Mécanique II : Corrigé 6

Exercice 1 : Coordonnées cylindriques revisitées.

1. Avec l'expression pour l'énergie cinétique obtenue dans la Série 1, on a

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2\right) - U(r, \phi, z) \ .$$

2. Commençons par l'équation pour r. On a $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r}$, et $\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}$ d'où

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{m\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right) = -\frac{\partial U}{\partial r}} \ .$$

Pour ϕ, on a $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = mr^2\ddot{\phi} + 2mr\dot{r}\dot{\phi}$ et $\frac{\partial L}{\partial \phi} = -\frac{\partial U}{\partial \phi}$. Ainsi, en divisant par r (de sorte à retrouver une expression semblable à celle de la Série 1), on trouve

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{m\left(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi}} \ .$$

Finalement pour z on a $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = m\ddot{z}$, et $\frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z}$, et donc

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}} \ .$$

3. Si $r \equiv R$ on a un lagrangien $\tilde{L}$ fonction de $(\phi, z, \dot{\phi}, \dot{z})$ seulement :

$$\tilde{L} = \frac{m}{2}\left((R\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2\right) - \tilde{U}(\phi, z) \ .$$

avec $\tilde{U}(\phi, z) = U(R, \phi, z)$. L'équation d'Euler-Lagrange pour ϕ et z donne

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \phi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{mR\ddot{\phi} = -\frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \phi}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial z} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{m\ddot{z} = -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial z}} \ .$$

4. Si $r \equiv R$ et $z \equiv H$ le lagrangien $\hat{L}$ n'est plus qu'une fonction de $(\phi, \dot{\phi})$, et on trouve

$$\hat{L} = \frac{m}{2}(R\dot{\phi})^2 - \hat{U}(\phi)$$

avec $\hat{U}(\phi) = U(R, \phi, H)$. L'équation d'Euler-Lagrange pour ϕ est maintenant

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \phi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{mR\ddot{\phi} = -\frac{1}{R}\frac{\partial \hat{U}}{\partial \phi}} \ .$$

*Contact pour cette série : Noé Cuneo (noe.cuneo@unige.ch)

5. On retrouve donc de façon rapide et surtout automatique tous les résultats de l'Exercice 1 de la Série 1. En effet, dans la Série 1 on avait une force $\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\phi \mathbf{e}_\phi + F_z \mathbf{e}_z$. Ici, on a $\mathbf{F} = -\nabla U$, et en utilisant la formule pour le gradient en coordonnées cylindriques $\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{e}_z$ on identifie
$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \qquad F_\phi = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \phi} \quad \text{et} \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \ .$$
En remplaçant F_r, F_ϕ et F_z par les expressions ci-dessus dans les équations du mouvement de la Série 1, on retrouve bien les équations du mouvement obtenues ici à partir d'Euler-Lagrange. Bien sûr, la méthode lagrangienne ne fonctionne que si la force découle d'un potentiel.

Exercice 2 : Coordonnées sphériques revisitées.

1. Avec l'expression pour l'énergie cinétique obtenue dans la Série 1, on a
$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\phi}\sin\theta)^2 + (r\dot{\theta})^2\right) - U(r,\theta,\phi) \ .$$

2. Pour r, on a $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r}$, et $\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2\sin^2\theta + mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}$ d'où
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{m\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2\right) = -\frac{\partial U}{\partial r}} \ .$$
Pour θ, on a $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$ et $\frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta - \frac{\partial U}{\partial \theta}$. Ainsi, en divisant par r,
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}} \ .$$
Pour ϕ, on a $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta) = mr^2\ddot{\phi}\sin^2\theta + 2mr\dot{r}\dot{\phi}\sin^2\theta + 2mr^2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta$ et $\frac{\partial L}{\partial \phi} = -\frac{\partial U}{\partial \phi}$. Ainsi, en divisant par $r\sin\theta$ on trouve que
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{m\left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\right) = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}} \ .$$

3. Si $r \equiv R$ on a un lagrangien $\tilde{L}$ fonction de $(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ seulement :
$$\tilde{L} = \frac{m}{2}\left((R\dot{\phi}\sin\theta)^2 + (R\dot{\theta})^2\right) - \tilde{U}(\theta,\phi) \ .$$
avec $\tilde{U}(\theta,\phi) = U(R,\theta,\phi)$. L'équation d'Euler-Lagrange pour θ et ϕ donne
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{m\left(R\ddot{\theta} - R\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right) = -\frac{1}{R}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta}}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \phi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{m\left(R\ddot{\phi}\sin\theta + 2R\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\right) = -\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \phi}} \ .$$

4. On retrouve donc tous les résultats de l'Exercice 2 de la Série 1. En effet, dans la Série 1 on avait une force $\mathbf{F} = F_r\mathbf{e}_r + F_\theta\mathbf{e}_\theta + F_\phi\mathbf{e}_\phi$. Ici, on a $\mathbf{F} = -\nabla U$, et en utilisant la formule pour le

gradient en coordonnées sphériques $\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi$ on identifie

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \qquad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad F_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi} \ .$$

Avec les identifications ci-dessus, on retrouve bien les mêmes équations du mouvement avec les deux méthodes.

Remarque : Pour retrouver instantanément les équations du mouvement en coordonnées cylindriques, polaires ou sphériques, il suffit donc de connaître l'expression de l'énergie cinétique et la formule d'Euler-Lagrange.

Exercice 3 : Point matériel sur un rail revisité.

1. En utilisant l'expression $T = \frac{m}{2}\|\mathbf{f}'(s)\|^2\dot{s}^2$ de la Série 1, on trouve

$$L = T - U = \frac{m}{2}\|\mathbf{f}'(s)\|^2\dot{s}^2 - U(\mathbf{f}(s)) \ .$$

2. En se rappelant que $\frac{d}{ds}\|\mathbf{f}'(s)\|^2 = 2\langle \mathbf{f}'(s), \mathbf{f}''(s)\rangle$, on trouve

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \frac{d}{dt}\left(m\|\mathbf{f}'(s)\|^2\dot{s}\right) = m\|\mathbf{f}'(s)\|^2\ddot{s} + 2m\dot{s}^2 \ \langle \mathbf{f}'(s), \mathbf{f}''(s)\rangle$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial s} = m\dot{s}^2 \ \langle \mathbf{f}'(s), \mathbf{f}''(s)\rangle - \langle \nabla U, \mathbf{f}'(s)\rangle \ .$$

Ainsi l'équation d'Euler-Lagrange est

$$\boxed{m\left(\|\mathbf{f}'(s)\|^2\ddot{s} + \dot{s}^2 \ \langle \mathbf{f}'(s), \mathbf{f}''(s)\rangle\right) = \langle -\nabla U, \mathbf{f}'(s)\rangle} \ .$$

3. En omettant les arguments s, en divisant par $\|\mathbf{f}'\|$, et en posant $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|}$ on trouve

$$m\left(\|\mathbf{f}'\|\ddot{s} + \dot{s}^2 \ \langle \mathbf{u}, \mathbf{f}''\rangle\right) = \langle -\nabla U, \mathbf{u}\rangle$$

qui est précisément la forme trouvée la Série 1 avec $\mathbf{F} = -\nabla U$. Remarquer comme ce résultat s'obtient ici automatiquement, sans devoir considérer des projections, etc.

4. Si s est l'abscisse curviligne, on a simplement

$$L = \frac{m}{2}\dot{s}^2 - U(\mathbf{f}(s)) \ .$$

Ainsi immédiatement $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\ddot{s}$ et $\frac{\partial L}{\partial s} = -\langle \nabla U, \mathbf{f}'(s)\rangle$. L'équation d'Euler-Lagrange donne alors sans effort $m\ddot{s} = -\langle \nabla U, \mathbf{f}'(s)\rangle$, comme à la Série 1.

Exercice 4 :

1. L'unique contrainte est que $z_1 + z_2 = c$, où c est une constante qui dépend de la longueur de la corde et la géométrie du problème.
2. On a donc $z_2 = c - z_1$.

3. On a $\dot{z}_2 = -\dot{z}_1$, d'où on obtient l'énergie cinétique $\frac{m_1}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2}(-\dot{z}_1)^2 + \frac{m_3}{2}\dot{z}_3^2$. Le potentiel gravitationnel est $-g\,(m_1 z_1 + m_2(c - z_1) + m_3 z_3)$ [1] et puisque la longueur du ressort est $|z_3 - z_2| = |z_3 + z_1 - c|$, l'énergie du ressort est $\frac{k}{2}(z_3 + z_1 - c)^2$. Dès lors, le lagrangien $L(z_1, z_3, \dot{z}_1, \dot{z}_3)$ s'écrit [2]

$$L = T - U = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m_3}{2}\dot{z}_3^2 + g\,(m_1 z_1 + m_2(c - z_1) + m_3 z_3) - \frac{k}{2}(z_3 + z_1 - c)^2 \ .$$

4. Pour z_1, on a $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} = \frac{d}{dt}\left((m_1 + m_2)\dot{z}_1\right) = (m_1 + m_2)\ddot{z}_1$ et $\frac{\partial L}{\partial z_1} = g(m_1 - m_2) - k(z_3 + z_1 - c)$. Ainsi l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit

$$\boxed{(m_1 + m_2)\ddot{z}_1 = g(m_1 - m_2) - k(z_3 + z_1 - c)} \ .$$

Pour z_3, on a $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_3} = \frac{d}{dt}\left(m_3\dot{z}_3\right) = m\ddot{z}_3$ et $\frac{\partial L}{\partial z_3} = gm_3 - k(z_3 + z_1 - c)$ d'où l'équation du mouvement

$$\boxed{m\ddot{z}_3 = gm_3 - k(z_3 + z_1 - c)} \ .$$

Exercice 5 : On note dans cet exercice $h(t) = a + b\cos(\omega t)$.

1. Les coordonnées de m sont $(x, z) = (l\sin\theta, l\cos\theta)$.
2. On a donc $(\dot{x}, \dot{z}) = (l\dot{\theta}\cos\theta, -l\dot{\theta}\sin\theta)$, d'où $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2$ (que l'on connait aussi par la formule générale pour les coordonnées polaires). Le potentiel gravitationnel est $-mgl\cos\theta$ (à nouveau, à une constante additive près) et le potentiel du ressort est
$$\frac{k}{2}\left((l\sin\theta)^2 + (l\cos\theta - h(t))^2\right) = \frac{k}{2}\left(l^2 - 2lh(t)\cos\theta + h^2(t)\right)$$
Dès lors le lagrangien s'écrit
$$L = T - U = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta - \frac{k}{2}\left(l^2 - 2lh(t)\cos\theta + h^2(t)\right) \ .$$
Notez que le lagrangien $L = L(\theta, \dot{\theta}, t)$ dépend explicitement du temps.
3. On a $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) = ml^2\ddot{\theta}$ et $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta - klh(t)\sin\theta$, donc l'équation d'Euler-Lagrange est, après division par l,
$$\boxed{ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - kh(t)\sin\theta} \ .$$

Exercice 6 :

1. La masse m_1 est donc à la position $(u, 0)$, et la masse m_2 se trouve en $(u + l\sin\theta, l\cos\theta)$.
2. L'énergie potentielle est $-m_2 gl\cos\theta$ puisque m_1 est fixée à $z = 0$ (à nouveau, les constantes additives ne sont pas pertinentes). La vitesse de m_1 est $\mathbf{v}_1 = (\dot{u}, 0)$, et celle de m_2 est $\mathbf{v}_2 =$

1. Ceci correspond à choisir le zéro du potentiel gravitationnel à $z = 0$. D'autres choix sont possibles, et le potentiel alors obtenu ne diffère que d'une constante additive qui n'est pas pertinente pour les équations du mouvement (qui ne font intervenir que des dérivées de U).

2. NB : ici on pourrait négliger la constante additive $m_2 c$, et la constante additive c^2 qui apparaît si l'on développe le carré. Cependant, on ne peut *pas* négliger les autres termes faisant apparaître c, car ce ne sont pas des constantes *additives*.

$(\dot{u} + l\dot{\theta}\cos\theta, -l\dot{\theta}\sin\theta)$ d'où une énergie cinétique

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{m_1}{2}\mathbf{v}_1^2 + \frac{m_2}{2}\mathbf{v}_2^2 = \frac{m_1}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{u}^2 + 2\dot{u}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right) \\
&= \frac{m_1+m_2}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2}\left(2\dot{u}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\right) .
\end{aligned}
$$

On a donc le lagrangien

$$
L = T - U = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{u}^2 + \frac{m_2}{2}\left(2\dot{u}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\right) + m_2 gl\cos\theta .
$$

3. Pour u on a $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \frac{d}{dt}((m_1+m_2)\dot{u} + m_2 l\dot{\theta}\cos\theta) = (m_1+m_2)\ddot{u} + m_2 l\ddot{\theta}\cos\theta - m_2 l\dot{\theta}^2\sin\theta$ et $\frac{\partial L}{\partial u} = 0$, donc l'équation d'Euler-Lagrange est

$$
\boxed{(m_1+m_2)\ddot{u} + m_2 l\ddot{\theta}\cos\theta - m_2 l\dot{\theta}^2\sin\theta = 0} .
$$

Pour θ, on observe que $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}(m_2\dot{u}l\cos\theta + m_2 l^2\dot{\theta}) = m_2\ddot{u}l\cos\theta - m_2\dot{u}l\dot{\theta}\sin\theta + m_2 l^2\ddot{\theta}$ et que $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_2\dot{u}l\dot{\theta}\sin\theta - m_2 gl\sin\theta$. Ainsi on a l'équation du mouvement

$$
m_2\ddot{u}l\cos\theta - m_2\dot{u}l\dot{\theta}\sin\theta + m_2 l^2\ddot{\theta} = -m_2\dot{u}l\dot{\theta}\sin\theta - m_2 gl\sin\theta .
$$

Après simplification, on trouve donc

$$
\boxed{\ddot{u}\cos\theta + l\ddot{\theta} = -g\sin\theta} .
$$

Exercice 7 : On part des relations

$$
\bar{L}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, t) \equiv L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \qquad x_i = \varphi_i(\bar{\mathbf{x}}, t) \qquad \text{et} \qquad y_i = \sum_j \partial_j\varphi_i(\bar{\mathbf{x}}, t)\bar{y}_j + \partial_t\varphi_i(\bar{\mathbf{x}}, t)
$$

où l'on note $\partial_j\varphi_i$ pour $\frac{\partial\varphi_i}{\partial\bar{x}_j}$ (on omet dès maintenant les arguments $(\bar{\mathbf{x}}, t)$ de φ). On a

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_\ell} &= \partial_\ell\varphi_i & \qquad \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_\ell} &= 0 \\
\frac{\partial y_i}{\partial \bar{x}_\ell} &= \sum_j \partial_{j\ell}\varphi_i\bar{y}_j + \partial_{t\ell}\varphi_i & \qquad \frac{\partial y_i}{\partial \bar{y}_\ell} &= \partial_\ell\varphi_i
\end{aligned}
$$

en notant $\partial_{j\ell}\varphi_i = \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\bar{x}_j\partial\bar{x}_\ell}$ et $\partial_{t\ell}\varphi_i = \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t\partial\bar{x}_\ell}$. Dès lors,

$$
\frac{\partial\bar{L}}{\partial\bar{x}_\ell} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial\bar{x}_\ell} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial\bar{x}_\ell} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\partial_\ell\varphi_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i}\left(\sum_j \partial_{j\ell}\varphi_i\bar{y}_j + \partial_{t\ell}\varphi_i\right)
$$

qui en notation habituelle ($x_i \rightsquigarrow q_i$, $y_i \rightsquigarrow \dot{q}_i$, $\bar{x}_i \rightsquigarrow \bar{q}_i$, $\bar{y}_i \rightsquigarrow \dot{\bar{q}}_i$) s'écrit

$$
\frac{\partial\bar{L}}{\partial\bar{q}_\ell} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\partial_\ell\varphi_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\left(\sum_j \partial_{j\ell}\varphi_i\dot{\bar{q}}_j + \partial_{t\ell}\varphi_i\right) . \tag{1}
$$

De même, on a

$$
\frac{\partial\bar{L}}{\partial\bar{y}_\ell} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial\bar{y}_\ell} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial\bar{y}_\ell} = 0 + \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i}\partial_\ell\varphi_i
$$

ce qui en notation habituelle s'écrit

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_\ell} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \partial_\ell \varphi_i \ .$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_\ell} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\partial_\ell \varphi_i\right) = \sum_i \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\partial_\ell \varphi_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\partial_\ell \varphi_i \\
&= \sum_i \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\partial_\ell \varphi_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left[\sum_j \partial_{\ell j}\varphi_i \dot{\bar{q}}_j + \partial_{\ell t}\varphi_i\right] \ .
\end{aligned} \tag{2}$$

Ainsi, par (1) et (2), on obtient que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_\ell} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_\ell} = \sum_i \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]\partial_\ell \varphi_i = 0$$

puisque le crochet est nul par hypothèse. C'est bien le résultat annoncé.