Mécanique quantique II – Série 2

à rendre le 2 octobre 2012 – assistant : Félix Bussières (Pinchat 112)
Pour R-V: felix.bussieres@unige.ch ou 022 379 0527
Exercices à présenter: 1, 3-a-b, 4-b-c

1 Delta de Dirac I

Démontrez les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\delta(ax) &= \frac{1}{|a|}\delta(x)\\ \delta(f(x)) &= \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|\frac{df}{dx}(x_i)|}\end{aligned}$$

où les x_i sont les zéros de $f(x)$. Indice : déterminez les valeurs pour lesquelles la fonction δ diverge, faire une expansion de Taylor de f autour de ces points et retenir le premier terme non-nul.

2 Delta de Dirac II (facultatif)

Dérivez la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{ikx} = 2\pi\delta(x)$$

Indice : utiliser la transformation de Fourier

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{ikx} f(k),\\ f(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ikx} f(x).\end{aligned}$$

3 Fluctuations d'observables et relation d'incertitude

Soient deux observables définies par des opérateurs hermitiens A et B. Le produit de leurs fluctuations dans un état $|\Psi\rangle$ normalisé satisfait la relation d'incertitude

$$\Delta A_\Psi \cdot \Delta B_\Psi \geq \frac{1}{2}|\left\langle [A,B]\right\rangle_\Psi| \tag{1}$$

où la variance est définie par $\Delta A_\Psi^2 \equiv \left\langle (A-\langle A\rangle_\Psi)^2\right\rangle_\Psi$ et la moyenne sur un état par $\langle A\rangle_\Psi \equiv \langle\Psi|A|\Psi\rangle$.

a) Vérifiez explicitement que $\Delta A_\Psi^2 \equiv \left\langle (A-\langle A\rangle_\Psi)^2\right\rangle_\Psi = \left\langle A^2\right\rangle_\Psi - \langle A\rangle_\Psi^2$.

b) Montrer que (1) est en particulier vraie pour $A=\sigma_x$ et $B=\sigma_z$, et donc que $\Delta\sigma_x \cdot \Delta\sigma_z \geq |\langle\sigma_y\rangle|$.

c) On donne l'état d'un paquet d'onde gaussien unidimensionnel en représentation X :

$$\Phi(x) = C e^{ik_0 x} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\right] \quad \text{avec } a > 0. \tag{2}$$

Déterminez la constante C (que l'on supposera réelle). Déterminez en représentation P la transformée de Fourier $\widetilde{\Phi}(k)$ de ce paquet d'onde gaussien (on rappelle que $p = \hbar k$, où k est le nombre d'onde).

d) Vérifiez que l'état $\Phi(x)$ sature la borne inférieure de la relation d'incertitude entre X et P.

4 Etalement d'un paquet d'onde gaussien

On considère une particule de masse m dont la fonction d'onde au temps initial $t = 0$ est décrite par le paquet d'onde gaussien $\Psi(t = 0) = \Phi(x)$ de l'exercice précédent.

a) On suppose que la particule évolue librement selon l'Hamiltonien d'une particule libre : $H = \frac{P^2}{2m}$. Quelle est l'équation qui régit son évolution temporelle ? Explicitez la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ et montrez qu'un paquet d'onde gaussien reste gaussien dans le temps.

b) Calculez la position moyenne $x(t) = \langle\Psi(x, t)|X|\Psi(x, t)\rangle$. Commentez le résultat.

c) Calculez la variance $\Delta x^2(t)$. Commentez le résultat.

5 Puits de profondeur infinie et particules indiscernables (facultatif)

On considère une particule de masse m placée dans un puits de potentiel infini, c'est-à-dire

$$V(x) = 0 \text{ pour } x \in [0, a] \text{ avec } a > 0 \text{ et } V(x) = +\infty \text{ pour } x \notin [0, a]$$

a) Déterminez les états stationnaires $\varphi_n(x)$ de la particule et leurs énergies respectives E_n.

Indications : (i) Explicitez l'équation qui définit les états stationnaires. (ii) Que vaut la fonction d'onde de la particule à l'extérieur du puits et quelle en est la signification physique ? (iii) Explicitez l'Ansatz de la fonction d'onde à l'intérieur du puits et ses conditions de raccord en $x = 0$ et $x = a$. (iv) Déterminez les $\{\varphi_n(x)\}$ et $\{E_n\}$.

b) Quelle est l'énergie de l'état fondamental de N particules indiscernables, respectivement des fermions ou des bosons, placés dans ce puits de potentiel à température nulle ? Justifiez physiquement votre raisonnement.