Mécanique II : Série 2

1 Avant-propos

Lire l'article *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.* par E. P. Wigner, 1959. Comm. Pure Appl. Math., 13 : 1–14. doi : 10.1002/cpa.3160130102

2 Différentiabilité

Définition. Une application $\Phi : V \to W$ entre deux espaces vectoriels normés est différentiable en $x \in V$ s'il existe une application linéaire continue $\Phi'(x) : V \to W$ telle que

$$\Phi(x+h) = \Phi(x) + \Phi'(x)h + o(h)\,,$$

pour tout $h \in V$.

1. Montrer que l'espace $C\left([-1,1]\right)$ des fonctions continues sur l'intervalle $[-1,1]$ est un espace vectoriel normé avec la norme
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|\ .$$
2. Montrer que la fonction $\Phi : C\left([-1,1]\right) \to \mathbb{R}$ définie par
$$\Phi(f) = f^2(0)\,,$$
est différentiable et calculer sa différentielle.
3. Montrer que la fonction $\Phi : C\left([-1,1]\right) \to \mathbb{R}$ définie par
$$\Phi(f) = \int_{-1}^{1} f^2(x)\mathrm{d}x\,,$$
est différentiable et calculer sa différentielle.

*Contact pour cette série : Julien Guillod (julien.guillod@unige.ch)

3 Espaces affines

Définition (espace affine)**.** Un espace affine (A, V) consiste en un ensemble A, un espace vectoriel V et une application $A \times V \to A$ notée $+$ telle que pour tout $a \in A$ et $v, w \in V$,

$$a + 0 = a\,, \qquad\qquad (a + v) + w = a + (v + w)\ ,$$

et telle pour tout $a, b \in A$ il existe un unique $v \in V$ tel que $a = b + v$. Cet unique v est noté $v = a - b$. La dimension d'un espace affine (A, V) est définie par la dimension de l'espace vectoriel V.

Remarque. L'application $+$ vérifiant les propriétés ci-dessus est appelée une action transitive et libre du groupe additif de l'espace vectoriel V sur l'ensemble A.

Définition (application affine)**.** Donnés deux espaces affines (A, V) et (A', V'), une application $\phi : A \to A'$ est affine s'il existe une application linéaire $L : V \to V'$ telle que pour tout $a \in A$ et $v \in V$,

$$\phi(a + v) = \phi(a) + Lv\,.$$

L'application linéaire L est unique et est appelée l'application linéaire sous-jacente.

Définition (isomorphisme d'espaces affines)**.** Une application affine $\phi : A \to A'$ est un isomorphisme affine si l'application ϕ est bijective. Dans ce cas les espaces affines (A, V) et (A', V') sont dit isomorphes.

1. Montrer que tout espace vectoriel V induit un espace affine (V, V) en choisissant $A = V$ et la loi $+$ comme la loi additive de l'espace vectoriel V.
2. Pour $a_0 \in A$ et $a'_0 \in A'$ fixés, montrer que $\phi^L_u : A \to A'$ définie par
$$\phi^L_u(a) = a'_0 + L(a - a_0) + u$$
est une application affine pour toute application linéaire $L : V \to V'$ et tout $u \in V'$. Réciproquement montrer que toute application affine est égale à un ϕ^L_u, avec L et u bien choisis.
3. Montrer que ϕ est un isomorphisme entre (A, V) et (A', V') si et seulement si l'application linéaire sous-jacente L est bijective. Cela montre que deux espaces affines (A, V) et (A', V') sont isomorphes si et seulement si les espaces vectoriels V et V' sont isomorphes.
4. Montrer que tout espace affine (A, V) de dimension n est isomorphe à l'espace affine $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.
5. Montrer que les automorphismes affines de (A, V), c'est-à-dire les isomorphismes affines de (A, V) vers (A, V), forment un groupe, noté $\mathrm{Aff}(A)$, sous la composition des applications.
6. Pour tout $a_0 \in A$, le point 2. montre que
$$\mathrm{Aff}(A) = \left\{\phi^L_u\,,\ L \in \mathrm{GL}(V) \text{ et } u \in V\right\},$$
où $\mathrm{GL}(V)$ désigne le groupe général linéaire, c'est-à-dire le groupe des automorphismes linéaires de V et
$$\phi^L_u(a) = a_0 + L(a - a_0) + u\,.$$
Déterminer la loi de composition explicite des éléments ϕ^L_u.
7. Montrer que le groupe des automorphismes linéaires de (A, V) peut être représenté par le sous-groupe de $\mathrm{GL}(V \times \mathbb{R})$ formé par les matrices de la forme
$$M^L_u = \begin{pmatrix} L & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
avec $L \in \mathrm{GL}(V)$ et $u \in V$.
8. (*) Montrer que l'application $\phi \mapsto L$ qui associe à chaque automorphisme affine son application linéaire sous-jacente est un homomorphisme du groupe $\mathrm{Aff}(A)$ vers le groupe général linéaire $\mathrm{GL}(V)$.
9. (*) Montrer que le noyau de l'homomorphisme $\phi \mapsto L$ est isomorphe au groupe de V.