# Mécanique II : Série 7

## 1 Equivalence des équations de Lagrange et de Hamilton

Démontrer que les équations de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0\,,$$

sont équivalentes aux équations de Hamilton,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}\,, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}\,,$$

avec l'hamiltonien $H$ défini par

$$H = p\dot{q} - L\,.$$

## 2 Hamiltoniens divers

1. Le lagrangien d'un point matériel de masse $m$ dans un potentiel $U$ en coordonnées cylindriques est
$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \left(r\dot{\phi}\right)^2 + \dot{z}^2\right) - U(r,\phi,z)\,.$$
Ecrire l'hamiltonien et déterminer les équations de Hamilton.
2. Le lagrangien d'un point matériel de masse $m$ dans un potentiel $U$ en coordonnées sphériques est
$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \left(r\sin\theta\dot{\phi}\right)^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right) - U(r,\theta,\phi)\,.$$
Ecrire l'hamiltonien et déterminer les équations de Hamilton.
3. Le lagrangien de l'exercice 5 de la Série 6 est
$$L = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta - \frac{k}{2}\left(l^2 - 2lh(t)\cos\theta + h^2(t)\right) \quad \text{avec} \quad h(t) = a + b\cos(\omega t)\,.$$
Ecrire l'hamiltonien et déterminer les équations de Hamilton.
4. Le lagrangien de l'exercice 6 de la Série 6 est
$$L = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{u}^2 + m_2 l\dot{u}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\theta}^2 + m_2 gl\cos\theta\,.$$
Ecrire l'hamiltonien correspondant à ce système.

## 3 Théorème du retour pour le pendule

Considérer un pendule de masse $m = 1$ et de longueur $l = 1$ soumis à la gravité en supposant que $g = 1$.

1. Ecrire le lagrangien du système en prenant comme coordonnée généralisée l'angle $x \in [-\pi,\pi)$ qui est zéro lorsque le pendule est en bas.
2. Déterminer l'hamiltonien du système et les équations de Hamilton.
3. Décrire graphiquement le flot hamiltonien et expliquer l'évolution temporelle de la boule $B(0) = \{(r\cos\varphi, 2 + r\sin\varphi)\,,\ -\pi \le \varphi \le \pi\}$ pour $r > 0$ petit, en relation avec le théorème du retour de Poincaré.

*Contact pour cette série : Julien Guillod (julien.guillod@unige.ch)

## 4 Rotations sur le cercle

L'application $g : S^1 \to S^1$ qui effectue une rotation d'angle $\alpha$ sur le cercle $S^1$ est donnée par $gx = g(x + \alpha)$.

1. Vérifier que les hypothèses du théorème du retour de Poincaré sont vérifiées et montrer que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in S^1,\ \exists n > 0,\ |g^n x - x] < \varepsilon\,.$$
Comme tous les points du cercle sont équivalents, le résultat précédent cela implique que
$$\forall x \in S^1,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n > 0,\ |g^n x - x] < \varepsilon\,.$$
2. Si $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$, montrer que l'orbite $\{g^n x,\ n \geq 0\}$ est dense sur le cercle $S^1$.
**Indication :** commencer par montrer que si $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$, alors pour tout $n > 0$, $g^n x \neq x$.

## 5 Flot sur le tore

Considérer le système d'équations différentielles sur le tore $S^1 \times S^1$ donné par
$$\dot{\phi}_1 = \alpha_1\,, \qquad\qquad \dot{\phi}_2 = \alpha_2\,.$$
Alors le flot de ce système est
$$\begin{aligned} g^t : S^1 \times S^1 &\to S^1 \times S^1 \\ (\phi_1, \phi_2) &\mapsto (\phi_1 + \alpha_1 t, \phi_2 + \alpha_2 t)\ . \end{aligned}$$
Démontrer que si $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$, alors n'importe quelle orbite $\left\{g^t\left(\phi_1, \phi_2\right),\ t \geq 0\right\}$ est dense sur le tore.

**Indication :** utiliser le théorème du retour de Poincaré directement ou le résultat de l'exercice précédent.

## 6 Exercice facultatif mais très joli

Considérer le premier chiffre des nombres $2^n$ : $1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, \ldots$ Est-ce-que la suite renferme le chiffre 7 ? Lequel des chiffres 7 et 8 apparaît le plus souvent ? Avec quelle probabilité ?

**Indication :** (1) considérer le flot défini par
$$\begin{aligned} g : [0, 1) &\to [0, 1) \\ x &\mapsto x + \log 2 \mod 1\,, \end{aligned}$$
où log désigne le logarithme en base dix, (2) montrer que $2^n$ commence par le chiffre $k$ si et seulement si
$$\log k \leq g^n 0 < \log\left(k + 1\right)\ ,$$
(3) utiliser le théorème du retour de Poincaré et le fait que $\log 2$ est irrationnel.