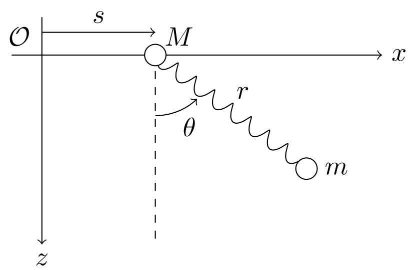
Mécanique II : Série 12

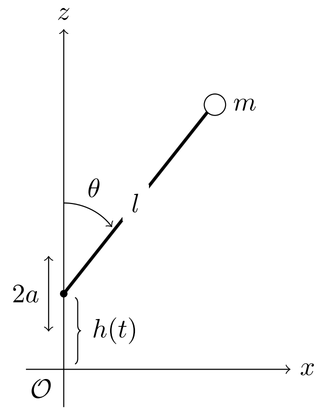
Exercice 1 : Soit le système ci-à-droite. Une masse M glisse sans frottement le long de l'axe Ox, et on appelle s sa coordonnée selon cet axe. Une masse m, soumise à la gravitation, est liée à la masse M par un ressort. On repère m en coordonnées polaires r, θ par rapport à M. Le potentiel du ressort est $\cosh(r)$.



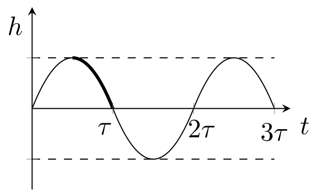
1. Ecrire le lagrangien du système comme fonction de $s, r, \theta, \dot{s}, \dot{r}, \dot{\theta}$.
2. Identifier tous les points d'équilibre (s_0, r_0, θ_0) de ce système. En notant $\mathbf{u} = (\delta s, \delta r, \delta\theta)^T = (s - s_0, r - r_0, \theta - \theta_0)^T$, écrire un lagrangien quadratique autour de ces points sous la forme $\tilde{L} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}^T A \dot{\mathbf{u}} - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T B \mathbf{u}$ avec A, B deux matrices 3×3.
3. A partir de maintenant, on suppose que $M = m = g = 1$ pour simplifier. Trouver les modes propres, les fréquences propres et écrire le lagrangien pour les coordonnées normales $\mathbf{Q}$ (à spécifier).

Exercice 2 : Stabilité paramétrique. On considère un pendule inversé de masse m dont le point de suspension oscille le long de l'axe vertical. La longueur de la tige est l, et on choisit comme coordonnée généralisée l'angle θ entre la verticale (z positif vers le haut) et la tige. On suppose que le point d'attache se trouve à une hauteur $h(t)$ qui oscille avec une amplitude $2a$ et une période 2τ. Le but est de montrer que si les oscillations sont de petite amplitude et suffisamment rapides, le point d'équilibre $\theta = 0$ devient stable.

1. Ecrire le lagrangien L du système (pour une fonction $h(t)$ quelconque) et montrer que l'équation du mouvement est
$$\ddot{\theta} = \frac{1}{l}\left(\ddot{h}(t) + g\right)\sin\theta \ .$$



2. On suppose que le point d'attache subit une accélération constante positive $\ddot{h}(t) = c$ quand $t \in [0, \tau)$, puis une accélération négative $\ddot{h}(t) = -c$ quand $t \in [\tau, 2\tau)$, puis à nouveau c lorsque $t \in [2\tau, 3\tau)$ et ainsi de suite (voir figure). Montrer que l'on doit choisir $c = \frac{8a}{\tau^2}$ pour que l'amplitude soit $2a$. Indication : s'aider du graphe de h entre $\frac{\tau}{2}$ et τ.
3. Ecrire l'équation du mouvement linéarisée autour de $\theta = 0$ lorsque $t \in [0, \tau)$ et $t \in [\tau, 2\tau)$.
4. On suppose que $\tau^2 < \frac{8a}{g}$. Ecrire la solution du système au temps 2τ (une période d'oscillation du point d'attache) en fonction de $\theta(0), \dot{\theta}(0)$ sous la forme
$$\begin{pmatrix}\theta(2\tau)\\ \dot{\theta}(2\tau)\end{pmatrix} = M \begin{pmatrix}\theta(0)\\ \dot{\theta}(0)\end{pmatrix}$$
où M est une matrice. Indication : utiliser l'Exercice 3 de la Série 11.



5. Montrer que $\det(M) = 1$ (aucun calcul nécessaire !) et appliquer le critère de la trace pour $g = 9.81$ $[m/s^2]$, $l = 0.2$ $[m]$, $a = 0.01$ $[m]$ et les deux valeurs $\tau = \frac{1}{60}$ $[s]$ et $\tau = \frac{1}{62}$ $[s]$. Qu'en déduit-on sur la stabilité du point $\theta = 0$?
6. On cherche à trouver une condition plus précise pour la stabilité de ce point. En introduisant les variables $\varepsilon = \frac{g\tau^2}{8a}$ et $\mu = \sqrt{\frac{8a}{l}}$ développer la trace au 4ème ordre en ε, μ (que nous supposons très petits) pour obtenir l'expression $\mathrm{tr}M \approx 2 + 4\mu^2\varepsilon - \frac{1}{3}\mu^4$. Donner, sous ces approximations la condition sur τ pour que le point $\theta = 0$ soit stable. Note : par définition, $\varepsilon^k\mu^n$ est d'ordre $k + n$.