Mécanique quantique II – Série 8

À rendre le 27 octobre 2012 – assistant : Félix Bussières (Pinchat 112)
Pour R-V: felix.bussieres@unige.ch ou 022 379 0527
Exercices à présenter: 1-a-b, 2-a-b

1 Transitions atomiques

Considérons un atome d'hydrogène illuminé par une onde plane oscillant à une fréquence angulaire ω et polarisée selon $\hat{\boldsymbol{z}}$.

a) Quel est le Hamiltonien total de l'électron, en incluant la perturbation causée par le champ électrique de l'onde plane ?

b) Supposons que l'électron est initialement dans le niveau fondamental. On suppose aussi que la fréquence du champ électrique est suffisamment près de la fréquence de Bohr associée aux niveaux $n = 1$ et $n = 2$. Montrez que seul l'état $|n, l, m\rangle = |2, 1, 0\rangle$ est accessible, et que les autres transitions sont interdites. Justifiez bien votre raisonnement vous permettant d'affirmer qu'une transition est autorisée ou interdite.

c) Quelles sont les transitions autorisées (toujours avec $n = 2$) lorsque le champ est polarisé selon $\hat{\boldsymbol{x}}$? Selon $\hat{\boldsymbol{y}}$?

d) Calculez les fréquences de Rabi associées aux transitions trouvées en b) et c).

e) Tenons maintenant compte du couplage spin-orbit (soit entre le spin de l'électron et son moment cinétique), de sorte que les états propres sont $|n, \ell, j, m_j\rangle$ (voir l'exercice 1 de la série 4, ou encore le complément A, paragraphe 2, du chapitre 10 du Cohen-Tannoudji). Déterminez quelles transitions de $n = 1$ à $n = 2$ sont permises.

2 Susceptibilité d'un ensemble de spins indépendants

Considérons un ensemble de spins indépendants. L'ensemble est soumis à un champ magnétique externe oscillant : $\boldsymbol{B}(t) = B_x(t)\hat{\boldsymbol{x}} + B_y(t)\hat{\boldsymbol{y}} + B_z\hat{\boldsymbol{x}}$, où $B_x(t) = b\cos\omega_e t$, $B_y(t) = b\sin\omega_e t$ et $B_z \gg b$ est une constante. Nous désirons utiliser la théorie de la réponse linéaire pour calculer l'aimantation moyenne selon $\boldsymbol{x}$ à un temps $t > 0$. Comme les spins sont indépendants, on peut faire ce calcul pour un seul spin.

Le Hamiltonien est donné par

$$H = -\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{B}.$$

L'aimantation est reliée au spin selon $\boldsymbol{M} = -g\mu_B\boldsymbol{S}$, où μ_B est le magnéton de Bohr et $g \approx 2$. Le Hamiltonien peut donc s'écrire comme

$$H = g\mu_B S_z B_z + g\mu_B(S_x B_x(t) + S_y B_y(t)) = H_0 + H'(t).$$

On définit les opérateurs $S_\pm = S_x \pm iS_y$ et $M_\pm = -g\mu_B S_\pm$, ainsi que les fonctions $B_\pm(t) = B_x(t) \pm iB_y(t) = b\mathrm{e}^{\pm i\omega_e t}$.

a) Utilisez l'équation du mouvement des opérateurs en représentation de Heisenberg pour montrer que sous l'effet de H_0, on a

$$S_\pm(t) = S_\pm \mathrm{e}^{\pm i\omega_0 t}$$

où $\omega_0 = g\mu_B B_z$ est la fréquence de Larmor, c'est-à-dire la fréquence angulaire de précession d'un spin isolé soumis à un champ magnétique uniforme.

b) Déterminez l'expression de $\langle M_\pm \rangle_t$ en fonction de $S_\pm(t)$ et $B_\pm(t)$. Exprimez en fonction des susceptibilités

$$\chi_{\alpha,\beta}(t-t') = (g\mu_B)^2 \frac{i}{2\hbar} \left\langle [S_\alpha(t), S_\beta(t')] \right\rangle_0 \theta(t-t')$$

où $\alpha, \beta \in \{+,-\}$.

c) Montrez que

$$[S_+(t), S_-(t')] = [S_+(t-t'), S_-].$$

d) Utilisez les résultats de b) et c) pour exprimez $\chi_{+-}(t)$ et $\chi_{-+}(t)$ en fonction de S_z et de ω_0. Montrez que $\chi_{++}(t) = \chi_{--}(t) = 0$.

e) Calculez les transformées de Fourier $\tilde{\chi}_{+-}(\omega)$ et $\tilde{\chi}_{-+}(\omega)$ de $\chi_{+-}(t)$ et de $\chi_{-+}(t)$. Vous aurez besoin de l'identité

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{i(\omega+\omega_0)t}\theta(t) = \frac{i}{\omega + \omega_0 + i\delta}$$

où δ est un nombre positif infiniment petit.

f) Utilisez les résultats précédents pour montrer que

$$\langle M_x \rangle_t = (g\mu_B)^2 \langle S_z \rangle_0 \,\mathrm{Re}\left(\frac{b\mathrm{e}^{i\omega_e t}}{\omega_e - \omega_0 - i\delta} \right).$$

g) Utilisez l'identité

$$\frac{1}{x \pm i0^+} = \mathrm{VP}\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x),$$

où VP désigne la «valeur principale», pour écrire $\langle M_x \rangle_t$ comme

$$\langle M_x \rangle (t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{\chi}_{-+}(\omega_e)\right] B_x(t) + \mathrm{Im}\left[\tilde{\chi}_{-+}(\omega_e)\right] B_y(t) \tag{1}$$

en explicitant les parties réelles et imaginaires de $\tilde{\chi}_{+-}(\omega)$.

h) L'énergie du système évolue selon

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mathrm{Tr}\left(\rho \frac{\mathrm{d}H'(t)}{\mathrm{d}t}\right).$$

Utilisez cette expression pour montrer que

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mathrm{Im}\left[\chi_{-+}(\omega_e)\right] b^2 \omega_e.$$