) et (A', V'), une application $\phi : A \to A'$ est affine s'il existe une application linéaire $L : V \to V'$ telle que pour tout $a \in A$ et $v \in V$,

$$\phi(a + v) = \phi(a) + Lv\,.$$

L'application linéaire L est unique et est appelée l'application linéaire sous-jacente.

Définition (isomorphisme d'espaces affines)**.** Une application affine $\phi : A \to A'$ est un isomorphisme affine si l'application ϕ est bijective. Dans ce cas les espaces affines (A, V) et (A', V') sont dit isomorphes.

1. Montrer que tout espace vectoriel V induit un espace affine (V, V) en choisissant $A = V$ et la loi $+$ comme la loi additive de l'espace vectoriel V.

   L'application $+$ est définie pour $a \in V$ et $v \in V$ par $a + v$, c'est-à-dire par la loi additive de l'espace vectoriel V. Les propriétés de cette application découlent directement du fait que la loi additive d'un espace vectoriel forme un groupe.

2. Pour $a_0 \in A$ et $a'_0 \in A'$ fixés, montrer que $\phi^L_u : A \to A'$ définie par
$$\phi^L_u(a) = a'_0 + L(a - a_0) + u$$
   est une application affine pour toute application linéaire $L : V \to V'$ et tout $u \in V'$. Réciproquement montrer que toute application affine est égale à un ϕ^L_u, avec L et u bien choisis.

   L'application ϕ^L_u est affine car
$$\phi^L_u(a + v) = a'_0 + L(a + v - a_0) + u = \phi^L_u(a) + Lv\,.$$
   Réciproquement, si ϕ est une application affine, alors il existe $L : V \to V'$ linéaire telle que
$$\phi(a) = \phi(a + v) - Lv\,,$$
   et en posant $v = a_0 - a$ et $u = \phi(a_0) - a'_0$, alors
$$\phi(a) = \phi(a_0) + L(a - a_0) = a'_0 + L(a - a_0) + u = \phi^L_u(a)\,.$$

3. Montrer que ϕ est un isomorphisme entre (A, V) et (A', V') si et seulement si l'application linéaire sous-jacente L est bijective. Cela montre que deux espaces affines (A, V) et (A', V') sont isomorphes si et seulement si les espaces vectoriels V et V' sont isomorphes.

   Tout d'abord, $\phi(a + v) = \phi(a)$ si et seulement si $Lv = 0$, c'est-à-dire ϕ est injective si et seulement si L est injective. Si L est surjective, il existe v tel que $Lv = b - \phi(a)$ et donc
$$\phi(a + v) = \phi(a) + Lv = b\,,$$
   ce qui montre que ϕ est surjective. Si ϕ est surjective, alors il existe v tel que $\phi(a+v) = \phi(a)+w$ et donc L est surjective car
$$Lv = \phi(a + v) - \phi(a) = w\,.$$

4. Montrer que tout espace affine (A, V) de dimension n est isomorphe à l'espace affine $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

   Un espace affine (A, V) est de dimension n si l'espace vectoriel V est de dimension n. Par conséquent, il existe un isomorphisme $L : V \to \mathbb{R}^n$ d'espaces vectoriels. Le point 3. montre que (A, V) et $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sont deux espaces affines isomorphes.

5. Montrer que les automorphismes affines de (A, V), c'est-à-dire les isomorphismes affines de (A, V) vers (A, V), forment un groupe, noté $\text{Aff}(A)$, sous la composition des applications.

Soient $\phi_1 : A \to A$ et $\phi_2 : A \to A$ deux automorphismes. Alors $\phi = \phi_1 \circ \phi_2$ est aussi un automorphisme,

$$\phi(a+v) = \phi_1(\phi_2(a+v)) = \phi_1(\phi_2(a) + L_2 v) = \phi_1(\phi_2(a)) + L_1 L_2 v = \phi(a) + L_1 L_2 v\,,$$

et l'application linéaire sous-jacente est $L_1 L_2$. De plus si $\phi : A \to A$ est un automorphisme d'application sous-jacente L, alors ϕ^{-1} est un automorphisme avec L^{-1} comme application linéaire sous-jacente, car

$$\phi(\phi^{-1}(a) + L^{-1}v) = \phi(\phi^{-1}(a)) + LL^{-1}v = a + v\,,$$

et donc en appliquant ϕ^{-1},

$$\phi^{-1}(a) + L^{-1}v = \phi^{-1}(a+v)\,.$$

Par conséquent $\text{Aff}(A)$ est un sous-groupe des applications de A dans A.

6. Pour tout $a_0 \in A$, le point 2. montre que

$$\text{Aff}(A) = \left\{\phi_u^L\,,\ L \in \text{GL}(V) \text{ et } u \in V\right\},$$

où $\text{GL}(V)$ désigne le groupe général linéaire, c'est-à-dire le groupe des automorphismes linéaires de V et

$$\phi_u^L(a) = a_0 + L(a - a_0) + u\,.$$

Déterminer la loi de composition explicite des éléments ϕ_u^L.

Pour $L_1, L_2 \in \text{GL}(V)$ et $u_1, u_2 \in A$, alors

$$\begin{aligned}\left(\phi_{u_1}^{L_1} \circ \phi_{u_2}^{L_2}\right)(a) &= \phi_{u_1}^{L_1}(\phi_{u_2}^{L_2}(a)) = \phi_{u_1}^{L_1}(a_0 + L_2(a-a_0) + u_2) = a_0 + L_1\left(L_2(a-a_0) + u_2\right) + u_1 \\ &= a_0 + L_1L_2(a-a_0) + L_1u_2 + u_1 = \phi_{L_1u_2+u_1}^{L_1L_2}(a)\,.\end{aligned}$$

La loi de composition n'est donc pas donnée par $\phi_{u_1}^{L_1} \circ \phi_{u_2}^{L_2} = \phi_{u_1+u_2}^{L_1L_2}$, c'est-à-dire le groupe des automorphismes affines n'est pas égal au groupe produit $V \times \text{GL}(V)$. Le groupe obtenu est un produit semi-direct, $\text{Aff}(A) \simeq V \rtimes \text{GL}(V)$.

7. Montrer que le groupe des automorphismes linéaires de (A, V) peut être représenté par le sous-groupe de $\text{GL}(V \times \mathbb{R})$ formé par les matrices de la forme

$$M_u^L = \begin{pmatrix} L & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec $L \in \text{GL}(V)$ et $u \in V$.

Il suffit de déterminer la loi de groupe,

$$M_{u_1}^{L_1} M_{u_2}^{L_2} = \begin{pmatrix} L_1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_2 & u_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1L_2 & L_1u_2 + u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{L_1u_2+u_1}^{L_1L_2}\,.$$

Comme la loi est identique à celle des ϕ_u^L alors les deux groupes sont isomorphes.

8. (*) Montrer que l'application $\phi \mapsto L$ qui associe à chaque automorphisme affine son application linéaire sous-jacente est un homomorphisme du groupe $\text{Aff}(A)$ vers le groupe général linéaire $\text{GL}(V)$.

L'application $\text{Aff}(A) \to \text{GL}(V)$ définie par $\phi \mapsto L$ est un homomorphisme car par le point 5., l'application linéaire sous-jacente à $\phi_1 \circ \phi_2$ est $L_1 L_2$.

9. (*) Montrer que le noyau de l'homomorphisme $\phi \mapsto L$ est isomorphe au groupe de V.

Le noyau de l'homomorphisme $\phi \mapsto L$ est donné par l'ensemble des automorphismes ayant $L = 1$. Par le point 2., cet ensemble est donné par $\left\{\phi_v^1\,,\ v \in V\right\}$ qui a par le point 6. est isomorphe au groupe additif de V.

Remarque. Cela montre que $\text{Aff}(A) \simeq V \rtimes \text{GL}(V)$ et que la suite

$$1 \to V \to \text{Aff}(A) \to \text{GL}(V) \to 1\,,$$

est exacte.