Mécanique II : Corrigé 7

1 Equivalence des équations de Lagrange et de Hamilton

Démontrer que les équations de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0\,,$$

sont équivalentes aux équations de Hamilton,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}\,, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}\,,$$

avec l'hamiltonien H défini par

$$H = p\dot{q} - L\,.$$

Par définition l'impulsion généralisée est donnée par

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,,$$

donc il est possible d'exprimer $\dot{q}$ en fonction de p et q, $\dot{q} = \varphi(q,p,t)$. Alors $H(p,q,t) = p\varphi(q,p,t) - L(q,\varphi(q,p,t),t)$ si bien que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p} &= \varphi(q,p,t) + p\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \varphi}{\partial p} = \dot{q}\,,\\
\frac{\partial H}{\partial q} &= p\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \varphi}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent les équations de Lagrange et de Hamilton sont équivalentes.

2 Hamiltoniens divers

1. Le lagrangien d'un point matériel de masse m dans un potentiel U en coordonnées cylindriques est

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \left(r\dot{\phi}\right)^2 + \dot{z}^2\right) - U(r,\phi,z)\,.$$

Ecrire l'hamiltonien et déterminer les équations de Hamilton.

Les impulsions généralisées sont

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\,, \qquad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}\,, \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}\,.$$

Par conséquent, l'hamiltonien est donné par

$$\begin{aligned}
H &= p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} + p_z\dot{z} - L\\
&= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\phi^2}{mr^2} + \frac{p_z^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_\phi}{mr}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{m}\right)^2\right) + U(r,\phi,z)\\
&= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \left(\frac{p_\phi}{r}\right)^2 + p_z^2\right) + U(r,\phi,z)\,,
\end{aligned}$$

*Contact pour cette série : Julien Guillod (julien.guillod@unige.ch) et les équations de Hamilton sont

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}\,, \qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{\partial U}{\partial r}\,,$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}\,, \qquad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial U}{\partial \phi}\,,$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}\,, \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z}\,.$$

2. Le lagrangien d'un point matériel de masse m dans un potentiel U en coordonnées sphériques est

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \left(r\sin\theta\dot{\phi}\right)^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right) - U(r,\theta,\phi)\,.$$

Ecrire l'hamiltonien et déterminer les équations de Hamilton.

Les impulsions généralisées sont

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\,, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}\,, \qquad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}\,.$$

Par conséquent, l'hamiltonien est donné par

$$\begin{aligned} H &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - L \\ &= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{p_z^2}{mr^2\sin^2\theta} - \frac{m}{2}\left(\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_\theta}{mr}\right)^2 + \left(\frac{p_\phi}{mr\sin\theta}\right)^2\right) + U(r,\theta,\phi) \\ &= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \left(\frac{p_\theta}{r}\right)^2 + \left(\frac{p_\phi}{r\sin\theta}\right)^2\right) + U(r,\theta,\phi)\,, \end{aligned}$$

et les équations de Hamilton sont

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}\,, \qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{mr}\left(\left(\frac{p_\theta}{r}\right)^2 + \left(\frac{p_\phi}{r\sin\theta}\right)^2\right) - \frac{\partial U}{\partial r}\,,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}\,, \qquad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{1}{m\tan\theta}\left(\frac{p_\phi}{r\sin\theta}\right)^2 - \frac{\partial U}{\partial \theta}\,,$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}\,, \qquad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial U}{\partial \phi}\,.$$

3. Le lagrangien de l'exercice 5 de la Série 6 est

$$L = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta - \frac{k}{2}\left(l^2 - 2lh(t)\cos\theta + h^2(t)\right) \quad \text{avec} \quad h(t) = a + b\cos(\omega t)\,.$$

Ecrire l'hamiltonien et déterminer les équations de Hamilton.

L'impulsion généralisée est

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}\,,$$

si bien que l'hamiltonien est donné par

$$H = p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{p_\theta^2}{ml^2} - L = \frac{1}{2m}\frac{p_\theta^2}{l^2} - mgl\cos\theta + \frac{k}{2}\left(l^2 - 2lh(t)\cos\theta + h^2(t)\right)\,.$$

Les équations de Hamilton sont

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}\,, \qquad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta - klh(t)\sin\theta\,.$$

4. Le lagrangien de l'exercice 6 de la Série 6 est

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{u}^2 + m_2 l\dot{u}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\theta}^2 + m_2 gl\cos\theta\,.$$

Ecrire l'hamiltonien correspondant à ce système.

Les impulsions généralisées sont

$$p_u = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = (m_1 + m_2)\,\dot{u} + m_2 l\dot{\theta}\cos\theta\,, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2 l^2\dot{\theta} + m_2 l\dot{u}\cos\theta\,,$$

et en résolvant pour $\dot{u}$ et $\dot{\theta}$,

$$\dot{u} = \frac{lp_u - \cos\theta\, p_\theta}{l\left(m_1 + m_2 - m_2\cos^2\theta\right)}\,, \qquad \dot{\theta} = \frac{\left(m_1 + m_2\right)p_\theta - m_2 l\cos\theta\, p_u}{m_2 l^2\left(m_1 + m_2 - m_2\cos^2\theta\right)}\,.$$

Comme l'énergie cinétique est une forme quadratique, alors

$$\begin{aligned}
H = p_u\dot{u} + p_\theta\dot{\theta} - L &= \frac{m_1+m_2}{2}\dot{u}^2 + m_2 l\dot{u}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\theta}^2 - m_2 gl\cos\theta \\
&= \frac{1}{l^2\left(m_1+m_2-m_2\cos^2\theta\right)^2}\left[\frac{m_1+m_2}{2}\left(lp_u - \cos\theta\, p_\theta\right)^2 + \right. \\
&\qquad + \left(lp_u - \cos\theta\, p_\theta\right)\left(\left(m_1+m_2\right)p_\theta - m_2 l\cos\theta\, p_u\right)\cos\theta \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2m_2}\left(\left(m_1+m_2\right)p_\theta - m_2 l\cos\theta\, p_u\right)^2 - m_2 gl\cos\theta\right] \\
&= \frac{1}{l^2\left(m_1+m_2-m_2\cos^2\theta\right)^2}\left[\left(\frac{m_1+m_2}{2}l^2 - \frac{m_2 l^2}{2}\cos^2\theta\right)p_u^2\right. \\
&\qquad + \left(m_2 l\cos^3\theta - \left(m_1+m_2\right)l\cos\theta\right)p_u p_\theta \\
&\qquad \left. + \left(\frac{\left(m_1+m_2\right)^2}{2m_2} - \frac{m_1+m_2}{2}\cos^2\theta\right)p_\theta^2 - m_2 gl\cos\theta\right] \\
&= \frac{m_2 l^2 p_u^2 - 2m_2 l\cos\theta p_u p_\theta + \left(m_1+m_2\right)p_\theta^2}{2m_2 l^2\left(m_1+m_2-m_2\cos^2\theta\right)} - m_2 gl\cos\theta\,.
\end{aligned}$$

3 Théorème du retour pour le pendule

Considérer un pendule de masse $m = 1$ et de longueur $l = 1$ soumis à la gravité en supposant que $g = 1$.

1. Ecrire le lagrangien du système en prenant comme coordonnée généralisée l'angle $x \in [-\pi, \pi)$ qui est zéro lorsque le pendule est en bas.

   L'énergie cinétique est $T = \frac{1}{2}\dot{x}^2$ et l'énergie potentielle $V = -\cos x$, si bien que le lagrangien est
   $$L = T - V = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \cos x\,.$$

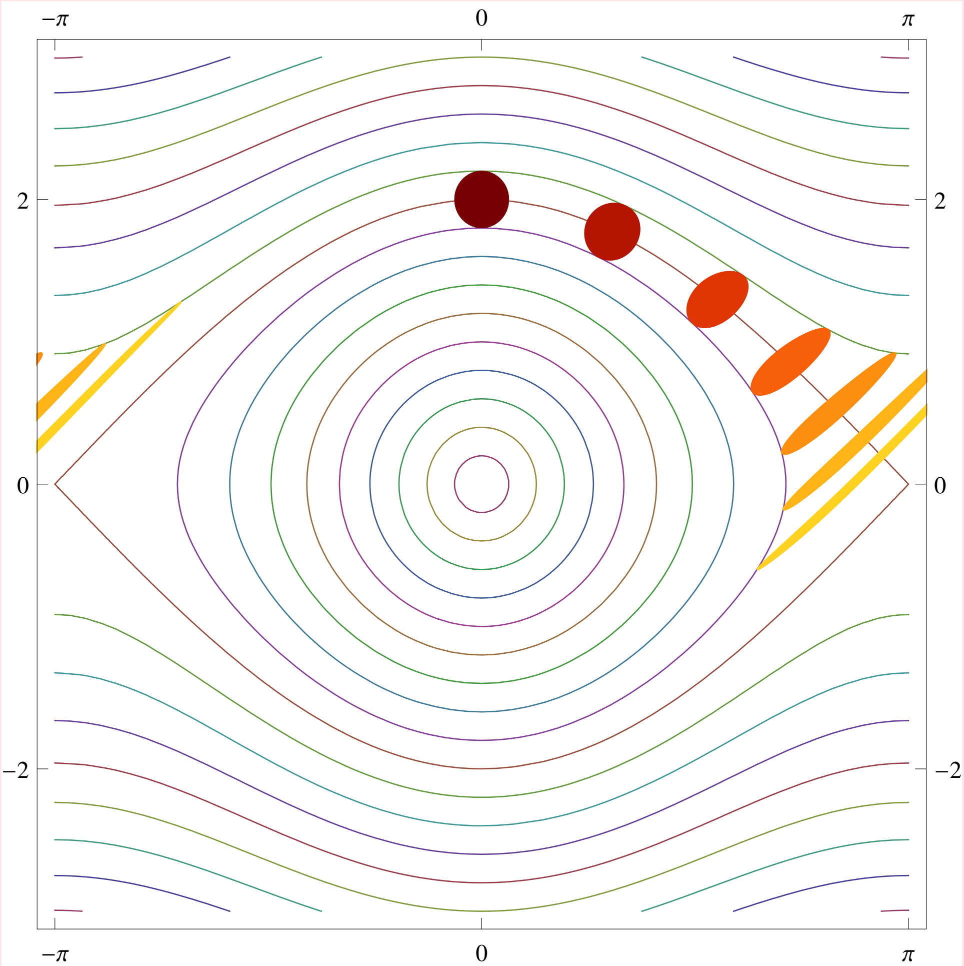
2. Déterminer l'hamiltonien du système et les équations de Hamilton.

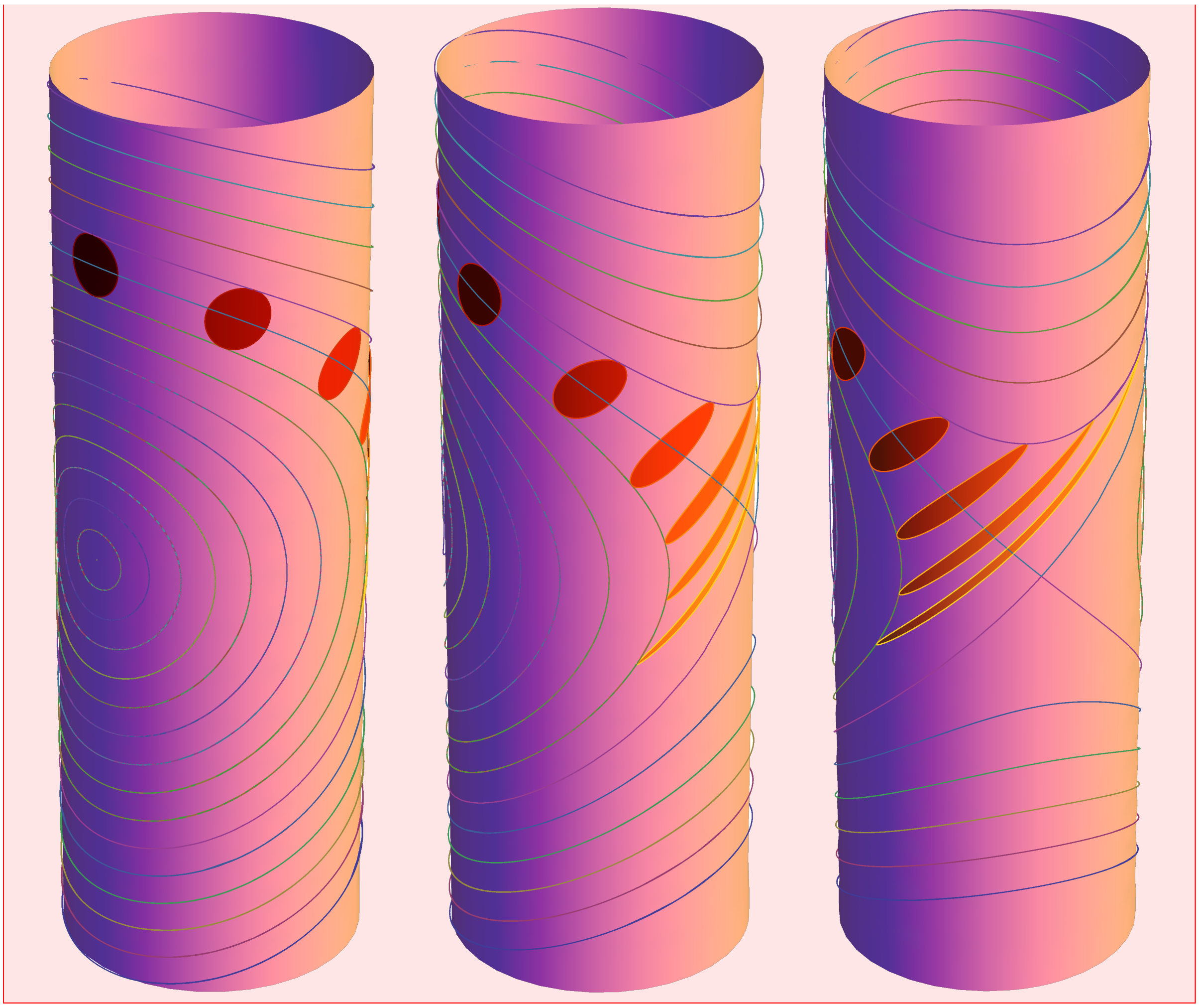
   L'impulsion est $p = \dot{x}$ et donc l'hamiltonien est
   $$H = T + V = \frac{1}{2}p^2 - \cos x\,,$$
   si bien que les équations de Hamilton sont
   $$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p\,, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\sin x\,.$$

3. Décrire graphiquement le flot hamiltonien et expliquer l'évolution temporelle de la boule $B(0) = \{(r\cos\varphi, 2 + r\sin\varphi)\,,\ -\pi \leq \varphi \leq \pi\}$ pour $r > 0$ petit, en relation avec le théorème du retour de Poincaré.

   L'énergie étant conservée, les orbites sont déterminées par $H(x,p) = E$ pour $E > 0$, comme représentées sur la figure suivante, avec le flot allant de gauche à droite dans la partie supérieur et inversement dans la partie inférieure. Dans ce graphique, il faut bien comprendre que les lignes $x = \pi$ et $x = -\pi$ sont identifiée, puisque l'espace de phase est le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$. Voir le graphique suivant pour le représentation des orbites sur le cylindre. Le point $(0,0)$ est un point fixe stable et correspond au pendule arrêté en bas, et le point $(\pm\pi, 0)$ est un point fixe instable correspondant au pendule arrêté en haut.

En partant avec la condition initiale $(0, 2)$, le pendule va arriver sur le point fixe instable ; l'impulsion est exactement choisie pour que le pendule s'arrête en haut. En donnant plus d'impulsion au départ, le pendule va faire des tours complets, et en donnant moins il va osciller. Par conséquent les points situés à l'intérieur de la boule $B(0)$ et sur le ligne médiane vont tous aller vers le point fixe instable, et donc ne vont jamais retourner dans $B(0)$. Mais pour même si la taille de la boule est arbitrairement petite, il existe un point qui revient dans la boule. Les graphiques suivants montre l'évolution de la boule $B(0)$ au temps $t = 0, 1, \ldots, 7$, respectivement dans l'espace $[-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ et sur le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$.





4 Rotations sur le cercle

L'application $g : S^1 \to S^1$ qui effectue une rotation d'angle α sur le cercle S^1 est donnée par $gx = g(x+\alpha)$.

1. Vérifier que les hypothèses du théorème du retour de Poincaré sont vérifiées et montrer que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in S^1,\ \exists n > 0,\ |g^n x - x] < \varepsilon\,.$$
Comme tous les points du cercle sont équivalents, le résultat précédent cela implique que
$$\forall x \in S^1,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n > 0,\ |g^n x - x] < \varepsilon\,.$$

Le cercle est un ensemble borné et $g(S^1) = S^1$, donc les hypothèses du théorème du retour de Poincaré sont réunies. Alors par le théorème du retour de Poincaré, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ et $n > 0$ tels que $|g^n x - x| < \varepsilon$.

2. Si $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$, montrer que l'orbite $\{g^n x,\ n \geq 0\}$ est dense sur le cercle S^1.
Indication : commencer par montrer que si $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$, alors pour tout $n > 0$, $g^n x \neq x$.

Par contraposée, s'il existe $n > 0$ avec $g^n x = x$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ avec
$$x + \alpha n = x + 2\pi k\,.$$
Alors $\alpha n = 2\pi k$ et donc $n = 2\pi k/n \in 2\pi\mathbb{Q}$. Par le résultat du point précédent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n > 0$ tel que $|\theta| < \varepsilon$, avec $\theta = g^n x - x$. Si $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$, alors $g^n x \neq x$ et donc $|\theta| > 0$, c'est-à-dire g^n est une rotation d'angle θ avec $0 < |\theta| < \varepsilon$. Alors $\left\{g^{nk}x,\ k \geq 0\right\}$ correspond à des points de S^1 distants d'au plus ε, et comme ε peut-être choisi arbitrairement petit, alors $\{g^n x,\ n \geq 0\}$ est dense dans S^1.

5 Flot sur le tore

Considérer le système d'équations différentielles sur le tore $S^1 \times S^1$ donné par

$$\dot{\phi}_1 = \alpha_1 \,, \qquad \dot{\phi}_2 = \alpha_2 \,.$$

Alors le flot de ce système est

$$\begin{aligned} g^t : S^1 \times S^1 &\to S^1 \times S^1 \\ (\phi_1, \phi_2) &\mapsto (\phi_1 + \alpha_1 t, \phi_2 + \alpha_2 t) \;. \end{aligned}$$

Démontrer que si $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$, alors n'importe quelle orbite $\left\{g^t\left(\phi_1, \phi_2\right), \, t \geq 0\right\}$ est dense sur le tore.

Indication : utiliser le théorème du retour de Poincaré directement ou le résultat de l'exercice précédent.

S'il existe $t > 0$ tel que $g^t\left(\phi_1, \phi_2\right) = (\phi_1, \phi_2)$, alors il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\phi_1 + \alpha_1 t = \phi_1 + 2\pi k_1 \,, \qquad \phi_2 + \alpha_2 t = \phi_2 + 2\pi k_2 \,,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Q} \,.$$

Comme le champs de vecteur (α_1, α_2) est sans divergence, alors pour le théorème de Liouville g^t préserve le volume et comme $S^1 \times S^1$ est borné, alors le théorème du retour de Poincaré est applicable. Par le théorème du retour de Poincaré, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t > 0$ tel que $|\theta_1| + |\theta_2| < \varepsilon$, avec

$$(\theta_1, \theta_2) = g^t\left(\phi_1, \phi_2\right) - (\phi_1, \phi_2) \;.$$

Si $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$, alors $g^t\left(\phi_1, \phi_2\right) \neq (\phi_1, \phi_2)$ et donc $|\theta_1| + |\theta_2| > 0$. Ainsi g^t correspond a une rotation d'angle θ_1 sur la première variable et θ_2 sur la seconde, avec $0 < |\theta_1| < \varepsilon$ et $0 < |\theta_1| < \varepsilon$. Par conséquent, l'ensemble $\left\{g^{tn}\left(\phi_1, \phi_2\right), \, n \geq 0\right\}$ correspond à des points espacés d'au plus ε, et comme ε est arbitrairement petit, alors l'orbite $\left\{g^t\left(\phi_1, \phi_2\right), \, t \geq 0\right\}$ est dense dans $S^1 \times S^1$.

6 Exercice facultatif mais très joli

Considérer le premier chiffre des nombres 2^n : $1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, \ldots$ Est-ce-que la suite renferme le chiffre 7 ? Lequel des chiffres 7 et 8 apparaît le plus souvent ? Avec quelle probabilité ?

Indication : (1) considérer le flot défini par

$$\begin{aligned} g : [0, 1) &\to [0, 1) \\ x &\mapsto x + \log 2 \mod 1 \,, \end{aligned}$$

où log désigne le logarithme en base dix, (2) montrer que 2^n commence par le chiffre k si et seulement si

$$\log k \leq g^n 0 < \log\left(k+1\right) \,,$$

(3) utiliser le théorème du retour de Poincaré et le fait que $\log 2$ est irrationnel.

En étant quelque peu assidu en calcul mental, on montre que le plus petit n tel que 2^n commence par 7 est

$$2^{46} = 70368744177664 \,.$$

Le nombre 2^n commence par le chiffre $k \in \{1, \ldots, 9\}$ s'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$10^d k \leq 2^n < 10^d\left(k+1\right) \;.$$

En prenant le logarithme en base dix,

$$\log k \leq n \log 2 - d < \log\left(k+1\right) \;.$$

Comme $\log k \in [0, 1)$, alors d est la partie entière de $n \log 2$, c'est-à-dire $n \log 2 - d = n \log 2 \mod 1 =$

$g^n 0$. Par conséquent le nombre 2^n commence par le chiffre k si et seulement si

$$\log k \leq g^n 0 < \log(k+1) \ .$$

Par l'exercice 5, comme $\log 2 \notin \mathbb{Q}$, alors $\{g^n 0,\ n \geq 0\}$ est dense dans $[0,1)$. L'application g étant invariante par translation, il est possible de montrer mathématiquement que l'orbite $\{g^n 0,\ n \geq 0\}$ est dense de manière uniforme. Ainsi le nombre 2^n commence par le chiffre k avec une probabilité

$$P(k) = \log(k+1) - \log k = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \ .$$

Ainsi le rapport de la probabilité de commencer par un 7 sur celle de commencer par un huit est

$$\frac{P(7)}{P(8)} = \frac{\log(1+1/7)}{\log(1+1/8)} \approx 1.13\,,$$

si bien qu'il y a 1.13 plus de 7 que de 8 comme premier chiffre dans les puissances de deux.