Mécanique quantique II
Corrigé série 10

1 Diffusion par un potentiel central

Le but est d'étudier la diffusion d'une particule de masse m dans le potentiel central

$$V(r) = -\frac{\hbar^2}{ma^2}\frac{1}{\cosh^2(r/a)},$$

avec $a > 0$.

1. L'équation de Schrödinger pour la partie radiale de la fonction d'onde est

$$u''_{0,k} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{\hbar^2}{ma^2}\frac{1}{\cosh^2(r/a)}\right)u_{0,k} = 0,$$

c'est-à-dire

$$u''_{0,k} + k^2 u_{0,k} + \frac{2}{a^2\cosh^2(r/a)}u_{0,k} = 0,$$

avec

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

En posant $y(x) = u_{0,k}(ax)$, l'équation devient

$$y'' + a^2k^2 y + \frac{2}{\cosh^2 x}y = 0,$$

et donc la solution générale est donnée par

$$y(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}akx}(\tanh x - \mathrm{i}ak) + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}akx}(\tanh x + \mathrm{i}ak).$$

La condition au bord $u_{0,k}(0) = 0$ devient avec le changement de variable $y(0) = 0$. Comme

$$y(0) = -\mathrm{i}akA + \mathrm{i}akB,$$

alors $A = B$ et la solution est donnée à une amplitude près par

$$y(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}akx}(\tanh x - \mathrm{i}ak) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}akx}(\tanh x + \mathrm{i}ak) = 2\cos(akx)\tanh x + 2ak\sin(akx).$$

En effectuant le changement de variables inverse,

$$u_{0,k}(r) = y(r/a) = 2\cos(kr)\tanh(r/a) + 2ak\sin(kr).$$

2. Lorsque $r \approx \infty$, le développement asymptotique de $u_{0,k}(r)$ est

$$u_{0,k}(r) \approx 2\cos(kr) + 2ak\sin(kr).$$

Pour trouver le déphasage, il faut réécrire cette expression comme un sinus avec déphasage. Le développement asymptotique peut se réécrire comme

$$u_{0,k}(r) \approx \frac{1}{\mathrm{i}}\left[(ak+\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} - (ak-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\right] = A\sin(kr+\delta_0),$$

avec

$$A = 2\,|ak+\mathrm{i}| = 2\sqrt{1+a^2k^2}, \qquad \delta_0 = \arg(ak+\mathrm{i}) = \arctan\left(\frac{1}{ak}\right).$$

3. La contribution à la section efficace de l'onde s est donnée par

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 = \frac{4\pi}{k^2}\frac{1}{1+a^2k^2} = \frac{2\pi\hbar^4}{\hbar^2 mE + 2a^2m^2E^2}\,.$$

2 Diffusion à basse énergie et approximation de Born

Le but est de calculer la section efficace à basse énergie du potentiel donné par

$$V(r) = \begin{cases} -V_0\,, & r < a\,,\\ 0\,, & r > a\,,\end{cases}$$

et de comparer le résultat avec l'approximation de Born.

1. Dans la région $r > a$, l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde radiale est

$$u''_{k,l} + \left(k^2 - \frac{l\,(l+1)}{r^2}\right)u_{k,l} = 0\,, \qquad\qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,,$$

   et dans la région $r < a$,

$$u''_{k,l} + \left(k'^2 - \frac{l\,(l+1)}{r^2}\right)u_{k,l} = 0\,, \qquad\qquad k' = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}\,.$$

   La diffusion à basse énergie est dominée par l'onde s, c'est-à-dire par $l = 0$, dont la solution générale peut s'écrire comme

$$u_{k,0}(r) = \begin{cases} A\sin(k'r) + B\cos(k'r)\,, & r < a\,,\\ C\sin(kr+\delta_0)\,, & r > a\,,\end{cases}$$

   avec $A, B, C, \delta_0 \in \mathbb{R}$.
2. La condition au bord $u_{k,0}(0) = 0$, impose que $B = 0$, et les constantes A et δ sont fixées par le fait que $u_{k,0}$ doit être continûment différentiable en $r = a$:

$$\begin{aligned} A\sin(k'a) &= C\sin(ka+\delta_0)\,,\\ Ak'\cos(k'a) &= Ck\cos(ka+\delta_0)\,.\end{aligned}$$

   Pour déterminer δ_0 qui est la seule quantité qui nous intéresse, il suffit de diviser les deux équations entre elles,

$$k\tan(k'a) = k'\tan(ka+\delta_0)\,,$$

   c'est-à-dire

$$\delta_0 = \arctan\left(\frac{k}{k'}\tan(k'a)\right) - ka\,.$$

3. La limite de basse énergie correspond à $k \approx 0$ et $k' \approx k_0$ avec

$$k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}\,,$$

   et par conséquent,

$$\delta_0 \approx ka\left(\frac{\tan(k_0a)}{k_0a} - 1\right)\,.$$

   La section efficace est donc

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 \approx 4\pi a^2\left(\frac{\tan(k_0a)}{k_0a} - 1\right)^2\,.$$

4. Dans l'approximation de Born, si k est la norme du vecteur d'onde et θ l'angle de diffusion, alors
$$\kappa = 2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$
et l'amplitude de diffusion est donnée par
$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty r \sin(\kappa r) V(r) \, \mathrm{d}r = \frac{2mV_0}{\hbar^2 \kappa} \int_0^a r \sin(\kappa r) \mathrm{d}r = \frac{2mV_0}{\hbar^2 \kappa^3} \left[\sin(\kappa a) - \kappa a \cos(\kappa a)\right].$$
5. Dans la limite de basse énergie, $k \approx 0$, donc $\kappa \approx 0$, si bien que
$$f(\theta) \approx \frac{2mV_0 a^3}{3\hbar^2},$$
et donc la section efficace est donnée par
$$\sigma = \int_{S^1} \left|f(\theta)\right|^2 \mathrm{d}\Omega \approx \frac{16\pi m^2 V_0^2 a^6}{9\hbar^4}.$$
6. Dans la limite $V_0 \approx 0$, alors $k_0 \approx 0$ et donc la section efficace du point 3 est
$$\sigma_0 \approx 4\pi a^2 \left(\frac{\tan(k_0 a)}{k_0 a} - 1\right)^2 \approx 4\pi a^2 \left(\frac{k_0^2 a^2}{3}\right)^2 = \frac{4\pi k_0^4 a^6}{9} = \frac{16\pi m^2 V_0^2 a^6}{9\hbar^2}.$$
Par conséquent, dans la limite de basse énergie $E \approx 0$ et de potentiel faible $V_0 \approx 0$, l'approximation de Born coïncide avec le calcul exact.

3 Déphasage de l'onde p par une sphère dure

Le but est d'étudier le déphasage δ_1 de l'onde p, *i.e.* $l = 1$, associée à la diffusion par une sphère dure,
$$V(r) = \begin{cases} -\infty, & r < a \\ 0 & r > a. \end{cases}$$

1. Lorsque $r > a$, l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde radiale est
$$u_{k,l}'' + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) u_{k,l} = 0, \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},$$
et dans cet exercice nous choisissons $l = 1$, pour avoir la diffusion de l'onde p. Avec le changement de variable $\varphi(x) = u_{1,k}(x/k)$, l'équation devient
$$\varphi'' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \varphi = 0,$$
et il s'agit de vérifier que
$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x + c\left(\frac{\cos x}{x} + \sin x\right),$$
est solution de cette équation différentielle. Nous avons
$$\varphi'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + \sin x + c\left(-\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} + \cos x\right) = \sin x + c \cos x - \frac{\varphi(x)}{x},$$
$$\varphi''(x) = \cos x - c \sin x - \frac{\varphi'(x)}{x} + \frac{\varphi(x)}{x^2} = -\frac{\sin x}{x} + \cos x - c\left(\frac{\cos x}{x} + \sin x\right) + \frac{2\varphi(x)}{x^2},$$
si bien que l'équation est satisfaite.

2. La condition au bord est $u_{k,1}(a) = 0$, et comme

$$u_{k,1}(a) = \varphi(ka) = \frac{\sin ka}{ka} - \cos ka + c\left(\frac{\cos ka}{ka} + \sin ka\right),$$

la solution est donnée par

$$c = \frac{\cos ka - \frac{\sin ka}{ka}}{\sin ka + \frac{\cos ka}{ka}} = \frac{ka\cos ka - \sin ka}{ka\sin ka + \cos ka}.$$

3. Lorsque $r \approx \infty$, le développement asymptotique de la fonction d'onde radiale est donné par

$$u_{k,1}(r) \approx -\cos kr + c\sin kr\,.$$

Pour déterminer le déphasage δ_1, il faut mettre cette expression sous la forme d'un sinus avec déphasage,

$$u_{k,1}(r) \approx -\frac{1}{2}\left[(1+\mathrm{i}c)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} + (1-\mathrm{i}c)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\right] = -A\cos\left(kr+\delta_1\right) = A\sin\left(kr - \frac{\pi}{2} + \delta_1\right),$$

avec

$$A = |1+\mathrm{i}c| = \sqrt{1+c^2}, \qquad \delta_1 = \arg(1+\mathrm{i}c) = \arctan(c)\,.$$

4. Dans la limite de basse énergie, $k \approx 0$, le déphasage est donné par

$$\delta_1 = \arctan\left(\frac{ka\cos ka - \sin ka}{ka\sin ka + \cos ka}\right) \approx \arctan\left(\frac{-(ka)^3}{3}\right) \approx -\frac{(ka)^3}{3}\,.$$

Le déphasage de l'onde s est donné par $\delta_0 = -ka$ et donc δ_1 est négligeable devant δ_0 dans la limite de basse énergie.