Mécanique quantique I, Série 1, Printemps 2013

Mercredi 27 février 2013 (EP, Auditoire Stückelberg)

Prof. D. van der Marel (dirk.vandermarel@unige.ch)

Exercices: J. Guillod (julien.guillod@unige.ch), O. Peil (oleg.peil@unige.ch)

I. PROBABILITÉS

La loi de probabilité discrète de densité $p : \mathbb{N} \to [0, 1]$ avec

$$\sum_{x\in\mathbb{N}} p(x) = 1\,,$$

est l'application

$$P(I) = \sum_{x\in\mathbb{N}} p(x)\,,$$

définie pour tout ensemble fini $I \subset \mathbb{N}$.
La loi de probabilité continue de densité $p : \mathbb{R} \to [0, 1]$ avec

$$\int_{\mathbb{R}} p(x) = 1\,,$$

est l'application

$$P(I) = \int_I p(x)\mathrm{d}x\,,$$

définie pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$. La valeur moyenne d'une fonction φ est définie respectivement pour une loi discrète et une loi continue par

$$\langle\varphi\rangle = \sum_{x\in\mathbb{N}} \varphi(x)p(x)\,, \qquad \langle\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)p(x)\mathrm{d}x\,.$$

La valeur moyenne de la loi de probabilité P est définie par $\langle x\rangle$, et la variance est donnée par

$$(\Delta x)^2 = \left\langle \big(x - \langle x\rangle\big)^2 \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x\rangle^2\,.$$

Voir l'appendice A. du livre *Mécanique quantique* de J.-L. Basdevant et J. Dalibard pour plus de détails.
Calculer la moyenne et la variance des lois de probabilités suivantes :

a. la distribution de Gauss :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

b. la distribution de Poisson :

$$p(n) = \frac{\lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda}}{n!}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

II. TRANSFORMATION DE FOURIER

La transformation de Fourier d'une fonction $f(x)$ est la fonction

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x) \mathrm{d}x$$

et la transformation inverse est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \hat{f}(k) \mathrm{d}k \,.$$

Voir l'appendice B. du livre *Mécanique quantique* de J.-L. Basdevant et J. Dalibard pour plus de détails.

a. Montrer que la transformation de Fourier de $f'(x)$ est $\mathrm{i}k\hat{f}(k)$.

b. Déterminer la transformation de Fourier de la gaussienne

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \,.$$

c. Montrer que $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle \hat{f}_1, \hat{f}_2 \rangle$ où

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(x) f_2(x) \mathrm{d}x \,,$$

est le produit scalaire de l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

d. Lire et comprendre le paragraphe 3.6 de l'appendice B. du livre *Mécanique quantique* de J.-L. Basdevant et J. Dalibard.