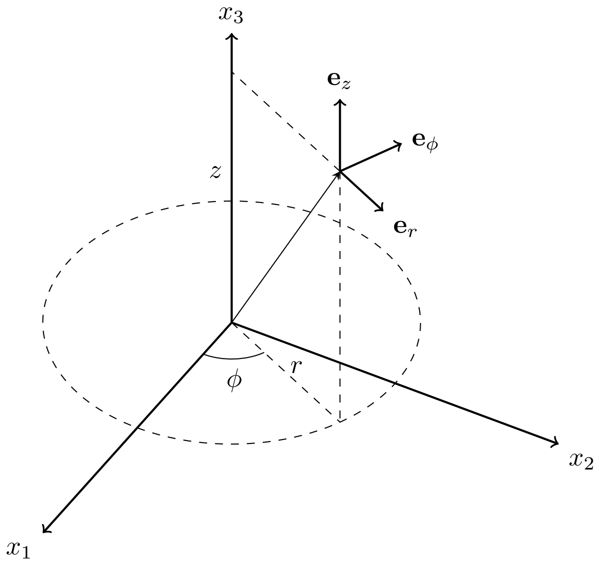
Mécanique II : Série 1

Exercice 1 : Coordonnées cylindriques.

Un point matériel de masse m décrit une trajectoire $\mathbf{x}(t)$ dans le repère cartésien $Ox_1x_2x_3$. On souhaite écrire cette trajectoire ainsi que les équations du mouvement en coordonnées cylindriques $r(t), \phi(t), z(t)$ définies comme sur l'image ci-à-droite. Dans cet exercice, nous calculerons toujours en fonction de r, ϕ, z (et $\dot{r}, \dot{\phi}, \dot{z}, \ddot{r}, \ddot{\phi}, \ddot{z}$ lorsque nécessaire). Nous exprimerons les différents vecteurs dans les deux bases orthonormées suivantes : la base euclidienne $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et la base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z\}$ qui dépend de la position du point matériel (voir l'image). *Exprimer un vecteur dans la base $\mathcal{B}$* signifie l'écrire comme $(f_1, f_2, f_3) = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + f_3\mathbf{e}_3$, où les f_i sont des fonctions de r, ϕ, z (et possiblement de leurs dérivées). Et *exprimer un vecteur dans la base $\mathcal{B}'$* signifie le mettre sous la forme $f_r\mathbf{e}_r + f_\phi\mathbf{e}_\phi + f_z\mathbf{e}_z$ où f_r, f_ϕ et f_z sont à nouveau des fonctions des coordonnées cylindriques et de leurs dérivées.

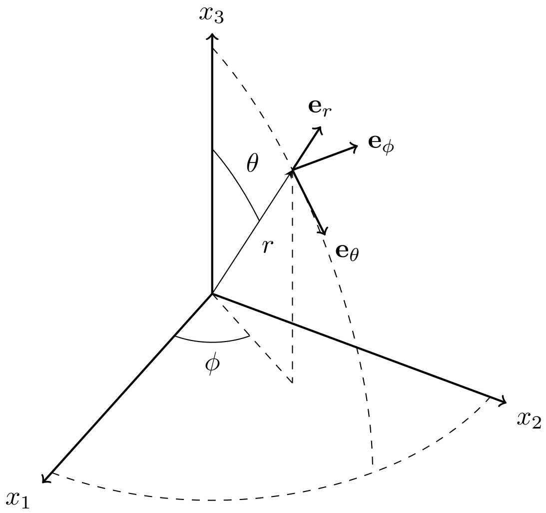


1. Expliciter $\mathbf{x}$ et les vecteurs $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Ecrire $\mathbf{x}$ dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Vérifier les relations $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\phi}\ \mathbf{e}_\phi$, $\dot{\mathbf{e}}_\phi = -\dot{\phi}\ \mathbf{e}_r$ et $\dot{\mathbf{e}}_z = \mathbf{0}$.
4. Utiliser les deux points précédents pour exprimer $\dot{\mathbf{x}}$ et $\ddot{\mathbf{x}}$ dans les deux bases. Calculer l'énergie cinétique.
5. Le point matériel subit une force $\mathbf{F} = F_r(r, \phi, z)\mathbf{e}_r + F_\phi(r, \phi, z)\mathbf{e}_\phi + F_z(r, \phi, z)\mathbf{e}_z$. Ecrire l'équation de Newton $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$ dans $\mathcal{B}'$ pour obtenir les équations du mouvement pour $r(t), \phi(t)$ et $z(t)$. Faire de même dans la base $\mathcal{B}$ pour obtenir un autre système d'équations (équivalent au premier). Constater que l'une des bases rend les calculs plus simples, et n'utiliser que cette base pour le reste de l'exercice.
6. Supposons maintenant que le point matériel (toujours soumis à la force $\mathbf{F}$) se déplace uniquement sur un cylindre de rayon R (donc on impose $r \equiv R$). Ecrire les équations du mouvement pour $\phi(t)$ et $z(t)$ et calculer la force de contrainte $\mathbf{N}$ exercée par le cylindre.
7. Le point matériel se déplace maintenant sur le cercle donné par la contrainte $z \equiv H$ et $r \equiv R$. Ecrire les équations du mouvement pour $\phi(t)$ et calculer la force de contrainte $\mathbf{M}$ exercée par le cercle.

Exercice 2 : Coordonnées sphériques.

On souhaite maintenant décrire la trajectoire $\mathbf{x}(t)$ d'un point matériel de masse m en coordonnées sphériques r, θ, ϕ définies comme sur l'image ci-à-droite. Nous avons maintenant $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ et $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$. Nous reproduisons dans cet exercice exactement la démarche du précédent.

1. Expliciter $\mathbf{x}$ et $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Ecrire $\mathbf{x}$ dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Vérifier les relations $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\phi + \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$, $\dot{\mathbf{e}}_\theta = \dot{\phi}\cos\theta\mathbf{e}_\phi - \dot{\theta}\mathbf{e}_r$ et $\dot{\mathbf{e}}_\phi = -\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_r - \dot{\phi}\cos\theta\mathbf{e}_\theta$.
4. Utiliser les deux points précédents pour exprimer $\dot{\mathbf{x}}$ et $\ddot{\mathbf{x}}$ dans la base $\mathcal{B}'$. (Facultatif : exprimer les mêmes résultats dans la base $\mathcal{B}$.) Calculer l'énergie cinétique.
5. Le point matériel subit une force $\mathbf{F} = F_r(r,\theta,\phi)\mathbf{e}_r + F_\theta(r,\theta,\phi)\mathbf{e}_\theta + F_\phi(r,\theta,\phi)\mathbf{e}_\phi$. Ecrire l'équation de Newton $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$ dans $\mathcal{B}'$ pour obtenir les équations du mouvement pour $r(t), \theta(t)$ et $\phi(t)$.
6. Supposons maintenant que le point matériel (toujours soumis à la force $\mathbf{F}$) se déplace uniquement sur une sphère de de rayon R (donc on impose $r \equiv R$). Ecrire les équations du mouvement pour $\theta(t)$ et $\phi(t)$ et calculer la force de contrainte $\mathbf{N}$ exercée par la sphère.



Exercice 3 : Point matériel sur un rail.

On considère un point matériel de masse m qui glisse sans frottement le long d'un rail paramétré par une fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ deux fois dérivable et dont la dérivée ne s'annule pas. Nous décrivons la position du point matériel sur le rail par la coordonnée $s(t)$ telle que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(s(t))$. Nous supposons que le point matériel subit une force extérieure $\mathbf{F}(s)$ (qui dépend donc de la position sur le rail).

1. Pour chaque s, donner l'expression du vecteur normalisé $\mathbf{u}(s)$ tangent au rail.
2. Calculer la vitesse, l'énergie cinétique et l'accélération en fonction de s, $\dot{s}$ et $\ddot{s}$.
3. Montrer que l'équation du mouvement pour $s(t)$ est $\langle \mathbf{F}(s), \mathbf{u}(s)\rangle = m\left(\ddot{s}\|\mathbf{f}'(s)\| + \dot{s}^2\langle \mathbf{f}''(s), \mathbf{u}(s)\rangle\right)$ et que la force de contrainte $\mathbf{N}$ exercée par le rail est $-\mathbf{F}_\perp(s) + \dot{s}^2 \cdot (\mathbf{f}''(s))_\perp$ (voir le rappel plus bas). Pour ce faire, projeter en chaque temps l'équation de Newton $\mathbf{F} + \mathbf{N} = m\ddot{\mathbf{x}}$ le long de $\mathbf{u}$ $(= \mathbf{u}(s(t)))$ et sur le complément orthogonal à $\mathbf{u}$.
4. Simplifier les expressions obtenues dans le cas où s est la paramétrisation par longueur d'arc, c'est à dire si $\|\mathbf{f}'(s)\| \equiv 1$. Indication : utiliser (et montrer) que dans ce cas $\langle \mathbf{f}''(s), \mathbf{u}(s)\rangle = \langle \mathbf{f}''(s), \mathbf{f}'(s)\rangle \equiv 0$.

Rappel : soit un vecteur $\mathbf{u}$ unitaire. Tout vecteur $\mathbf{w}$ peut se décomposer comme

$$\mathbf{w} = \underbrace{\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle \mathbf{u}}_{=\mathbf{w}_{\shortparallel}} + \underbrace{(\mathbf{w} - \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle \mathbf{u})}_{=\mathbf{w}_\perp}$$

où $\mathbf{w}_{\shortparallel}$ est parallèle à $\mathbf{u}$, et $\mathbf{w}_\perp$ est perpendiculaire à $\mathbf{u}$. Pour deux vecteurs $\mathbf{v}, \mathbf{w}$, nous avons

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \iff \begin{cases} \mathbf{v}_{\shortparallel} = \mathbf{w}_{\shortparallel} \\ \mathbf{v}_\perp = \mathbf{w}_\perp \end{cases} \iff \begin{cases} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle \\ \mathbf{v}_\perp = \mathbf{w}_\perp \end{cases}$$

On parle alors de projeter l'équation $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ le long de $\mathbf{u}$, respectivement dans le complément orthogonal à $\mathbf{u}$.