Mécanique quantique II – Série 11

À rendre le 18 décembre 2012 – assistant : Félix Bussières (Pinchat 112)
Pour R-V: felix.bussieres@unige.ch ou 022 379 0527

Seuls les deux premiers exercices sont obligatoires. Si vous remettez également les deux autres, ils seront corrigés et un bonus pourra être attribué.

1 États excités de l'atome d'hélium

Dans ce problème, nous allons étudier les états possibles d'un atome d'hélium lorsqu'un électron est excité. Supposons donc qu'un électron se trouve dans l'état $|n_1, l_1, m_1\rangle$, tandis que le deuxième se trouve dans l'état $|n_2, l_2, m_2\rangle$ (on néglige le couplage spin-orbite). On notera ses deux états $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Pour distinguer les deux électrons, on les notera par des indices a et b.

a) Négligeons pour l'instant la répulsion électrostatique entre les deux électrons que l'on considère discernables (pour l'instant). Il y a deux états possibles correspondant à la situation décrite ci-dessus : soit l'électron-a est dans l'état 1 et l'électron b dans l'état 2, ce que l'on notera $|1\rangle_a \otimes |2\rangle_b = |12\rangle$, ou vice-versa, que l'on notera $|21\rangle$. Quelle est l'énergie de chacun de ces états ?

b) Tenons maintenant compte de la répulsion électrostatique, qui peut être traitée comme une perturbation. Trouvez les nouvelles énergies propres des états donnés en (a), ainsi que les vecteurs propres associés. Exprimez ces énergies en fonction des termes du style $\langle 12|\mathcal{O}|12\rangle$, où $\mathcal{O}$ est un opérateur à spécifier. Donnez une interprétation physique à ces termes.

c) Pour tous les vecteurs propres trouvés en (b), déterminez si l'amplitude de probabilité de trouver les deux électrons au même endroit est nulle ou pas.

d) Tenons maintenant compte du spin des électrons, que l'on suppose dorénavant indiscernables. Quels sont les états propres possibles ? Interprétez les résultats de (c).

2 Système à deux spins

Considérons deux spins $\frac{1}{2}$ dont l'Hamiltonien est donné par

$$H = a(S_{1z} + S_{2z}) + b\,\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2.$$

a) Donnez le spectre (vecteurs et valeurs propres) de cet Hamiltonien.

b) Supposons maintenant que $b = 0$, que a dépende du temps et que $a \to 0$ pour $t \to \pm\infty$. Si le système est dans l'état $|\downarrow, \uparrow\rangle$ à $t = -\infty$, utilisez la théorie des perturbations pour déterminer la probabilité que le système se trouve dans l'état $|\uparrow, \downarrow\rangle$ à l'instant $t = \infty$ (écrivez votre réponse en fonction de $a(t)$).

3 Perturbation dépendante du temps (facultatif)

Un atome d'hydrogène dans son état fondamental est assujetti à un champ électrique uniforme faible et orienté selon z. Le champ varie et est décrit par

$$E(t) = E_0 \mathrm{e}^{-\gamma t}\theta(t)$$

où $\theta(t)$ est la fonction de Heaviside ($= 1$ pour $t \geq 0$, et $= 0$ sinon). Calculez la probabilité (au premier ordre) que l'atome soit excité vers un niveau $n = 2$ après un long moment.

4 Particules et sites multiples (facultatif)

Considérons un système composé de trois sites formant un triangle dans lequel on place une particule. Chaque site peut en principe accueillir la particule. Lorsque celle-ci est localisée sur le site i ($i = 1, 2, 3$), sa fonction d'onde est $|i\rangle$. On fera l'approximation que les fonctions d'ondes sont orthonormées, soit $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$. On suppose également qu'il existe une amplitude finie $\kappa > 0$ qu'une particule localisée sur un site donné saute sur un site voisin. L'Hamiltonien de la particule est

$$H = -\kappa(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2|).$$

a) Montrez qu'il existe trois vecteurs propres de H ayant la forme

$$|\psi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[|1\rangle + \mathrm{e}^{ik}|2\rangle + \mathrm{e}^{i2k}|3\rangle\right]$$

où k est réel est à déterminer. Donnez les énergies propres correspondantes.

b) On suppose que l'on place deux bosons indiscernables et sans interactions dans le système. Donnez, en fonction de la base définie en (a), la ou les fonctions d'ondes correspondant au fondamental. Donnez l'énergie propre correspondante.

c) Répétez la question (b) pour deux fermions indiscernables.

d) Supposons qu'une particule est placée dans le système et qu'il est en équilibre thermique avec un réservoir à température T. Quelle est la valeur moyenne de l'énergie du système en fonction de la température ? Discutez.