Mécanique II : Série 3

1 Groupe orthogonal

Définition 1. Le groupe orthogonal de dimension n, noté $O(n)$, est l'ensemble des transformations linéaires $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isométriques, c'est-à-dire qui laissent la norme canonique invariante : $\|R\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $O(n)$ est un groupe avec la composition des applications.
2. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique, montrer que le groupe orthogonal est caractérisé de manière équivalente par les transformations linéaires $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telles que
$$\langle R\boldsymbol{x}, R\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \ ,$$
pour tout $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.
Indication : écrire le produit scalaire en termes de la norme.
3. Montrer que les éléments du groupe orthogonal correspondent aux matrices de taille $n \times n$ avec $R^T R = 1$, *i.e.*
$$O(n) \simeq \left\{ R \in GL(n) \, , \ R^T R = 1 \right\} .$$
Indication : utiliser le résultat du point 2. et la définition de la transposée par le produit scalaire.
4. Déterminer la dimension du groupe orthogonal $O(n)$.
Indication : déterminer la dimension du groupe $GL(n)$ des matrices inversibles de taille $n \times n$ et soustraire le nombre d'équations que donne la condition $R^T R = 1$.

2 Espaces galiléens

Définition (espace galiléen)**.** Un espace galiléen $(A, V, \mathfrak{t}, \rho)$ consiste en :
— un espace affine réel (A, V) de dimension quatre ;
— une fonctionnelle linéaire non-nulle $\mathfrak{t} : V \to \mathbb{R}$ sur l'espace vectoriel V ;
— une norme $\rho : \ker \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ induite par un produit scalaire sur le noyau $\ker \mathfrak{t}$ de $\mathfrak{t}$.

Définition (isomorphisme d'espaces galiléens)**.** Un isomorphisme entre deux espaces galiléens $(A, V, \mathfrak{t}, \rho)$ et $(A', V', \mathfrak{t}', \rho')$ est un isomorphisme affine $\phi : A \to A'$ tel que l'application linéaire sous-jacente $L : V \to V'$ vérifie :
— L préserve le temps, *i.e.* $\mathfrak{t}'(Lv) = \mathfrak{t}(v)$ pour tout $v \in V$;
— L préserve la norme, *i.e.* $\rho'(Lv) = \rho(v)$ pour tout $v \in \ker \mathfrak{t}$.

1. Montrer que l'espace affine $\mathbb{R}^4 = \left\{ (t, \boldsymbol{x}) \, , \ t \in \mathbb{R} \text{ et } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \right\}$ avec $\mathfrak{t}(t, \boldsymbol{x}) = t$ et $\rho(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ est un espace galiléen.
2. Montrer que tout espace galiléen $(A, V, \mathfrak{t}, \rho)$ est isomorphe à l'espace galiléen construit sur $\mathbb{R}^4$ comme ci-dessus.
Indication : utiliser que la norme ρ est induite par un produit scalaire.
3. Montrer que les automorphismes d'un espace galiléen, c'est-à-dire les isomorphismes de $(A, V, \mathfrak{t}, \rho)$ dans $(A, V, \mathfrak{t}, \rho)$, forment un groupe. Ce groupe est appelé groupe galiléen, et ses éléments transformations galiléennes.

[*]Contact pour cette série : Julien Guillod (julien.guillod@unige.ch)

4. Montrer que les transformations

$$\begin{aligned}
g_1(t, \boldsymbol{x}) &= (t, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t)\,, && \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3\,,\\
g_2(t, \boldsymbol{x}) &= (t + s, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{s})\,, && \forall\,(s, \boldsymbol{s}) \in \mathbb{R}^4\,,\\
g_3(t, \boldsymbol{x}) &= (t, R\boldsymbol{x})\,, && \forall R \in O(3)\,,
\end{aligned}$$

   sont des automorphismes de l'espace galiléen $\mathbb{R}^4$.

5. Montrer que toute transformation galiléenne g de $\mathbb{R}^4$ peut être écrite de manière unique sous la forme $g = g_1 \circ g_2 \circ g_3$ avec $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, $(s, \boldsymbol{s}) \in \mathbb{R}^4$ et $R \in O(3)$.

   Indication : commencer par montrer l'unicité, puis l'utiliser pour montrer l'existence.

3 Restrictions imposées par l'invariance galiléenne

1. Lire le paragraphe 2E du Chapitre 1 du livre d'Arnold.
2. Montrer que si un système mécanique est constitué d'un seul point matériel, alors son accélération dans un référentiel inertiel est nulle.
3. Soit un système mécanique constitué de deux points. Montrer que pour n'importe quelle condition initiale, il existe un référentiel inertiel dans lequel les deux points restent dans un plan fixe. De quelle manière ce résultat devient-t-il plus fort si certaines conditions initiales sont égales ?

   Indication : aller dans les coordonnées du centre de masse, utiliser qu'un point est dans un plan s'il est invariant par rapport à la réflexion par rapport à ce plan, et utiliser l'unicité des solutions d'une équation différentielle ordinaire.