Mécanique quantique II – Série 10

à rendre le 11 décembre 2012 – assistant : Julien Guillod (SCI 212)

1 Diffusion par un potentiel central

Le but est d'étudier la diffusion d'une particule de masse m dans le potentiel central

$$V(r) = -\frac{\hbar^2}{ma^2}\frac{1}{\cosh^2(r/a)}\,,$$

avec $a > 0$.

1. Déterminer la fonction d'onde radiale de l'onde s, *i.e.* pour $l = 0$.
   Indication : l'équation différentielle
   $$y'' + k^2 y + \frac{2}{\cosh^2 x}y = 0\,,$$
   admet les solutions
   $$y_\pm(x) = \mathrm{e}^{\pm ikx}\,(\tanh x \mp \mathrm{i}k)\,.$$
2. En calculant le développement asymptotique de la fonction d'onde radiale à $r \approx \infty$, déterminer le déphasage δ_0 de l'onde s.
3. Déterminer la contribution de l'onde s à la section efficace.

2 Diffusion à basse énergie et approximation de Born

Le but est de calculer la section efficace à basse énergie du potentiel donné par

$$V(r) = \begin{cases} -V_0\,, & r < a\,, \\ 0\,, & r > a\,, \end{cases}$$

et de comparer le résultat avec l'approximation de Born.

1. Ecrire l'équation de Schrödinger pour la fonction radiale dans chaque région lorsque l'énergie est basse et trouver la solution dans chaque région.
2. En imposant les conditions au bords et en raccordant les solutions précédentes en $r = a$, déterminer le déphasage δ_0 de l'onde s.
3. Dans la limite de basse énergie, déterminer la section efficace.
4. Calculer l'amplitude de diffusion $f(\theta)$ dans l'approximation de Born.
5. Dans la limite de basse énergie déterminer la section efficace dans l'approximation de Born.
6. Comparer les sections efficaces trouvées par les deux méthodes précédentes dans la limite $V_0 \approx 0$.

3 Déphasage de l'onde p par une sphère dure

Le but est d'étudier le déphasage δ_1 de l'onde p, *i.e.* $l = 1$, associée à la diffusion par une sphère dure,

$$V(r) = \begin{cases} -\infty\,, & r < a \\ 0 & r > a\,. \end{cases}$$

Il s'agit essentiellement du même problème que celui vu en classe mais à l'ordre supérieur. En particulier le but est de voir que δ_1 est négligeable devant δ_0.

1. Ecrire l'équation de Schrödinger pour la fonction radiale lorsque $r > a$ et montrer que la solution est à une amplitude près de la forme

$$u_{k,1}(r) = \frac{\sin kr}{kr} - \cos kr + c\left(\frac{\cos kr}{kr} + \sin kr\right)\,,$$

   avec $c \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer c de manière à ce que $u_{k,1}(a) = 0$.
3. En calculant le développement asymptotique de la fonction d'onde radiale à $r \approx \infty$, montrer que le déphasage de l'onde p est donné par $\delta_1 = \arctan c$.
4. Montrer que dans la limite de basse énergie, $\delta_1 \approx -(ka)^3/3$ et comparer avec la valeur de δ_0 trouvée en classe.