# Mécanique II : Corrigé 9

## 1 Surface de révolution

Considérer une particule de masse $m = 1$ soumise à aucune force externe et confinée sur une surface de révolution selon l'axe vertical,

$$S = \{(r(z)\cos\phi, r(z)\sin\phi, z)\,,\ \phi \in [-\pi, \pi]\,,\ z \in \mathbb{R}\}\ ,$$

avec $r$ une certaine fonction lisse.

1. Faire un schéma de l'allure de la surface $S$.
2. Déterminer lagrangien du système.
3. Déterminer les variables cycliques du système et en déduire que le système est complètement intégrable.
4. Montrer que la conservation de $p_\phi$ peut être écrite comme $r(z)v\sin\alpha = \text{constante}$, où $v$ est la norme de la vitesse de la particule et $\alpha$ l'angle entre la trajectoire et le méridien
$$\{(r(z)\cos\phi, r(z)\sin\phi, z)\,,\ z \in \mathbb{R}\}\ .$$
5. Déduire de la conservation de l'énergie le théorème de Clairaut :
$$r(z)\sin\alpha = \text{constante}\,,$$
et l'interpréter.

*Contact pour cette série : Julien Guillod (julien.guillod@unige.ch)

## 2 Système intégrable

Considérer le système décrit dans l'exercice précédent.

1. En utilisant la conservation de $p_\phi$ et de l'énergie intégrer le système.
2. Intégrer le système explicitement pour un cône, $r(z) = z$.

3. Résoudre le problème numériquement pour d'autres surfaces (paraboloïde, hyperboloïde, ellipsoïde,...).

## 3 Système non-autonome

Considérer une particule de masse $m = 1$ soumise à la gravité et confinée sur un cercle de rayon $r$ en rotation autour de son diamètre avec vitesse angulaire $\omega$,

$$S(t) = \{(r \sin\phi \cos\omega t, r \sin\phi \sin\omega t, r\cos\phi)\,,\ \phi \in [0, 2\pi]\}\ .$$

1. Déterminer l'énergie potentielle $U$ et l'énergie cinétique $T$ puis déduire le lagrangien $L$.
2. Déterminer le potentiel effectif $V$ tel que $L = \frac{r^2}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$.
3. Dessiner le potentiel effectif $V$ lorsque la vitesse de rotation $\omega$ est lente ou rapide.
4. Représenter le flot dans l'espace de phase et interpréter la situation.