Mécanique quantique II – Série 9

A rendre le 4 décembre 2012 – Assistante : Elisabeth Agoritsas (EP 018)
Pour R-V: elisabeth.agoritsas@unige.ch ou 022 379 62 00
Exercices à présenter: 1, 2, 3a.

Veuillez utiliser dans toute cette série les conventions et notations suivantes pour les transformées de Fourier, respectivement selon les composantes spaciale et temporelle :

$$f(q) = \int_{\mathbb{R}} dx \cdot e^{-iqx} f(x)\,, \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{dq}{2\pi} \cdot e^{iqx} f(q) \tag{1}$$

$$f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} dt \cdot e^{i\omega t} f(t)\,, \quad f(t) = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{d\omega}{2\pi} \cdot e^{-i\omega t} f(\omega) \tag{2}$$

où pour alléger la notation seul le nom des variables permet de distinguer si l'on est dans l'espace direct ou réciproque.

1 Convolution et transformée de Fourier

La théorie de la réponse linéaire permet de relier la réponse d'un système $\delta A(x,t)$ à la convolution entre la susceptibilité $\chi(x,x',t,t')$ et le champ $h(x',t')$ qui définit la perturbation :

$$\underbrace{\delta A(x,t) \equiv \langle A(x)\rangle_t - \langle A(x)\rangle_{t=-\infty}}_{\text{Réponse pour l'observable } A(x)} = \int dx' \int dt' \cdot \underbrace{\chi(x,x',t,t')}_{\text{Susceptibilité}} \cdot \underbrace{h(x',t')}_{\text{Champ}} \tag{3}$$

Montrez en détail que si la susceptibilité est invariante par translation dans l'espace et le temps, c'est-à-dire si $\chi(x,x',t,t') = \chi(x-x',t-t')$, cette convolution devient un produit dans l'espace réciproque

$$\delta A(q,\omega) = \chi(q,\omega) \cdot h(q,\omega) \tag{4}$$

Indications : Exprimez successivement $\delta A(q,\omega)$ en fonction de $\delta A(x,t)$, puis de $\chi(x-x',t-t')$ et $h(x',t')$, faites ensuite apparaître $h(q,\omega)$ et remaniez les différents termes pour faire apparaître $\chi(q,\omega)$. Les changements de variables $\tau = t-t'$, $T = \frac{t+t'}{2}$, $y = x-x'$ et $Y = \frac{y+y'}{2}$ peuvent aider à faire apparaître des fonctions δ de Dirac en cours de route.

2 Approximation de Born pour un potentiel diffusif radial

Lorsqu'une particule est diffusée (élastiquement) par un potentiel localisé en $\vec{x} = 0$, sa fonction d'onde prend asymptotiquement la forme ($r = \|\vec{x}\|$) :

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \psi_{\vec{k}} \rangle \overset{r\to\infty}{\approx} \underbrace{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}_{\text{onde transmise}} + \underbrace{f(\vec{k}',\vec{k})\,\frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{onde diffusée}} \tag{5}$$

avec $f(\vec{k}',\vec{k})$ l'amplitude de transition, et sa section efficace différentielle associée $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{k}',\vec{k})|^2$.

Dans l'approximation au premier ordre dite de Born, l'amplitude de transition n'est autre que la transformée de Fourier du potentiel diffusif $U(\vec{x})$:

$$f(\vec{k}',\vec{k})|_{\text{Born}} = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \cdot e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{x}'} \cdot U(\vec{x}') \tag{6}$$

a) En posant $\vec{\kappa} \equiv \vec{k}' - \vec{k}$, explicitez en justifiant chacune de vos hypothèses la norme de $\vec{\kappa}$ en fonction de la norme du vecteur d'onde incident $\vec{k}$ et l'angle de diffusion θ.
b) Simplifiez au maximum l'expression $f(\vec{k'}, \vec{k})|_{\mathrm{Born}}$ dans le cas où le potentiel de diffusion est purement radial : $U(\vec{x}) = U(r)$ avec $r = \|\vec{x}\|$.

3 Potentiel de Yukawa

a) En utilisant les résultats de l'exercice précédent, calculez la section efficace différentielle dans l'approximation de Born pour le potentiel de Yukawa :

$$U(r) = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \cdot \frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{7}$$

avec $V_0, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ (le potentiel décroit avec la distance r), m la masse de l'électron et $\hbar$ la constante de Planck. $|V_0|$ est supposé assez petit pour justifier l'approximation de Born.
b) Calculez la transormée de Fourier de $f(q) = \frac{1}{q^2+a^2}$ avec $a > 0$. Discutez le résultat par rapport au point a).

4 Laplacien et δ de Dirac (Facultatif)

Montrez que l'équation $\left(\nabla^2 + k^2\right) G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ admet pour solutions $G_{\pm}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm i\vec{k}\vec{r}}}{r}$ (vous pouvez utiliser que le Laplacien de $1/r$ est $-4\pi\delta(\vec{r})$).