Mécanique quantique II – Série 7

à rendre le 13 novembre 2012 – assistant : Julien Guillod (SCI 212)

1 Perturbation d'une particule sur un cercle

L'espace de Hilbert pour une particule de masse m confinée sur un cercle de rayon un est $L^2(S^1,\mathbb{C})$. La particule est soumise à un potentiel V si bien que l'Hamiltonien est donné par

$$H = H_0 + V\,, \qquad H_0 = \frac{p^2}{2m}\,, \qquad V = \varepsilon \sin\phi \cos\phi\,,$$

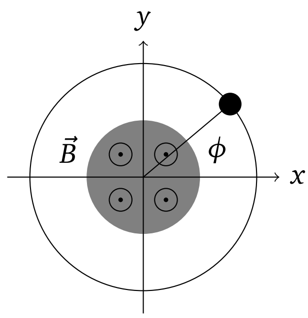
avec $p = -i\partial_\phi$.

1. Déterminer les énergies et les vecteurs propres associés à la particule libre, *i.e.* lorsque $\varepsilon = 0$.
2. Déterminer l'énergie au deuxième ordre en ε et le vecteur propre à l'ordre un pour l'état fondamental.
3. Déterminer les énergies à l'ordre un en ε pour tous les états excités.

2 Quantification et topologie (facultatif)

Le but de cet exercice est de quantifier une particule de masse m évoluant sur un cercle de rayon un avec un champ magnétique vertical et de symétrie radiale $\vec{B} = B(r,z)e_z$ dans la partie grisée, comme montré sur la figure ci-contre. La première chose est de déterminer le Lagrangien et pour cela il faut trouver le potentiel vecteur $\vec{A}$ correspondant au champ $\vec{B}$. En coordonnées cylindrique, le potentiel vecteur $\vec{A}$ est donné par

$$B_z = \partial_r A_\phi - \frac{1}{r}\partial_\phi A_r\,.$$



Comme $\vec{B}$ ne dépend pas de ϕ, alors $\partial_\phi A_r = 0$ et donc le potentiel vecteur est donné par

$$A_\phi(r,z) = \int_0^r B_z(r',z)\,\mathrm{d}r'\,.$$

En particulier sur le cercle S^1 de rayon un dans le plan $z = 0$, nous avons que $A_\phi(1,0) = A$ avec A une constante réelle. La constante A est reliée au flux Φ traversant la surface dont le bord est le cercle, $\Phi = 2\pi A$. Le terme de couplage dans le Lagrangien d'une particule avec le champ électromagnétique est donné par $A_r\dot{r} + A_\phi\dot{\phi} + A_z\dot{z}$ qui lorsque la particule est confinée au cercle devient $A_\phi\dot{\phi} = A\dot{\phi}$. Par conséquent le Lagrangien est donné par

$$\mathscr{L} = \frac{m\dot{\phi}^2}{2} + A\dot{\phi}\,,$$

avec $\dot{\phi} \in C(S^1,\mathbb{R})$.

1. Déterminer l'équation du mouvement classique, remarquer quelle est indépendante de A et expliquer pourquoi.

2. Montrer que l'Hamiltonien classique est égal à

$$\mathscr{H} = \frac{(p-A)^2}{2m},$$

où p est le moment conjugué à ϕ et en déduire les équations de Hamilton.

3. Déterminer la transformation canonique qui transforme $\mathscr{H}$ en la même expression avec $A=0$ et expliquer à partir du Lagrangien qu'il est normal qu'une telle transformation canonique existe.

4. Comme le crochet de Poisson entre ϕ et p est $\{\phi, p\} = 1$ cela se traduit en mécanique quantique par demander que $[\hat{\phi}, \hat{p}] = \mathrm{i}$. Cette algèbre admet la représentation suivante $\hat{p} = -\mathrm{i}\partial_\phi$ et $\hat{\phi} = \phi$ sur l'espace de Hilbert $L^2(S^1, \mathbb{C})$ et donc l'Hamiltonien quantique est

$$H = -\frac{\left(\partial_\phi - \mathrm{i}A\right)^2}{2m}.$$

Déterminer les énergies propres et les états propres de H.

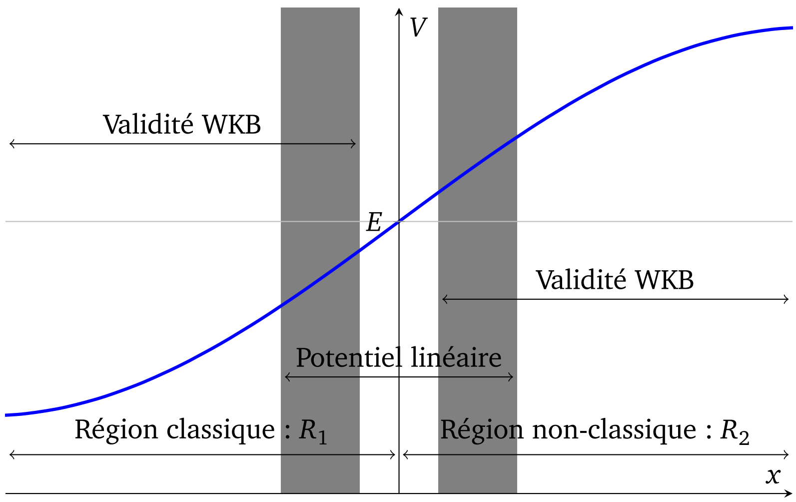
5. Montrer que la transformation de jauge $\psi \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}A\phi}\psi$ supprime A de l'équation de Schrödinger mais ne conserve pas la 2π-périodicité de ψ.

6. Réfléchir au fait que les énergies propres quantiques dépendent de A, alors que la solution classique pas. Est-ce aussi le cas, pour une particule sur une ligne au lieu d'un cercle ?

Remarque : le fait qu'un système quantique dépende de A alors que le système classique pas, n'est pas une particularité mathématique mais peut-être effectivement mesuré, par exemple pour l'effet Aharonov-Bohm ou dans des supra-conducteurs.

3 Formule de connexion pour WKB

Au voisinage d'un point de rebroussement classique l'approximation WKB n'est plus valable. Le but de cet exercice est de connecter les approximations WKB de la région classique et de la région non-classique pour une particule d'énergie E dans un potentiel ayant la forme suivante :

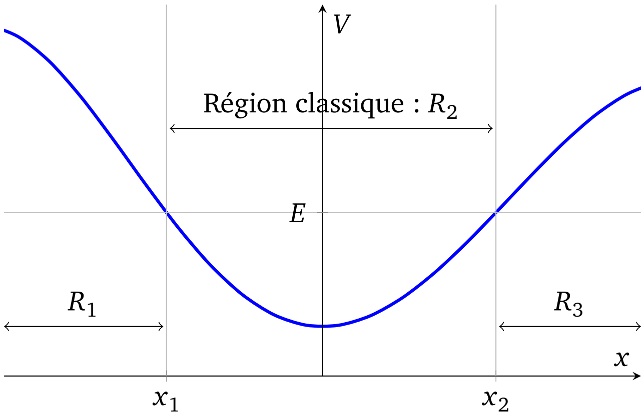


Au voisinage du point de rebroussement, choisi en $x = 0$, nous allons approximer le potentiel par une fonction linéaire et résoudre l'équation de Schrödiger stationnaire. Cela permettra de connecter les approximations WKB entre les deux régions en supposant que dans les régions grisées l'approximation WKB et l'approximation du potentiel linéaire sont toutes deux valables.

1. Ecrire les approximations WKB dans les régions R_1 et R_2.
2. Dans le voisinage du point de rebroussement $x = 0$, approximer le potentiel par une fonction linéaire
$$V(x) = E + V'(0)x\,,$$
et résoudre exactement l'équation de Schrödinger stationnaire.
Indication : dans des bonnes coordonnées $z = \alpha x$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à déterminer, l'équation peut se réécrire comme
$$\psi'' = z\psi\,,$$
dont la solution générale est donnée par les fonctions de Airy,
$$\psi(z) = a\,\mathrm{Ai}(z) + b\,\mathrm{Bi}(z)\,.$$
3. En supposant que dans les régions grisées les approximations des deux points précédents soient valables, calculer explicitement dans chaque région grisée les approximations WKB du point 1 dans l'approximation du potentiel linéaire.
4. Dans les mêmes régions grisées déterminer explicitement les approximations du point 2 dans la limite où $|x|$ est grand.
Indication : les formes asymptotiques des fonctions de Airy sont données par
$$\mathrm{Ai}(z) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}\,, \qquad \mathrm{Bi}(z) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}z^{1/4}}\,\mathrm{e}^{\frac{2}{3}z^{3/2}}\,,$$
pour $z \gg 0$ et par
$$\mathrm{Ai}(z) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}}\sin\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)\,, \quad \mathrm{Bi}(z) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}}\cos\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)\,,$$
pour $z \ll 0$
5. Déterminer les constantes de manière à ce que les solutions obtenues aux points 3 et 4 coïncident dans les régions grisées et monter que l'approximation WKB est donnée par
$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{2A}{\sqrt{p(x)}}\sin\left(\displaystyle\int_x^0 p(x')\,\mathrm{d}x' + \frac{\pi}{4}\right)\,, & x < 0\,, \\ \dfrac{A}{\sqrt{|p(x)|}}\exp\left(-\displaystyle\int_0^x |p(x')|\,\mathrm{d}x'\right)\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

4 Puits de potentiel dans l'approximation WKB

Le but est de déterminer, dans l'approximation semi-classique, les énergies possibles d'une particule en une dimension dans un puits de potentiel V ayant la forme suivante :



Pour une énergie E donnée, la région classique est donnée par $R_2 = \{x \in \mathbb{R} : V(x) < E\}$ et les deux autres régions R_1 et R_3 sont définies comme les deux composantes du complémentaire. Le but est d'utiliser le résultat de l'exercice précédent aux points de rebroussement x_1 et x_2 afin de connecter les approximations WKB dans les trois régions.

1. Utiliser le résultat de l'exercice précédent pour déterminer les deux approximations WKB au voisinage de chaque point de rebroussement.
2. Déterminer la contrainte sur l'énergie de manière à ce que ces deux approximations coïncident dans la région R_2.
3. Dessiner schématiquement la solution WKB trouvée et interpréter le résultat.