Mécanique II : Corrigé 9

1 Surface de révolution

Considérer une particule de masse $m = 1$ soumise à aucune force externe et confinée sur une surface de révolution selon l'axe vertical,

$$S = \{(r(z)\cos\phi, r(z)\sin\phi, z)\,,\ \phi \in [-\pi, \pi]\,,\ z \in \mathbb{R}\}\ ,$$

avec r une certaine fonction lisse.

1. Faire un schéma de l'allure de la surface S.
2. Déterminer lagrangien du système.

   Comme l'énergie potentielle est nulle, le lagrangien est l'énergie cinétique,

   $$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left(\Big(r(z)\sin\phi\dot\phi - r'(z)\cos\phi\dot z\Big)^2 + \Big(r(z)\cos\phi\dot\phi + r'(z)\sin\phi\dot z\Big)^2 + \dot z^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(1 + r'(z)^2\right)\dot z^2 + r(z)^2\dot\phi^2\right)\ . \end{aligned}$$

3. Déterminer les variables cycliques du système et en déduire que le système est complètement intégrable.

   Le lagrangien ne dépendant pas de ϕ, il s'agit d'une variable cyclique et donc

   $$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = r(z)^2\dot\phi$$

   est une quantité conservée.

4. Montrer que la conservation de p_ϕ peut être écrite comme $r(z)v\sin\alpha =$ constante, où v est la norme de la vitesse de la particule et α l'angle entre la trajectoire et le méridien

   $$\{(r(z)\cos\phi, r(z)\sin\phi, z)\,,\ z \in \mathbb{R}\}\ .$$

   La vitesse selon ϕ est $v_\phi = v\sin\alpha$, où v est la norme de la vitesse et α l'angle entre la trajectoire et le méridien passant par le point en considération. D'autre part la vitesse selon ϕ est $v_\phi = r(z)\dot\phi$. Par conséquent, la conservation de p_ϕ peut s'écrire comme,

   $$r(z)v\sin\alpha = r(z)^2\dot\phi = p_\phi = \text{constante}\,.$$

5. Déduire de la conservation de l'énergie le théorème de Clairaut :

   $$r(z)\sin\alpha = \text{constante}\,,$$

   et l'interpréter.

   Le lagrangien ne dépendant pas explicitement du temps, l'énergie est conservée, c'est-à-dire $L =$ constante puisqu'il n'y a pas de potentiel. Comme $L = \frac{1}{2}v^2$, alors la norme de la vitesse est conservée et donc

   $$r(z)\sin\alpha = \frac{p_\phi}{v} = \text{constante}\,.$$

   Ainsi une particule ayant la constante $r_0 = r(z)\sin\alpha$, ne peut jamais se trouver dans une région où $r < r_0$.

[*]Contact pour cette série : Julien Guillod (julien.guillod@unige.ch)

2 Système intégrable

Considérer le système décrit dans l'exercice précédent.

1. En utilisant la conservation de p_ϕ et de l'énergie intégrer le système.

Les quantités

$$p_\phi = r(z)^2\dot\phi\,, \qquad 2L = \left(1 + r'(z)^2\right)\dot z^2 + r(z)^2\dot\phi^2\,,$$

sont conservées, donc

$$v^2 = \left(1 + r'(z)^2\right)\dot z^2 + \frac{p_\phi^2}{r(z)^2}\,,$$

En résolvant pour $\dot z$,

$$\dot z = \sqrt{\frac{v^2 - p_\phi^2/r(z)^2}{1 + r'(z)^2}} \equiv F(z)\,,$$

et donc en intégrant

$$t(z) = \int_{z(0)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{F(s)}\,.$$

De la relation $p_\phi = r(z)^2\dot\phi$, on en déduit

$$\phi(t) = \phi(0) + p_\phi \int_0^t \frac{1}{r(z(t))^2}\mathrm{d}t\,,$$

ou avec un changeant de variable,

$$\phi(z) = \phi(z(0)) + p_\phi \int_{z(0)}^{z} \frac{1}{r(s)^2}\frac{\mathrm{d}s}{F(s)}\,.$$

2. Intégrer le système explicitement pour un cône, $r(z) = z$.

Pour un cône avec $r(z) = z$, alors

$$F(z) = \sqrt{\frac{v^2 - p_\phi^2/z^2}{2}} = \frac{v}{\sqrt2}\sqrt{1 - c^2/z^2}\,, \qquad c = \frac{p_\phi}{v}\,.$$

En intégrant,

$$t(z) = \int_{z(0)}^{z} \frac{\mathrm{d}s}{F(s)} = \frac{\sqrt2}{v}\int_{z(0)}^{z}\frac{s\mathrm{d}s}{\sqrt{s^2 - c^2}} = \frac{\sqrt2}{v}\left(\sqrt{z^2 - c^2} - \sqrt{z(0)^2 - c^2}\right)\,,$$

puis en inversant, la fonction z est

$$z(t) = \sqrt{c^2 + \left(\frac{v}{\sqrt2}t + \sqrt{z(0)^2 - c^2}\right)^2}\,.$$

En intégrant à nouveau, l'angle ϕ est donné par

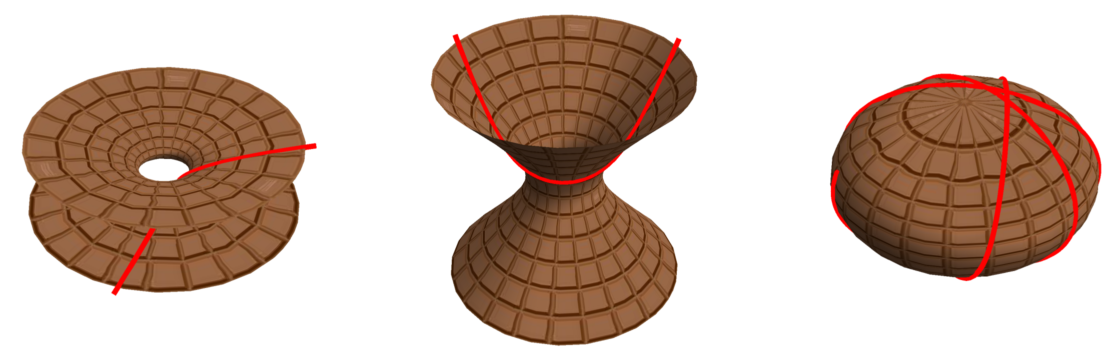
$$\begin{aligned}
\phi(t) - \phi(0) &= p_\phi \int_0^t \frac{1}{r(z(t))^2}\mathrm{d}t = p_\phi \int_0^t \frac{1}{c^2 + \left(\frac{v}{\sqrt2}t + \sqrt{z(0)^2 - c^2}\right)^2}\mathrm{d}t \\
&= \sqrt2\arctan\left(\frac{v}{\sqrt2 c}t + \sqrt{z(0)^2/c^2 - 1}\right) - \sqrt2\arctan\left(\sqrt{z(0)^2/c^2 - 1}\right)\,.
\end{aligned}$$

3. Résoudre le problème numériquement pour d'autres surfaces (paraboloïde, hyperboloïde, ellipsoïde,...).

La fonction Mathematica suivante prend comme argument la fonction r, la hauteur de la condition initiale $z(0)$, la vitesse initiale v et l'angle initial α et retourne la représentation de la trajectoire,

```
geodesic[r_Function, z0_?NumericQ, v_?NumericQ, α_?NumericQ] :=
 Module[{H, eqn, bnd, sol},
  (* Hamiltonien du système *)
  H = 1/2 (pϕ[t]^2/r[z[t]]^2 + pz[t]^2/(1 + r'[z[t]]^2));
  (* Equations de Hamilton *)
  eqn = {ϕ'[t] == D[H, pϕ[t]], z'[t] == D[H, pz[t]],
    pϕ'[t] == -D[H, ϕ[t]], pz'[t] == -D[H, z[t]]};
  (* Conditions initiales *)
  bnd =
   {z[0] == z0, pz[0] == Sqrt[v^2 r[z0]^2 - v^2 r[z0]^2 Sin[α]^2] Sqrt[1 + r'[z0]^2]/r[z0],
    ϕ[0] == 0, pϕ[0] == r[z0] v Sin[α]};
  (* Résolution numérique des équations *)
  sol = NDSolve[{eqn, bnd}, {ϕ, z, pϕ, pz}, {t, -20, 20},
     MaxSteps → Infinity] // Quiet;
  (* Représentation graphique du la solution *)
  Show[ParametricPlot3D[{r[z] Cos[p], r[z] Sin[p], z},
    {p, 0, 2 Pi}, {z, -3, 3}, Boxed → False, Mesh → None,
    Axes → False],
   ParametricPlot3D[
    Evaluate[{r[z[t]] Cos[ϕ[t]], r[z[t]] Sin[ϕ[t]], z[t]} /. sol],
    {t, sol[[1, 1, 2, 1, 1, 1]], sol[[1, 1, 2, 1, 1, 2]]},
    PlotStyle → {Red, Thick}]]
 ]
```

Des trajectoires sur la paraboloïde $r(z) = 2 + z^2$, sur l'hyperboloïde $r(z) = \sqrt{1 + z^2}$ et sur l'ellipsoïde $r(z) = \sqrt{6 - 3z^2}$ sont représentées sur la figure suivante,



3 Système non-autonome

Considérer une particule de masse $m = 1$ soumise à la gravité et confinée sur un cercle de rayon r en rotation autour de son diamètre avec vitesse angulaire ω,

$$S(t) = \{(r\sin\phi\cos\omega t, r\sin\phi\sin\omega t, r\cos\phi)\,,\ \phi \in [0, 2\pi]\}\ .$$

1. Déterminer l'énergie potentielle U et l'énergie cinétique T puis déduire le lagrangien L.

L'énergie potentielle est

$$U = gr\cos\phi\,,$$

et l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} T &= \frac{r^2}{2}\left(\left(\omega\sin\phi\sin\omega t - \cos\phi\cos\omega t\,\dot\phi\right)^2 + \left(\omega\sin\phi\cos\omega t + \cos\phi\sin\omega t\,\dot\phi\right)^2 + \left(\sin\phi\,\dot\phi\right)^2\right) \\ &= \frac{r^2}{2}\left(\omega^2\sin^2\phi + \dot\phi^2\right)\,, \end{aligned}$$

si bien que le lagrangien est

$$L = T - V = \frac{r^2}{2}\left(\omega^2\sin^2\phi + \dot\phi^2\right) - gr\cos\phi\,.$$

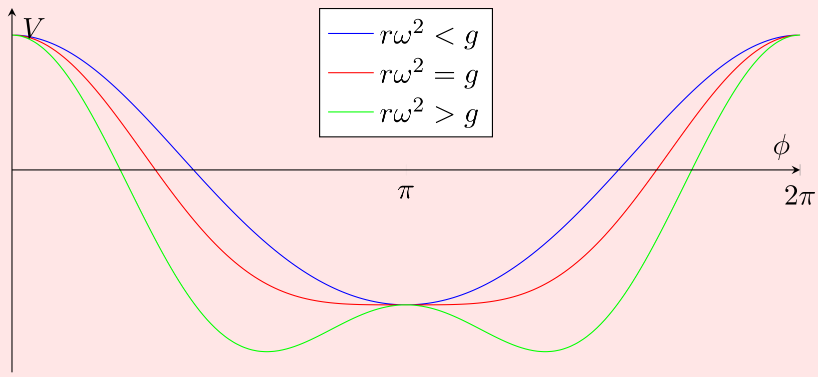
2. Déterminer le potentiel effectif V tel que $L = \frac{r^2}{2}\dot\phi^2 - V(\phi)$.

Le lagrangien peut être réecrit comme celui d'une particule libre dans un potentiel V, dit effectif,

$$L = \frac{r^2}{2}\dot\phi^2 - V(\phi)\,, \qquad V(\phi) = gr\cos\phi - \frac{r^2\omega^2}{2}\sin^2\phi\,.$$

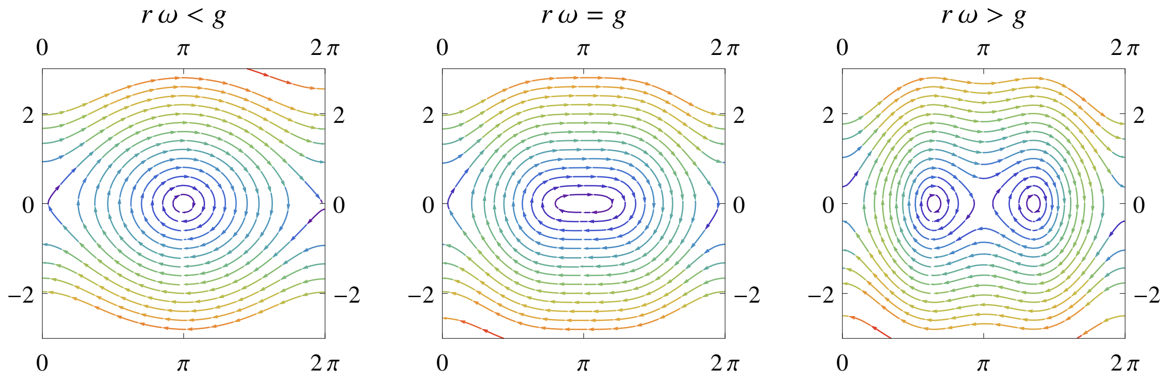
3. Dessiner le potentiel effectif V lorsque la vitesse de rotation ω est lente ou rapide.

Le potentiel effectif à une transition de phase lorsque $r\omega^2 = g$. Pour une vitesse de rotation faible, il y a un seul point fixe, qui se dédouble lorsque la vitesse augmente.



4. Représenter le flot dans l'espace de phase et interpréter la situation.

Le flot dans l'espace de phase est aussi caractérisé par la grandeur critique $r\omega^2 = g$. Lorsque $r\omega^2 > g$, le flot possède deux points fixes symétriques par rapport à $\phi = \pi$.


$r\,\omega < g$
$r\,\omega = g$
$r\,\omega > g$
0
π
$2\,\pi$
2
0
−2