Mécanique II : Corrigé 12

Exercice 1 :

1. La masse M est à la position $(s, 0)$, et la masse m se trouve en $(s + r\sin\theta, r\cos\theta)$ dans le plan Oxz. L'énergie potentielle est $-mgr\cos\theta$ (on ignore la contribution de la masse M qui est une simple constante additive) et l'énergie du ressort est $\cosh(r)$. La vitesse de M est $(\dot{s}, 0)$, et celle de m est $(\dot{s} + r\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}\sin\theta, \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)$ d'où une énergie cinétique
$$T = \frac{M+m}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\left(2\dot{s}\dot{r}\sin\theta + 2\dot{s}r\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) .$$
On a donc le lagrangien
$$L = T - V = \frac{M+m}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\left(2\dot{s}\dot{r}\sin\theta + 2\dot{s}r\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mgr\cos\theta - \cosh(r) .$$

2. Les points d'équilibre correspondent aux extrema du potentiel $V(r,\theta) = \cosh(r) - mgr\cos\theta$. Le potentiel ne dépendant pas de s, on s'attend à avoir des extrema dégénérés. On cherche donc θ et r de sorte que
$$\partial_r V = \sinh r - mg\cos\theta = 0 \quad \text{et} \quad \partial_\theta V = mgr\sin\theta = 0 .$$
On doit distinguer des cas. Une possibilité est de procéder ainsi :
— Si $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ on a $\cos\theta = 0$, donc la première équation nous donne $r = 0$ et on constate que la deuxième condition est vérifiée. Cependant, il s'agit d'une solution "parasite" due à la dégénerescence des coordonnées polaires près de l'origine (se référer à l'explication donnée lors de la séance d'exercices).
— Si $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$, on a $\cos\theta \neq 0$. La première équation donne $r \neq 0$, et la 2ème nous impose ainsi $\sin\theta = 0$. On a alors $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Mais si $\theta = \pi$, la première équation s'écrit $\sinh r + mg = 0$ et impose $r < 0$: c'est à nouveau une solution parasite. On a donc nécessairement $\theta = 0$ et la deuxième équation
Les points d'équilibre sont donc
$$s_0 \text{ quelconque}, \quad \theta_0 = 0 \quad \text{et} \quad r_0 = \operatorname{arcsinh}(mg) .$$
L'énergie cinétique T est une forme quadratique. Ainsi, il suffit d'évaluer les coefficients en s_0, r_0, θ_0 pour obtenir
$$\tilde{T} = \frac{M+m}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\left(2\dot{s}r_0\dot{\theta} + \dot{r}^2 + r_0^2\dot{\theta}^2\right) .$$
On travaille maintenant avec les coordonnées
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix}\delta s\\ \delta r\\ \delta\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s - s_0\\ r - r_0\\ \theta - \theta_0\end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix}\dot{s}\\ \dot{r}\\ \dot{\theta}\end{pmatrix}$$
et donc
$$\tilde{T} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}^T A\dot{\mathbf{u}} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix}m+M & 0 & mr_0\\ 0 & m & 0\\ mr_0 & 0 & mr_0^2\end{pmatrix} .$$

*Contact pour cette série : Noé Cuneo (noe.cuneo@unige.ch)

Approximons maintenant le potentiel $V(r,\theta) = \cosh(r) - mgr\cos(\theta)$. On peut écrire par la formule générale du développement limité au 2ème ordre (en sachant qu'il n'y a pas de terme d'ordre 1, puisque qu'au point d'équilibre les dérivées premières s'annulent par choix de r_0, θ_0)

$$\begin{aligned} V(r_0+\delta r, 0+\delta\theta) &= V(r_0,0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(r_0,0)\delta r^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta}(r_0,0)\delta r\delta\theta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}(r_0,0)\delta\theta^2 \\ &= V(r_0,0) + \frac{1}{2}\cosh(r_0)\delta r^2 + mg\sin(0)\delta r\delta\theta + \frac{1}{2}mgr_0\cos(0)\delta\theta^2 \\ &= V(r_0,0) + \frac{1}{2}\cosh(r_0)\delta r^2 + \frac{1}{2}mgr_0\delta\theta^2 \ . \end{aligned}$$

Le terme $V(r_0,0)$ est une simple constante additive que l'on peut ignorer. Ainsi, on a

$$\tilde{V} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T B\mathbf{u} \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(r_0) & 0 \\ 0 & 0 & mgr_0 \end{pmatrix} \ .$$

3. On suppose maintenant que $M = m = g = 1$. Dès lors, on a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & r_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ r_0 & 0 & r_0^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(r_0) & 0 \\ 0 & 0 & r_0 \end{pmatrix} \ .$$

On cherche donc une matrice de changement de base C (avec $\mathbf{u} = C\mathbf{Q}$) telle que

$$C^T AC = \mathbb{I} \quad \text{et} \quad C^T BC = D$$

où D est une matrice diagonale. Voir le cours MMP1, en particulier la Série 7, ou le rappel au dos de la Série 11 de Mécanique II. On commence par appliquer Gram-Schmidt à la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ par rapport au produit scalaire $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_A = \mathbf{v}^T A\mathbf{w}$. On a tout d'abord

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{\sqrt{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle_A}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Ensuite, puisque $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_1\rangle_A = 0$ et que $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\rangle_A = 1$ on a simplement

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Finalement, on a $\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{v}_1\rangle_A = \frac{r_0}{\sqrt{2}}$ et $\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{v}_2\rangle_A = 0$. On obtient le vecteur $\mathbf{e}_3 - \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{v}_1\rangle_A \mathbf{v}_1 = (-\frac{r_0}{2}, 0, 1)^T$ qu'il faut encore normaliser. Sa norme par rapport à $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle_A$ est $\sqrt{r_0^2 - \frac{r_0^2}{2}} = r_0\sqrt{\frac{1}{2}}$ d'où

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{r_0\sqrt{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix} -\frac{r_0}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{r_0} \end{pmatrix} \ .$$

On pose donc

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{r_0} \end{pmatrix}$$

et on peut, pour contrôler, vérifier que $S^T A S = \mathbb{I}$. Dès lors, on exprime B dans cette nouvelle base :

$$B' = S^T B S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(r_0) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{r_0} \end{pmatrix} .$$

Dans le cas général il faudrait encore diagonaliser B' avec une matrice orthogonale P (avec $P^{-1} = P^T$) de sorte que $P^T B' P = D$ et ensuite poser $C = SP$ (donc $D = P^T C^T B C P$). Mais ici puisque B' est déjà diagonale, on peut simplement choisir $P = \mathbb{I}$ et donc $C = S$. On pose donc

$$\mathbf{u} = C\mathbf{Q} \quad \text{avec} \quad C = S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{r_0} \end{pmatrix} .$$

et on trouve

$$C^T A C = \mathbb{I} \quad \text{et} \quad C^T B C = D = B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(r_0) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{r_0} \end{pmatrix} .$$

Le lagrangien en coordonnées normales (pour de petites oscillations) s'écrit alors

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{Q}}^T\dot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T D \mathbf{Q} = \frac{1}{2}\left[\dot{Q}_1^2\right] + \frac{1}{2}\left[\dot{Q}_2^2 - \cosh(r_0) Q_2^2\right] + \frac{1}{2}\left[\dot{Q}_3^2 - \frac{2}{r_0} Q_3^2\right] .$$

On a donc trois modes propres indépendants (voir figure).

— Q_1. La "fréquence" correspondant à Q_1 est nulle. C'est ce qu'on appelle un mode mou. L'équation du mouvement pour Q_1 est $\ddot{Q}_1 = 0$, d'où $Q_1(t) = c + c't$. Si c'est le seul mode excité (donc si $Q_2 \equiv Q_3 \equiv 0$) on a $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_1\ Q_1(t)$, et donc

$$\delta s(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} Q_1(t), \quad \delta r(t) = 0 \quad \text{et} \quad \delta\theta(t) = 0 .$$

Ceci correspond simplement à une translation uniforme à vitesse constante du le système le long de l'axe Ox.

— Q_2. La pulsation correspondant à Q_2 est $\omega_2 = \sqrt{\cosh(r_0)}$. L'équation est $\ddot{Q}_2 = -\omega_2^2 Q_2$, et la solution est de type $c\cos(\omega_2 t) + c' \sin(\omega_2 t)$. Si seul ce mode propre est excité, on a $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_2\ Q_2(t)$. On a donc

$$\delta s(t) = 0, \quad \delta r(t) = Q_2(t) \quad \text{et} \quad \delta\theta(t) = 0 .$$

Il s'agit donc d'oscillations verticales de la masse m.

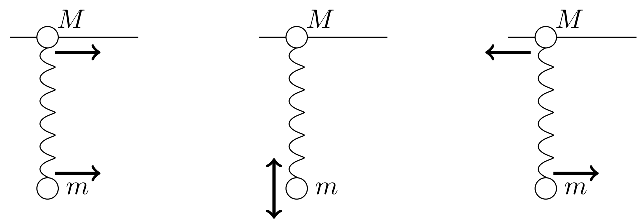
— Q_3. La pulsation est $\omega_3 = \sqrt{\frac{2}{r_0}}$ et l'équation $\ddot{Q}_3 = -\omega_3^2 Q_3$. La solution est du type $c\cos(\omega_3 t) + c' \sin(\omega_3 t)$. Si seul ce mode propre est excité, on a $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_3\ Q_3(t)$, et donc

$$\delta s(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} Q_3(t), \quad \delta r(t) = 0 \quad \text{et} \quad \delta\theta(t) = \frac{\sqrt{2}}{r_0} Q_3(t) .$$

Pour se représenter ce mode, il faut se rappeler que la position de M dans le plan Oxz est $(s(t),0) = \left(s_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}Q_3(t), 0\right)$ et que la position de m est au premier ordre

$$\begin{pmatrix} s + r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 + \delta s + (r_0 + \delta r)\sin(0+\delta\theta) \\ (r_0+\delta r)\cos(0+\delta\theta) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} s_0 + \delta s + r_0\delta\theta \\ r_0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} s_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}Q_3(t) + \sqrt{2}Q_3(t) \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}Q_3(t) \\ r_0 \end{pmatrix} .$$

Il s'agit d'oscillations en opposition de M et m dans la direction horizontale.



(a) Q_1 (b) Q_2 (c) Q_3

Exercice 2 : Stabilité paramétrique.

1. La position de la masse est $(l\sin\theta, h(t)+l\cos\theta)$ et sa vitesse $(l\dot\theta\cos\theta, \dot h(t) - l\dot\theta\sin\theta)$. L'énergie potentielle du système donc $mg(h(t)+l\cos\theta)$ et l'énergie cinétique $\frac{m}{2}((l\dot\theta\cos\theta)^2 + (\dot h(t) - l\dot\theta\sin\theta)^2) = \frac{m}{2}(l^2\dot\theta^2 - 2\dot h(t)l\dot\theta\sin\theta + \dot h^2(t))$, d'où le lagrangien

$$L = \frac{m}{2}(l^2\dot\theta^2 - 2\dot h(t)l\dot\theta\sin\theta + \dot h^2(t)) - mg(h(t)+l\cos\theta) .$$

On calcule $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot\theta - m\dot h(t)l\sin\theta\right) = ml^2\ddot\theta - m\ddot h(t)l\sin\theta - m\dot h(t)l\dot\theta\cos\theta$ et $\frac{\partial L}{\partial\theta} = -m\dot h(t)l\dot\theta\cos\theta + mgl\sin\theta$, ce qui donne l'équation d'Euler-Lagrange (les deux $-m\dot h(t)l\dot\theta\cos\theta$ se compensent)

$$ml^2\ddot\theta - m\ddot h(t)l\sin\theta = +mgl\sin\theta$$

ou encore

$$\ddot\theta = \frac{1}{l}\left(\ddot h(t) + g\right)\sin\theta .$$

2. On a que $h\left(\frac{\tau}{2}\right) = a$ et $\dot h\left(\frac{\tau}{2}\right) = 0$. Puisque pour tout $t \in [\frac{\tau}{2}, \tau)$ on a $\ddot h(t) = -c$, on trouve $h(t) = a - \frac{c}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^2$. En imposant que $h(\tau) = 0$, on trouve donc
$$c = \frac{8a}{\tau^2} .$$

3. Autour de $\theta = 0$, on remplace $\sin\theta$ par θ pour linéariser le système. On obtient que

$$\begin{cases} \ddot\theta \approx \frac{1}{l}\left(\frac{8a}{\tau^2} + g\right)\theta & \text{si } t \in [0,\tau) \\ \ddot\theta \approx \frac{1}{l}\left(-\frac{8a}{\tau^2} + g\right)\theta & \text{si } t \in [\tau, 2\tau) \end{cases} .$$

4. On suppose maintenant que $\tau^2 < \frac{8a}{g}$. Pour $t \in [0,\tau)$, on a $\ddot\theta = \beta^2\theta$ avec

$$\beta^2 = \frac{1}{l}\left(\frac{8a}{\tau^2} + g\right) .$$

En utilisant les résultats de l'Exercice 3 de la Série 11 (avec $t_0 = 0, T = \tau$), on trouve donc que

$$\begin{pmatrix} \theta(\tau) \\ \dot\theta(\tau) \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} \theta(0) \\ \dot\theta(0) \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad M_1 = \begin{pmatrix} \cosh(\beta\tau) & \frac{\sinh(\beta\tau)}{\beta} \\ \beta\sinh(\beta\tau) & \cosh(\beta\tau) \end{pmatrix} .$$

Puis, puisque quand $t \in [\tau, 2\tau)$ on a $\ddot\theta = -\alpha^2\theta$ avec

$$\alpha^2 = \frac{1}{l}\left(\frac{8a}{\tau^2} - g\right) > 0 ,$$

on a par l'Exercice 3 de la Série 11 (avec $\tau_0 = \tau, T = \tau$) que

$$\begin{pmatrix} \theta(2\tau) \\ \dot\theta(2\tau) \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} \theta(\tau) \\ \dot\theta(\tau) \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha\tau) & \frac{\sin(\alpha\tau)}{\alpha} \\ -\alpha\sin(\alpha\tau) & \cos(\alpha\tau) \end{pmatrix} .$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} \theta(2\tau) \\ \dot\theta(2\tau) \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} \theta(\tau) \\ \dot\theta(\tau) \end{pmatrix} = M_2 M_1 \begin{pmatrix} \theta(0) \\ \dot\theta(0) \end{pmatrix}$$

et donc

$$M = M_2 M_1 =$$
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha\,\tau)\cosh(\beta\,\tau) + \frac{\sin(\alpha\,\tau)\beta\sinh(\beta\,\tau)}{\alpha} & \frac{\cos(\alpha\,\tau)\sinh(\beta\,\tau)}{\beta} + \frac{\sin(\alpha\,\tau)\cosh(\beta\,\tau)}{\alpha} \\ -\alpha\,\sin(\alpha\,\tau)\cosh(\beta\,\tau) + \cos(\alpha\,\tau)\,\beta\sinh(\beta\,\tau) & -\frac{\alpha\,\sin(\alpha\,\tau)\sinh(\beta\,\tau)}{\beta} + \cos(\alpha\,\tau)\cosh(\beta\,\tau) \end{pmatrix} .$$

5. On sait par l'exercice 3 que $\det(M_1) = \det(M_2) = 1$, et donc $\det(M) = \det(M_2)\det(M_1) = 1$. On a d'autre part

$$\mathrm{tr}M = 2\cos(\alpha\,\tau)\cosh(\beta\,\tau) + \sin(\alpha\,\tau)\sinh(\beta\,\tau)\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}\right) .$$

L'application numérique avec $g = 9.81$ $[m/s^2]$, $l = 0.2$ $[m]$, $a = 0.01$ $[m]$ donne

$$\mathrm{tr}M = 2.001240931 \;\text{ si } \tau = \frac{1}{60}\ [s] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}M = 1.997763340 \;\text{ si } \tau = \frac{1}{62}\ [s] .$$

Ainsi, si $\tau = \frac{1}{60}$ $[s]$ la trace est supérieure à 2 et donc le point $\theta = 0$ est instable, et si $\tau = \frac{1}{62}$ $[s]$ il est au contraire stable.

6. On pose maintenant

$$\varepsilon = \frac{g\tau^2}{8a} \qquad \text{et} \qquad \mu = \sqrt{\frac{8a}{l}}$$

de sorte que

$$\alpha\tau = \tau\sqrt{\frac{1}{l}\left(\frac{8a}{\tau^2} - g\right)} = \mu\sqrt{1-\varepsilon} \qquad \text{et} \qquad \beta\tau = \tau\sqrt{\frac{1}{l}\left(\frac{8a}{\tau^2} + g\right)} = \mu\sqrt{1+\varepsilon} .$$

On développe maintenant au 4ème ordre. On calcule

$$\begin{aligned} \cos(\alpha\tau) &= 1 - \frac{1}{2}(\alpha\tau)^2 + \frac{1}{24}(\alpha\tau)^4 + \dots = 1 - \frac{1}{2}\mu^2(1-\varepsilon) + \frac{1}{24}\mu^4(1-\varepsilon)^2 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{1}{2}\mu^2\varepsilon + \frac{1}{24}\mu^4 + \dots \\ \cosh(\beta\tau) &= 1 + \frac{1}{2}(\beta\tau)^2 + \frac{1}{24}(\beta\tau)^4 + \dots = 1 + \frac{1}{2}\mu^2(1+\varepsilon) + \frac{1}{24}\mu^4(1+\varepsilon)^2 \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{1}{2}\mu^2\varepsilon + \frac{1}{24}\mu^4 + \dots \end{aligned}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
2\cos(\alpha\,\tau)\cosh(\beta\,\tau) &= 2\left(1-\frac{1}{2}\mu^2+\frac{1}{2}\mu^2\varepsilon+\frac{1}{24}\mu^4+\dots\right)\left(1+\frac{1}{2}\mu^2+\frac{1}{2}\mu^2\varepsilon+\frac{1}{24}\mu^4+\dots\right)\\
&= 2\left(1+\mu^2\varepsilon-\frac{1}{4}\mu^4+\frac{1}{12}\mu^4+\dots\right)=2+2\mu^2\varepsilon-\frac{1}{3}\mu^4+\dots\ .
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Estimons maintenant le terme $\sin(\alpha\,\tau)\sinh(\beta\,\tau)\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)$. Anticipons le résultat pour ne calculer que ce qui est nécessaire. Le $\sin(\alpha\tau)$ et le $\sinh(\beta\,\tau)$ ne donnent pas de contribution au premier ordre. De plus, si l'on écrit

$$\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}}-\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\ ,$$

on constate que ce terme est impair en ε et donnera par conséquent seulement des contributions d'ordre impair. Ainsi, si l'on veut calculer le produit de ces 3 facteurs au 4ème ordre, il suffit de développer chacun de ces facteurs au 2ème ordre seulement. Typiquement, on a la situation $(c_1z+d_1z^2+\dots)(c_2z+d_2z^2+\dots)(c_3z+d_3z^2+\dots)=c_1c_2c_3z^3+(c_1c_2d_3+c_1d_2c_3+d_1c_2c_3)z^4+\dots$. Ainsi on calcule en s'arrêtant au 2ème ordre

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha\tau)&=\alpha\tau+\dots=\mu\sqrt{1-\varepsilon}+\dots=\mu-\frac{1}{2}\mu\varepsilon+\dots\\
\sinh(\beta\tau)&=\beta\tau+\dots=\mu\sqrt{1+\varepsilon}+\dots=\mu+\frac{1}{2}\mu\varepsilon+\dots
\end{aligned}
$$

et pour le dernier facteur, on sait d'avance que l'ordre 2 est nul par imparité, et donc on calcule simplement au 1er ordre

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}&=\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}}-\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}}=\frac{1+\frac{1}{2}\varepsilon+\dots}{1-\frac{1}{2}\varepsilon+\dots}-\frac{1-\frac{1}{2}\varepsilon+\dots}{1+\frac{1}{2}\varepsilon+\dots}\\
&=(1+\frac{1}{2}\varepsilon+\dots)(1+\frac{1}{2}\varepsilon+\dots)-(1-\frac{1}{2}\varepsilon+\dots)(1-\frac{1}{2}\varepsilon+\dots)\\
&=1+\varepsilon+\dots-(1-\varepsilon+\dots)=2\varepsilon+0\varepsilon^2+\dots
\end{aligned}
$$

d'où au final

$$\sin(\alpha\,\tau)\sinh(\beta\,\tau)\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)=2\varepsilon\left(\mu-\frac{1}{2}\varepsilon\mu\right)\left(\mu+\frac{1}{2}\varepsilon\mu\right)+\dots=2\mu^2\varepsilon+\dots\ . \tag{2}$$

On a donc finalement avec (1) et (2) qu'au 4ème ordre

$$\mathrm{tr}M=2+4\mu^2\varepsilon-\frac{1}{3}\mu^4+\dots\ .$$

Le critère de la trace appliqué à la matrice M indique donc que l'application $(\theta(0),\dot\theta(0))\mapsto(\theta(2\tau),\dot\theta(2\tau))$ est stable si et seulement si $|\mathrm{tr}M|<2$, ce qui est le cas si et seulement si $\mu^2\varepsilon<\frac{1}{12}\mu^4$, ou autrement dit si $\varepsilon<\frac{1}{12}\mu^2$, ou encore $\frac{g\tau^2}{8a}<\frac{1}{12}\frac{8a}{l}$ et donc finalement, dans le régime où les approximations ci-dessus sont valables, on trouve que le point $\theta=0$ est stable si

$$\tau<\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{a}{\sqrt{gl}}\ .$$

Rappel : on a aussi supposé plus haut que $\tau<\sqrt{\frac{8a}{g}}$. Ainsi le point $\theta=0$ est stable si μ,ε sont très petits, et si les deux conditions sur τ sont simultanément satisfaites.