Mécanique II : Corrigé 5

Exercice 1 :

1. On a
$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{1}{m_1}\nabla_{\mathbf{r}_1}(U(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)) = +\frac{1}{m_1}(\nabla U)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{1}{m_2}\nabla_{\mathbf{r}_2}(U(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)) = -\frac{1}{m_2}(\nabla U)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) \end{cases} .$$
On obtient donc
$$m_*\ddot{\mathbf{R}} = (m_1+m_2)\left(\frac{m_1\ddot{\mathbf{r}}_1}{m_1+m_2} + \frac{m_2\ddot{\mathbf{r}}_2}{m_1+m_2}\right) = m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0} .$$
D'autre part, on a
$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)(\nabla U)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) = -\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}(\nabla U)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) = -\frac{1}{\mu}(\nabla U)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)$$
ce qui donne effectivement $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r})$.
2. L'équation pour $\mathbf{r}$ est celle d'un point matériel de masse μ dans un potentiel $U(\mathbf{r})$. L'équation pour $\mathbf{R}$ est celle d'un point matériel ne subissant aucune force, donc d'un mouvement rectiligne uniforme. On peut donc décomposer le problème à deux corps comme un mouvement uniforme du centre de masse et le mouvement d'un point matériel "effectif" de masse μ.
3. Si maintenant m_1 est très grand (beaucoup plus que m_2), on trouve que $\frac{m_1}{m_1+m_2} \approx 1$ et $\frac{m_2}{m_1+m_2} \approx 0$. En conséquence, on a que $\mathbf{R} \approx \mathbf{r}_1$, et dans le référentiel où $\mathbf{R} \equiv \mathbf{0}$, on a donc $\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{0}$ (l'étoile ne bouge presque pas). D'autre part, on a que $\mu \approx m_2$, et que $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \approx \mathbf{r}_2 - \mathbf{0} = \mathbf{r}_2$, et donc $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r})$ devient essentiellement $m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\nabla U(\mathbf{r}_2)$ (donc la planète suit l'équation d'un point matériel dans un potentiel $U(\mathbf{r}_2)$). L'erreur relative faite avec cette approximation est de l'ordre de m_2/m_1.

Exercice 2 : Pour décrire les orbites, introduisons comme dans le cours le potentiel effectif
$$V(r) = c\, r^\alpha + \frac{M^2}{2r^2}$$
où M est le moment cinétique (constant). La composante $\frac{M^2}{2r^2}$ agit comme un potentiel répulsif. La composante $c\, r^\alpha$ agit comme un potentiel attractif ou répulsif selon les valeurs de c et α. Rappel : si le potentiel effectif V est borné inférieurement, on a nécessairement $E \geq \inf_r V(r)$.

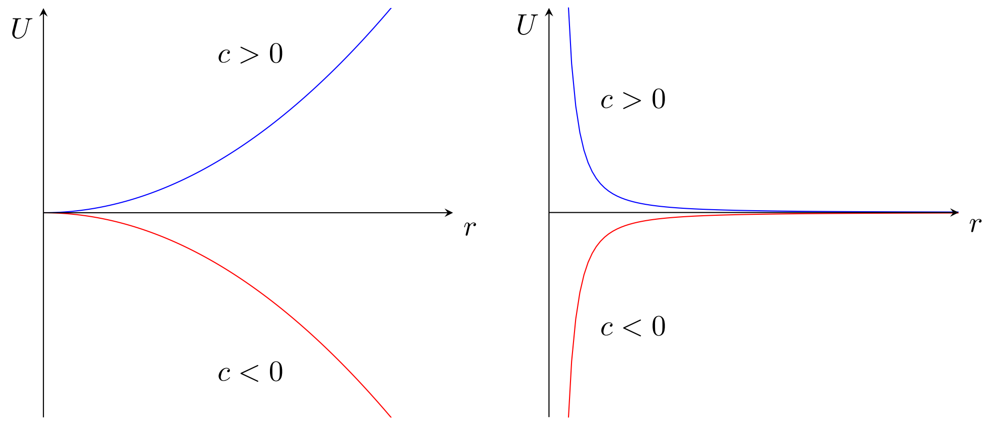
1. Lorsque $M = 0$, on a $U(r) \equiv V(r)$.
   — Cas $\alpha = 0$ ou $c = 0$: nous avons dans les deux cas $U(r) \equiv c$, donc l'absence de force. Les trajectoires sont des lignes droites qui passent par l'origine (puisque $M = 0$) ou des points fixes.
   — Cas $\alpha > 0, c > 0$. Le potentiel est attractif, on a $\lim_{r\to\infty} U(r) = \infty$ et donc les trajectoires restent bornées. Puisque $U(0) = 0$ et que nécessairement $E > 0$, toutes les trajectoires visitent l'origine. Voir courbe bleue sur la Figure 1a.

*Contact pour cette série : Noé Cuneo (noe.cuneo@unige.ch)

— Cas $\alpha > 0, c < 0$. Le potentiel est répulsif, et tend de façon monotone vers $-\infty$ lorsque $r \to \infty$. Les trajectoires partent donc à l'infini. Si $E > 0$ elles peuvent "traverser" l'origine, et si $E < 0$ elles sont réfléchies dans la direction d'où elles viennent. Voir courbe rouge sur la Figure 1a.

— Cas $\alpha < 0, c > 0$. Le potentiel est répulsif et tend vers zéro lorsque $r \to \infty$ de façon monotone décroissante. L'énergie à l'origine étant infinie, les trajectoires sont réfléchies et repartent à l'infini sans passer par l'origine. Voir courbe bleue sur la Figure 1b.

— Cas $\alpha < 0, c < 0$. Le potentiel est attractif. Si $E < 0$, la trajectoire entre en collision avec l'origine. Si $E \geq 0$ elle peut entrer en collision avec l'origine ou partir à l'infini, selon les conditions initiales. Voir courbe rouge sur la Figure 1b.



(a) $\alpha > 0$ (b) $\alpha < 0$

FIGURE 1 – Cas $M = 0$.

2. On suppose maintenant que $M \neq 0$.

— Cas $\alpha = 0$ ou $c = 0$: nous avons dans les deux cas $V(r) \equiv c$, donc l'absence de force. Toutes les trajectoires viennent de l'infini et repartent à l'infini (il s'agit de droites qui ne passent pas par l'origine). Voir Figure 2.

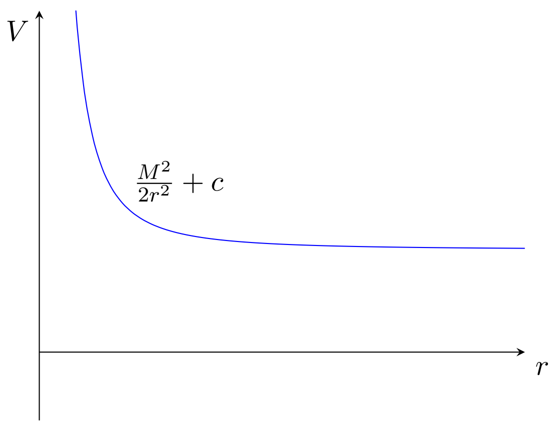
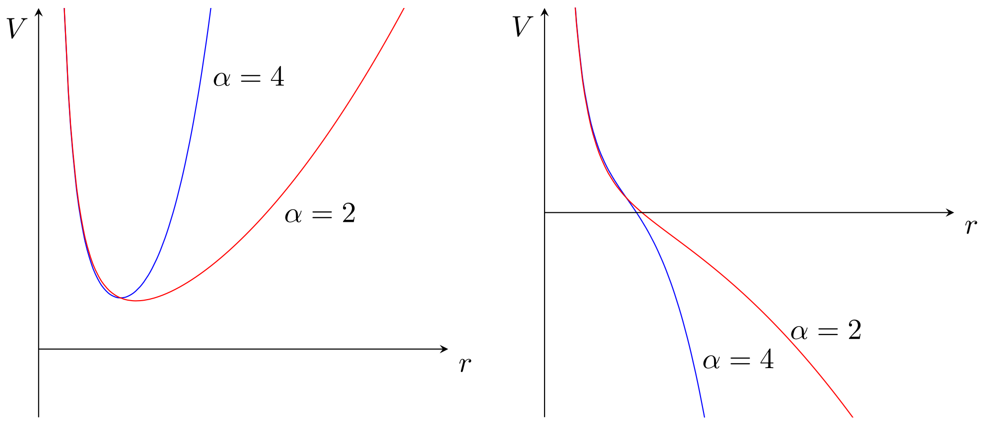


FIGURE 2 – Cas $M \neq 0$ et $\alpha = 0$ ou $c = 0$

— Cas $\alpha > 0$.

— Si $c > 0$, on a $\lim_{r\to\infty} V(r) = \lim_{r\to 0} V(r) = +\infty$ donc les trajectoires restent bornées et n'approchent pas l'origine. C'est typiquement le cas avec un ressort obéissant à la loi de Hooke (dans ce cas $\alpha = 2$). Voir Figure 3a.

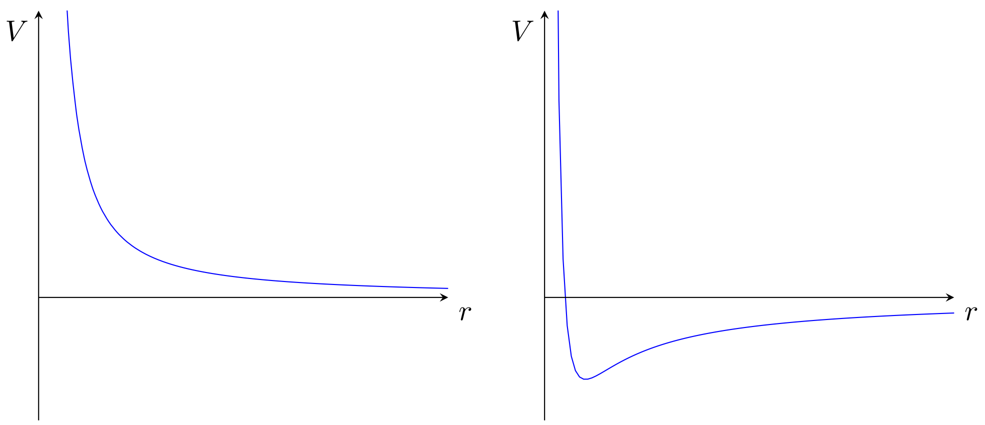
— Si $c < 0$, $V(r)$ est strictement décroissante avec $\lim_{r\to\infty} V(r) = -\infty$ donc les trajectoires partent à l'infini. Comme au point précédent, les trajectoires ne visitent pas l'origine. Voir Figure 3b.



(a) $c > 0$ (b) $c < 0$

FIGURE 3 – Cas $M \neq 0$ et $\alpha > 0$.

— Cas $-2 < \alpha < 0$.
  — Si $c > 0$, les deux composantes sont répulsives. On a $\lim_{r \to 0} V(r) = +\infty$, donc les trajectoires n'approchent pas l'origine. De plus, $V(r)$ décroit de façon monotone jusqu'à zéro à l'infini, donc les trajectoires viennent et partent de l'infini. Voir Figure 4a.
  — Si $c < 0$ la composante cr^α est attractive. Lorsque $r \to 0$, c'est toujours $\frac{M^2}{2r^2}$ qui "gagne" puisque $\alpha > -2$. Ainsi, on a $\lim_{r \to 0} V(r) = +\infty$ et aucune trajectoire ne peut approcher l'origine. On a $\lim_{r \to \infty} V(r) = 0$, mais il y a un minimum à énergie négative. Pour calculer ce minimum, on résout l'équation $\frac{d}{dr}\left(cr^\alpha + \frac{M^2}{2r^2}\right) = 0$ ce qui donne $r^* = (M^2/2\alpha)^{\frac{1}{2+\alpha}}$. On peut montrer que $E^* = V(r^*)$ est toujours négatif. Ainsi, si $E^* \leq E < 0$ la trajectoire est bornée, et si $E \geq 0$ la trajectoire n'est pas bornée. Exemple : le potentiel gravitationnel ($\alpha = -1$). Voir Figure 4b.

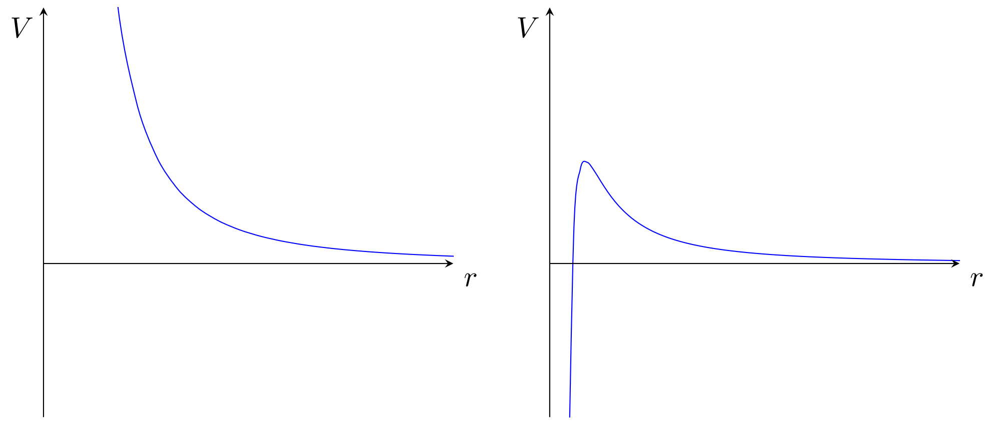


(a) $c > 0$ (b) $c < 0$

FIGURE 4 – Cas $M \neq 0$ et $-2 < \alpha < 0$

— Cas $\alpha = -2$. On a $V(r) = (M^2/2 + c)\frac{1}{r^2}$. La discussion est la même que dans le cas $M = 0$ ci-dessus, avec une nouvelle constante $c' = M^2/2 + c$ et $\alpha < 0$. Si $c' > 0$ les trajectoires ne peuvent approcher l'origine et ne sont pas bornées. Si $c' < 0$ les trajectoires avec $E < 0$ collisionnent l'origine, et celle avec $E \geq 0$ peuvent collisionner l'origine ou partir à l'infini. Ainsi, puisque c' dépend de M, la nature de la trajectoire peut dépendre de la valeur de M.

— Cas $\alpha < -2$.
  - — Si $c > 0$, les deux composantes sont à nouveau attractives, et les trajectoires sont comme dans le cas $\alpha < 0, c > 0$. Voir Figure 5a.
  - — Si $c < 0$, la composante cr^α est attractive et "gagne" lorsque $r \to 0$. On a $\lim_{r\to 0} V(r) = -\infty$ et $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$. Il y a un maximum d'énergie E^* que l'on obtient comme précédemment. Si $E < 0$ les trajectoires ne peuvent s'échapper et sont attirées par l'origine. Si $0 \le E \le E^*$ les trajectoires ne peuvent pas traverser la barrière de potentiel, et sont donc soit attirées par l'origine, soit s'échappent vers l'infini. Si $E > E^*$ les trajectoires peuvent venir de l'infini et aller vers l'origine, ou inversement.Voir Figure 5b.



(a) $c > 0$ (b) $c < 0$

FIGURE 5 – Cas $M \neq 0$ et $\alpha < -2$.

Préparatif : Pour que la quantité $\alpha + \beta x - x^2$ soit non-négative pour tout $x \in [x_1, x_2]$, il faut que le discriminant $\Delta = \beta^2 + 4\alpha$ soit positif et que $[x_1, x_2] \subset \left[\frac{\beta-\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{\beta+\sqrt{\Delta}}{2}\right]$. En complétant le carré, en posant $y = (x - \beta/2)\,x$ puis $z = 2y/\sqrt{\Delta}$, on trouve

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta^2/4 - (x-\beta/2)^2}} = \int_{x_1-\beta/2}^{x_2-\beta/2} \frac{dy}{\sqrt{\Delta/4 - y^2}} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

avec $z_i = 2\,(x_i - \beta/2)\,/\sqrt{\Delta}$. On pose finalement $t = \arcsin(z)$ et $t_i = \arcsin(z_i)$. On a $[z_1, z_2] \subset [-1, 1]$ et par définition de l'arcsinus, $[t_1, t_2] \subset [-\pi/2, \pi/2]$. Sur cet intervalle, $\cos(t)$ est positif. Dès lors, avec $z = \sin(t)$ et $dz = \cos(t)dt$ on trouve

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos(t)dt}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos(t)dt}{|\cos(t)|} = \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1 \quad \text{avec} \quad t_i = \arcsin\left(\frac{2x_i - \beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha}}\right) . \tag{1}$$

Remarque : Observons que si $x_1 = \frac{\beta-\sqrt{\Delta}}{2}$ (c'est à dire que x_1 est le point "limite" où la racine s'annule), alors $t_1 = -\frac{\pi}{2}$ et si $x_2 = \frac{\beta+\sqrt{\Delta}}{2}$ (donc si x_2 est l'autre point limite), alors $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Si x_1 et x_2 sont les deux points limites, nous avons $I = \pi$.

Exercice 3 : Orbites fermées. Nous avons $U(r) = -\frac{k}{r}$ et $V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{M^2}{2r^2}$. Pour obtenir des orbites bornées, il faut nécessairement $E < 0$ puisque nous avons $\lim_{r\to\infty} U(r) = 0$. Calculons maintenant l'énergie minimale, qui correspond au minimum de V. De manière équivalente, minimisons $V\left(\frac{1}{u}\right) =$

$-ku + \frac{M^2}{2}u^2$. Le minimum est atteint en $u^* = \frac{k}{M^2}$ avec $E_{min} = V\left(\frac{1}{u^*}\right) = -\frac{k^2}{2M^2}$. Nous supposerons donc par la suite que $E \in \left(-\frac{k^2}{2M^2}, 0\right)$.

Par la formule du cours, on doit donc calculer

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{M dr}{r^2\sqrt{2(E - V(r))}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{M dr}{r^2\sqrt{2(E + \frac{k}{r} - \frac{M^2}{2r^2})}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2E}{M^2} + \frac{2k}{rM^2} - \frac{1}{r^2}}}$$

avec r_1, r_2 les deux valeurs de r où la racine s'annule. Le changement de variable $x = -1/r$, $dx = \frac{1}{r^2}dr$ mène à

$$\Phi = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{M^2} - \frac{2k}{M^2}x - x^2}} \ .$$

avec $x_i = -\frac{1}{r_i}$. C'est l'intégrale du préparatif avec $\alpha = \frac{2E}{M^2}$ et $\beta = -\frac{2k}{M^2}$. Sur l'intervalle (x_1, x_2), l'argument de la racine est positif (c'est le cas par construction et parce qu'on a $E > E_{min}$). Il s'agit donc maintenant en principe de calculer r_1, r_2, puis x_1, x_2 et de remplacer dans (1). On peut le faire explicitement, mais la remarque suivant le préparatif permet d'éviter ce calcul. En effet, x_1 et x_2 sont par construction les points où la racine s'annule, et donc par la remarque on a simplement $\Phi = \pi$. On trouve donc qu'il y a un angle de π entre l'épicentre et l'apocentre, et donc un cycle épicentre-apocentre-épicentre représente un tour complet (2π), ce qui correspond bien à une orbite périodique.

Exercice 4 : Petites oscillations autour de l'orbite circulaire.

1. Si l'orbite oscille autour d'un cercle, c'est que dans le problème unidimensionnel, r oscille autour d'un minimum du potentiel effectif $V(r) = U(r) + \frac{M^2}{2r^2}$. L'orbite circulaire correspond au point d'équilibre du problème unidimensionnel, c'est à dire à $r \equiv r_0$ avec r_0 le point où V est minimal.
2. On a $V'(r_0) = 0$ (puisque V atteint un mimimum en r_0) et $V''(r_0) = U''(r_0) + 3\frac{M^2}{r_0^4}$. Pour $r \approx r_0$, on a donc au deuxième ordre

$$V(r) \approx V(r_0) + \frac{1}{2}V''(r_0)(r - r_0)^2 = V(r_0) + \frac{1}{2}\left(U''(r_0) + 3\frac{M^2}{r_0^4}\right)(r - r_0)^2 \ .$$

3. Soit maintenant $E = V(r_0) + \varepsilon$. Pour simplifier, notons $\kappa = V''(r_0)$. Dans notre approximation, nous devons calculer

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{M}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2(E - V(r))}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{M}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2(V(r_0) + \varepsilon - V(r_0) - \frac{\kappa}{2}(r - r_0)^2)}}$$
$$= \int_{r_1}^{r_2} \frac{M}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2\varepsilon - \kappa(r - r_0)^2}} = \frac{M}{\sqrt{\kappa}}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\kappa} - (r - r_0)^2}}$$

avec r_1, r_2 les deux points où la racine s'annule. On fait le changement de variable $r = r_0 + x$ et on trouve

$$\Phi = \frac{M}{\sqrt{\kappa}}\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{(r_0 + x)^2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\kappa} - x^2}}$$

avec x_1, x_2 les deux points où la racine s'annule. On a donc entre x_1 et x_2 que $x^2 \leq \frac{2\varepsilon}{\kappa}$, d'où $x = O(\sqrt{\varepsilon})$, et donc $\frac{1}{(r_0+x)^2} = \frac{1}{(r_0+O(\sqrt{\varepsilon}))^2} = \frac{1}{r_0^2+O(\sqrt{\varepsilon})} = \frac{1}{r_0^2} + O(\sqrt{\varepsilon})$. Ainsi

$$\Phi = \left(\frac{M}{r_0^2\sqrt{\kappa}} + O(\sqrt{\varepsilon})\right)\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\kappa} - x^2}} \ .$$

Par la remarque du préparatif, puisqu'à nouveau x_1 et x_2 sont les points limites, l'intégrale ci-dessus vaut π, et donc en négligeant le $O(\sqrt{\varepsilon})$ (en plus de l'approximation faite au départ sur V autour de r_0) on trouve

$$\Phi \approx \frac{M}{r_0^2\sqrt{\kappa}}\pi = \frac{\pi M}{r_0^2\sqrt{V''(r_0)}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{r_0^4 U''(r_0)}{M^2}+3}} .$$

Remarque : Pour arriver à la forme du Problème 2.8.D.2 du livre d'Arnold, il suffit d'observer que par minimalité de V en r_0, on a $V'(r_0) = U'(r_0) - \frac{M^2}{r_0^3} = 0$, d'où $r_0^3 = \frac{M^2}{U'(r_0)}$. Dès lors, on a $\sqrt{\frac{r_0^4 U''(r_0)}{M^2}+3} = \sqrt{\frac{r_0 r_0^3 U''(r_0)}{M^2}+3} = \sqrt{\frac{r_0 U''(r_0)}{U'(r_0)}+3} = \sqrt{\frac{r_0 U''(r_0)+3U'(r_0)}{U'(r_0)}}$ et donc $\Phi = \pi\sqrt{\frac{U'(r_0)}{r_0 U''(r_0)+3U'(r_0)}}$.

Exercice 5 : Déviation angulaire.

1. Nous avons que $\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = \pm\|\mathbf{r}_{perp}\|\cdot\|\dot{\mathbf{r}}\|$, où $\mathbf{r}_{perp}$ est la composante de $\mathbf{r}$ perpendiculaire à $\dot{\mathbf{r}}$. Pour l'orientation représentée sur la figure de l'énoncé, le signe $+$ est à choisir. Lorsque $t\to-\infty$ nous avons $\|\mathbf{r}_{perp}\|\to b$ et $\|\dot{\mathbf{r}}\|\to\|\mathbf{v}_0\|$, d'où

$$M = \|\mathbf{v}_0\| b .$$

2. Le potentiel effectif est

$$V(r) = -\frac{k}{r}+\frac{M^2}{2r^2}$$

et l'énergie $E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{k}{r} + \frac{M^2}{2r^2}$ est constante. En l'évaluant pour $t\to-\infty$, nous avons simplement $E = \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_0\|^2$. On trouve r_- par la condition $V(r_-) = E$. En résolvant une équation du second degré et en choisissant la solution positive, on trouve

$$r_- = \frac{-k+\sqrt{k^2+2EM^2}}{E} > 0 .$$

3. On calcule l'intégrale

$$\Phi = \int_{r_-}^{\infty}\frac{M\,dr}{r^2\sqrt{2(E-V(r))}} .$$

Une fois encore le changement de variable $x = -1/r$, $dx = \frac{1}{r^2}dr$ mène à

$$\Phi = \int_{x_1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{M^2} - \frac{2k}{M^2}x - x^2}}$$

avec $x_1 = -\frac{1}{r_-}$ qui à nouveau est tel que la racine s'annule. Il s'agit encore de l'intégrale du préparatif avec $\alpha = \frac{2E}{M^2}$ et $\beta = -\frac{2k}{M^2}$. On vérifie aisément que les conditions de positivité de l'argument de la racine sont vérifiées (c'est une conséquence du fait que $E>0$). La remarque du préparatif s'applique pour x_1 mais pas pour la borne $x_2 = 0$. On a donc dans la notation du préparatif que $t_1 = -\pi/2$ et

$$\Phi = t_2 - t_1 = t_2 + \frac{\pi}{2} = \arcsin\left(\frac{2x_2-\beta}{\sqrt{\beta^2+4\alpha}}\right)+\frac{\pi}{2} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{EM^2}{k^2}}}\right)+\frac{\pi}{2}$$

4. On voit sur la figure que $\alpha = 2(\Phi - \pi/2)$, d'où

$$\alpha = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{EM^2}{k^2}}}\right) = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\|\mathbf{v}_0\|^4 b^2}{k^2}}}\right).$$

   L'argument de l'arcsinus est toujours entre 0 et 1, et donc on a $\alpha \in (2\arcsin(0), 2\arcsin(1)) = (0,\pi)$ (avec les signes selon les conventions de la figure). Ainsi, le point matériel ne peut pas faire plus qu'un demi-tour. Ce n'est pas une surprise : avec $E > 0$, les trajectoires sont des branches d'hyperboles, et donc ne peuvent pas passer deux fois par le même point.

5. La quantité déterminante est $\delta = 2\frac{EM^2}{k^2} = \frac{\|\mathbf{v}_0\|^4 b^2}{k^2}$.
   - Lorsque $\delta \to \infty$, l'argument de l'arcsinus tend vers 0 et donc $\alpha \to 0$. C'est le cas par exemple si $k \to 0$ (potentiel très faible), si $\|\mathbf{v}_0\| \to \infty$ (le point matériel passe si rapidement qu'il est très peu dévié) ou si $b \to \infty$ (il passe si loin qu'il est peu dévié).
   - Lorsque $\delta \to 0$, l'argument de l'arcsinus tend vers 1 et donc $\alpha \to \pi$. C'est le cas si $k \to \infty$ (potentiel très fort), si $\|\mathbf{v}_0\| \to 0$ (le point matériel passe très lentement) ou si $b \to 0$ (il passe très près).

Remarque : En utilisant la formule $\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ on trouve alternativement l'expression

$$\alpha = 2 \operatorname{arccot}\left(\frac{\|\mathbf{v}_0\|^2 b}{k}\right) .$$

Rutherford a trouvé la même expression (à condition d'interpréter correctement le signe de b) dans le cas d'un potentiel électrostatique répulsif (donc de type $\frac{c}{r}$ avec $c > 0$). C'est une formule très importante historiquement. En mesurant la déviation angulaire de particules alpha envoyées sur une fine feuille d'or, il a pu établir que la matière est essentiellement composée de vide.