Mécanique quantique II – Série 1

à rendre le 25 septembre 2012 – assistant : Julien Guillod (SCI 212)

1 Bra et Ket

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert de dimension n, et $\mathscr{B} = \{|e_i\rangle,\ i \in \{1\dots n\}\}$ une base orthonormée.

1. Décomposer $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$ dans la base $\mathscr{B}$.
2. Donner la définition de l'espace dual $\mathscr{H}^*$ et de la base duale $\mathscr{B}^*$.
3. Déterminer l'action de $P_i = |e_i\rangle\langle e_i|$ sur un vecteur $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$ et calculer P_i^2.
4. Donner la définition d'un opérateur hermitien et déterminer les proprietés des valeurs propres et des vecteurs propres d'un tel opérateur.
5. Donner une base de l'espace des opérateurs sur $\mathscr{H}$ et décomposer l'opérateur identité dans cette base.

2 Equation de Schrödinger

1. Donner l'équation caractérisant l'évolution d'un état $|\psi(t)\rangle$ par un Hamiltonien $H(t)$.
2. En supposant que H ne dépend pas du temps, résoudre cette équation formellement.
3. Si $|\psi(0)\rangle$ est un vecteur propre de H calculer $|\psi(t)\rangle$.

3 Système à deux états

L'espace de Hilbert associé à une particule de spin 1/2 est $\mathbb{C}^2$ et une base orthonormée est donnée par les deux états "up" et "down" :

$$|u\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad |d\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Ainsi chaque état quantique $|\psi\rangle$ peut être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de base $|\psi\rangle = a|u\rangle + b|d\rangle$, avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

1. Donner les opérateurs de projection du spin le long des trois axes, S_x, S_y et S_z, en supposant que $|u\rangle$ et $|d\rangle$ sont les vecteurs propres de S_z. Est-ce-que ces opérateurs commutent et quelle en est l'interprétation physique ?
2. Calculer $\langle\psi|S_x|\psi\rangle$ et $\langle\psi|S_z|\psi\rangle$ pour
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\rangle + |d\rangle).$$
3. L'Hamiltonien d'un spin dans un champ magnétique $\mathbf{B}$ est
$$H = -\gamma\,\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}, \qquad \mathbf{S} = \left(S_x, S_y, S_z\right).$$
Si $|\psi(0)\rangle = |u\rangle$, déterminer l'évolution $|\psi(t)\rangle$ du spin dans un champ magnétique orienté selon la direction x, $\mathbf{B} = Be_x$.

4 Oscillateur harmonique

L'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique à une dimension est donné par

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 \,.$$

Par simplification on choisit $m = \omega = \hbar = 1$, si bien que

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{X^2}{2} \,.$$

Pour trouver les états propres de l'énergie, on définit les opérateurs

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (X + iP) \,, \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (X - iP) \,,$$

avec lesquels on peut écrire l'Hamiltonien comme

$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2} \,.$$

1. Calculer les commutateurs $[a, a^\dagger]$ et $[a, H]$, en utilisant le commutateur $[X, P] = i$.
2. Soit $|E\rangle$ un état propre de H, c'est-à-dire

   $$H|E\rangle = E|E\rangle \,.$$

   Utiliser le premier point pour calculer $Ha|E\rangle$ et interpréter le résultat obtenu.
3. Expliquer pourquoi le résultat précédent implique d'existence d'un état fondamental $|0\rangle$ pour lequel $a|0\rangle = 0$. Déterminer l'énergie de cet état fondamental.

5 Barrière de potentiel

L'Hamiltonien d'une particule de masse m dans une barrière de potentiel à une dimension est

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x) \,,$$

avec V la barrière de potentiel suivante :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 \,, & |x| < a \,, \\ 0 \,, & |x| > a \,. \end{cases}$$

1. Déterminer la forme des solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire dans les trois régions $x < -a$, $|x| < a$ et $x > a$ en supposant que l'énergie totale du système E vérifie $E < V_0$.
2. On suppose l'existence d'une onde plane provenant de la région $x < -a$, c'est-à-dire $\psi_I(x) = Ae^{ikx}$. Décrire sans faire les calculs l'onde réfléchie et l'onde transmise par la barrière de potentiel en utilisant les résultats précédents.