Mécanique II : Série 6

Exercice 1 : Coordonnées cylindriques revisitées. On considère un point matériel de masse m en coordonnées cylindriques et on se donne un potentiel $U(r, \phi, z)$.

1. Ecrire le lagrangien du système (utiliser l'expression pour l'énergie cinétique obtenue dans la Série 1).
2. Ecrire les équations du mouvement pour $r(t), \phi(t)$ et $z(t)$.
3. Supposer maintenant que le point matériel est contraint à rester sur un cylindre de rayon R. Ecrire le lagrangien et les équations du mouvement pour $\phi(t)$ et $z(t)$.
4. Supposer qu'en plus la hauteur $z \equiv H$ est maintenant fixée. Ecrire le lagrangien et les équations du mouvement pour $\phi(t)$.
5. Comparer les résultats ci-dessus aux résultats correspondants obtenus dans la Série 1.

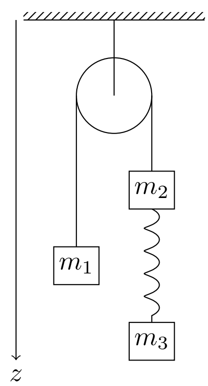
Exercice 2 : Coordonnées sphériques revisitées. On considère un point matériel de masse m en coordonnées sphériques et on se donne un potentiel $U(r, \theta, \phi)$.

1. Ecrire le lagrangien du système (utiliser l'expression pour l'énergie cinétique obtenue dans la Série 1).
2. Ecrire les équations du mouvement pour $r(t), \theta(t)$ et $\phi(t)$.
3. Supposer maintenant que le point matériel est contraint à rester sur une sphère de rayon R. Ecrire le lagrangien et les équations du mouvement pour $\theta(t)$ et $\phi(t)$.
4. Comparer les résultats ci-dessus aux résultats correspondants obtenus dans la Série 1.

Exercice 3 : Point matériel sur un rail revisité. On considère un point matériel de masse m qui glisse sans frottement le long d'un rail paramétré par une fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ deux fois dérivable et dont la dérivée ne s'annule pas. On introduit une coordonnée généralisée s de sorte que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(s(t))$. On suppose que le point matériel est soumis à un potentiel $U(\mathbf{x})$.

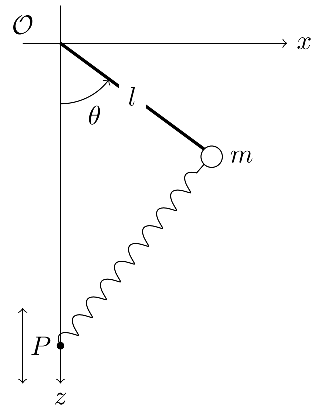
1. Ecrire le lagrangien du système (utiliser l'expression pour l'énergie cinétique obtenue dans la Série 1).
2. Ecrire l'équation du mouvement pour $s(t)$. Comparer avec les résultats de la Série 1.
3. Ecrire le lagrangien et l'équation du mouvement dans le cas où s est l'abscisse curviligne (donc si $\|\mathbf{f}'\| \equiv 1$).

Exercice 4 : Soit le système ci-à-droite. La poulie est sans masse. Les masses m_1, m_2 et m_3 sont soumises à la gravité. Une corde non-extensible relie m_1 et m_2, et un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos nulle relie m_2 et m_3. Les masses ne se déplacent que verticalement (z positif vers le bas), et on note z_1, z_2, z_3 leur position.



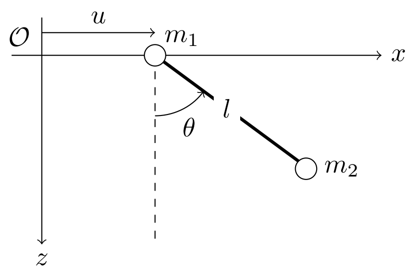
1. Décrire la contrainte sous la forme $f(z_1, z_2, z_3) = c$ où c est une constante qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter.
2. Choisir comme coordonnées généralisées z_1 et z_3 et exprimer z_2 en fonction de ces deux coordonnées.
3. Ecrire le lagrangien du système.
4. En déduire les équations du mouvement.

Exercice 5 : Soit le système ci-à-droite. Une masse m dans le plan Oxz (avec z positif contre le bas) est soumise à la gravitation et liée à l'origine par une tige de longueur fixe l. De plus, un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos nulle lie m à un point P qui se déplace selon l'équation $P(t) = (a + b\cos(\omega t))\mathbf{e}_z$ (le point P est actionné par un dispositif externe non spécifié).



1. Choisir comme coordonnée généralisée l'angle θ entre la verticale et la tige. Ecrire la position de m en fonction de θ.
2. Ecrire le lagrangien du système.
3. En déduire les équations du mouvement.

Exercice 6 : Soit le système ci-à-droite. Deux masses m_1 et m_2 dans le plan Oxz (avec z positif contre le bas) sont soumises à la gravitation et reliées par une tige rigide de longueur l. De plus, la masse m_1 ne peut se déplacer que le long de l'axe Ox.



1. Choisir comme coordonnée généralisée l'angle θ entre la verticale et la tige, et la coordonnée u donnant la position de m_1 sur l'axe Ox. Ecrire la position de m_2 en fonction de u et θ.
2. Ecrire le lagrangien du système.
3. En déduire les équations du mouvement.

Exercice 7 : Invariance de l'équation d'Euler-Lagrange. Soit $\mathbf{q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction lisse, et soit $\bar{\mathbf{q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par la relation

$$\mathbf{q}(t) \equiv \varphi(\bar{\mathbf{q}}(t), t)$$

où $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une application lisse donnée telle que pour tout t, l'application $\bar{\mathbf{x}} \mapsto \varphi(\bar{\mathbf{x}}, t)$ est une bijection. Soit maintenant un lagrangien $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donné. En observant que $\dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt}\varphi_i(\bar{\mathbf{q}}(t), t) = \sum_j \partial_j \varphi_i(\bar{\mathbf{q}}, t)\dot{\bar{q}}_j + \partial_t \varphi_i(\bar{\mathbf{q}}, t)$, on introduit la fonction $\bar{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\bar{L}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, t) \equiv L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} x_i = \varphi_i(\bar{\mathbf{x}}, t) \\ y_i = \sum_j \partial_j \varphi_i(\bar{\mathbf{x}}, t)\bar{y}_j + \partial_t \varphi_i(\bar{\mathbf{x}}, t) \end{cases}$$

de sorte que par construction

$$\bar{L}(\bar{\mathbf{q}}(t), \dot{\bar{\mathbf{q}}}(t), t) \equiv L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)\ .$$

Montrer que si $\mathbf{q}(t)$ extrêmalise l'action $\int L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt$ alors $\bar{\mathbf{q}}(t)$ extrêmalise l'action $\int \bar{L}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t)dt$.

Indication : Avec la notation habituelle, montrer que si pour tout i on a $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, alors pour tout ℓ on a $\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_\ell} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_\ell} = 0$.

Remarque : Typiquement, si l'on considère un point matériel dans $\mathbb{R}^3$ qui suit une trajectoire $\mathbf{q}(t)$ et que l'on considère la trajectoire $\bar{\mathbf{q}}(t)$ par rapport à un repère en translation dont l'origine se trouve au temps t à la position $\mathbf{r}_0(t)$, on a $\mathbf{q}(t) = \bar{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{r}_0(t)$, donc $\varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{r}_0(t)$.