Méthodes mathématiques pour physiciens I
Corrigé série 1

Echauffement

01. Vérifier que :

1. $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$,
2. $e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$,
3. $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2}$.

02. Calculer le module de :

1. $\left|e^{i+1}\right| = \sqrt{e^{i+1}e^{-i+1}} = \sqrt{e^2} = e$,
2. $\left|e^{-(i+1)}\right| = \left|\frac{1}{e^{(i+1)}}\right| = \frac{1}{e}$,
3. $\left|e^{-(i-1)}\right| = \sqrt{e^{-(i-1)}e^{i+1}} = \sqrt{e^2} = e$,
4. $\left|e^{(i-50)}\right| = \left|e^{i}e^{-50}\right| = e^{-50}\left|e^{i}\right| = e^{-50}$,
5. $\left|e^{(1-50i)}\right| = \left|e^{-50i}e\right| = e$.

03. Injectivité, surjectivité et bijectivité :

1. f n'est ni injective, ni surjective,
2. f est bijective,
3. f est bijective.

04. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{64} = 0$,
2. $\lim\limits_{x\to 0} (x-4)^3 = -64$,
3. $\lim\limits_{x\to 4} (x-4)^3 = 0$.

Exercice 1. Pour $x, y \in \mathbf{R}$,

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} ,$$

et ainsi :

1. $$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1+3i} = \frac{1-i}{2} + \frac{1-2i}{5} + \frac{1-3i}{10} \\ &= \frac{5-5i}{10} + \frac{2-4i}{10} + \frac{1-3i}{10} = \frac{8-12i}{10} = \frac{4}{5} - i\frac{6}{5} , \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} z_2 &= \frac{2-3i}{2+i} + \frac{1-i}{1+3i} = \frac{(2-3i)(2-i)}{5} + \frac{(1-i)(1-3i)}{10} \\ &= \frac{4-2i-6i+3i^2}{5} + \frac{1-3i-i+3i^2}{10} = \frac{2-16i}{10} + \frac{-2-4i}{10} = -2i , \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} z_3 &= \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i} = \frac{(5+5i)(3+4i)}{25} + \frac{20(4-3i)}{25} \\ &= \frac{15+20i+15i+20i^2}{25} + \frac{80-60i}{25} = \frac{75-25i}{25} = 3-i , \end{aligned}$$
4. $$\begin{aligned} z_4 &= \frac{3(i^2)^{15} - (i^2)^9 i}{-1+2i} = \frac{-3+i}{-1+2i} = \frac{(-3+i)(-1-2i)}{5} \\ &= \frac{3+6i-i-2i^2}{5} = \frac{5+5i}{5} = 1+i . \end{aligned}$$

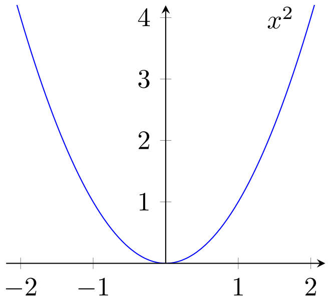
Finalement les parties réelle et imaginaire sont données pour $x, y \in \mathbf{R}$ par

$$z = x+iy , \qquad \Re(z) = x , \qquad \Im(z) = y .$$

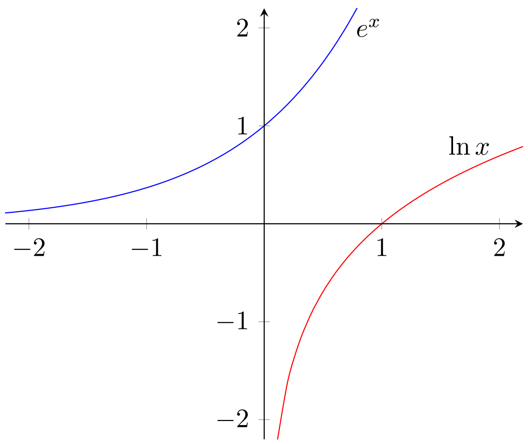
Une autre méthode pour calculer les parties réelle et imaginaire est d'appliquer directement les formules :

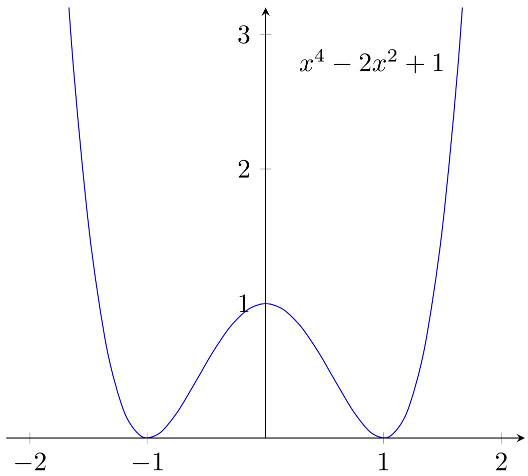
$$\Re(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) , \qquad \Im(z) = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}) .$$

Exercice 2. Injectivité, surjectivité et bijectivité :



1. f n'est pas injective car $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$,
   f n'est pas surjective car $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$,
   $f^{-1}([1,2]) = \left[-\sqrt{2}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right]$.
2. f est injective car strictement croissante,
   f n'est pas surjective car $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$,
   $f^{-1}([1,2]) = [0, \ln(2)]$.
3. f est bijective car la fonction inverse est donnée par la fonction exponentielle $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$,
   $f^{-1}([1,2]) = \left[\mathrm{e}, \mathrm{e}^2\right]$.
4. f n'est pas injective car $f^{-1}(\{0\}) = \{-1, 1\}$,
   f est surjective car pour tout $y \in \mathbf{R}_0^+$ il existe $x = \sqrt{1 + \sqrt{y}}$ tel que $f(x) = y$,
   $f^{-1}([1,2]) = \left[-\sqrt{\sqrt{2}+1}, -\sqrt{2}\right] \cup \{0\} \cup \left[\sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2}+1}\right]$.





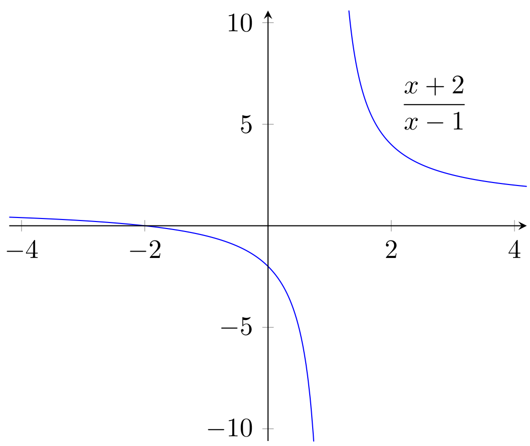
Exercice 3. Pour résoudre cet exercice rapidement, on peut aussi utiliser la règle de l'Hospital ou les développements en série de Taylor qui seront présentés dans le cours d'analyse I.

1. Comme le numérateur et le dénominateur sont des polynômes qui s'annulent pour $x = -1$, ils se factorisent par $(x+1)$ donc pour $x \neq -1$,

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1} .$$

Il s'en suit que

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{x+2}{x-1} = -\frac{1}{2} .$$

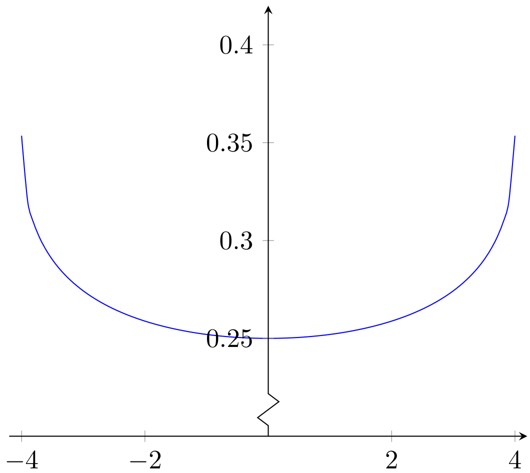


2. Pour $x \neq 0$, l'expression se simplifie,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{2x} &= \frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{2x}\,\frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}} \\ &= \frac{2x}{2x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}\,,\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}} = \frac{1}{4}\,.$$



3. Considérons le cas $x \to 0^+$. Sur le dessin nous voyons que l'aire du petit triangle est plus petite que celle de la portion de disque, elle-même plus petite que l'aire du grand triangle. Ceci s'écrit :

$$\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan(x)\,.$$

En divisant cette inégalité par $\frac{1}{2}\sin(x)$ et en prenant l'inverse

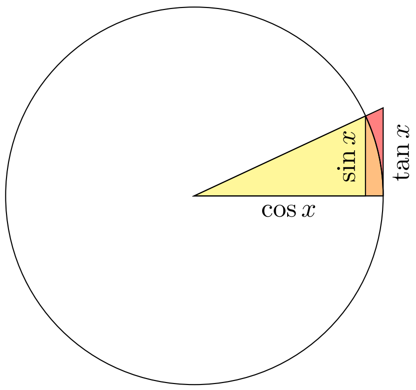
$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}\,.$$

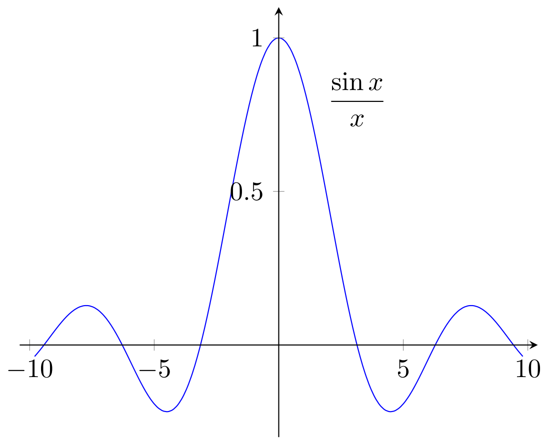
Quand $x \to 0^+$, les deux bords de l'inégalité tendent vers 1, donc le terme du milieu aussi, c'est-à-dire

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x} = 1\,.$$

Pour montrer que la limite à gauche est la même, on constate simplement que

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}\,.$$



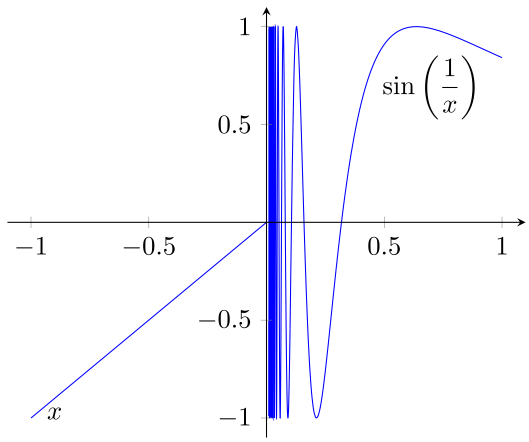


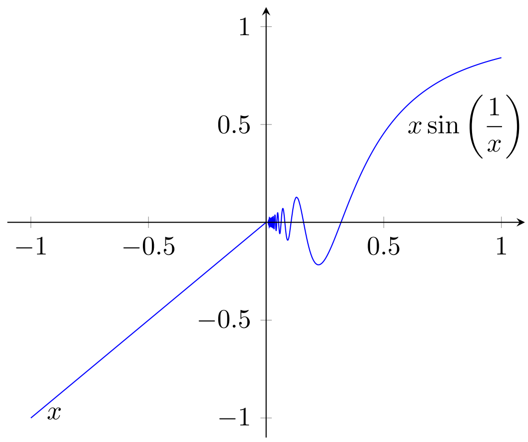
Exercice 4. On calcule simplement les limites à gauche et à droite :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1\,, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^3+1 = 2\,.$$

Comme les limites ne coïncident pas, cette fonction n'est pas continue en $x = 1$.

Exercice 5. La discussion de la continuité peut se faire en regardant les graphes, par exemple :





Pour une démonstration rigoureuse, on doit utiliser la définition.

1. La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{n\left(|x_0| + 1\right)^{n-1}}\right) ,$$

tel que pour $|x| < \delta$,

$$\begin{aligned} |(x_0 + x)^n - x_0^n| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^k x^{n-k} - x_0^n\right| < \delta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k} |x_0|^k \delta^{n-1-k} \\ &\leq \delta n \left(|x_0| + \delta\right)^{n-1} \leq \delta n \left(|x_0| + 1\right)^{n-1} \leq \varepsilon \,. \end{aligned}$$

2. La fonction f est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Soit $|x_0| > 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe

$$\delta = \frac{\varepsilon\, |x_0|^2}{1 + \varepsilon\, |x_0|} \qquad \text{tel que pour } |x - x_0| < \delta \text{ alors} \qquad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x - x_0}{x x_0}\right| < \frac{2\delta}{|x_0|^2} \leq \varepsilon \,.$$

La fonction f est discontinue en 0. En effet, pour tout $\delta > 0$, si $|x| < \min(1, \delta)$ alors $\left|\frac{1}{x} - 0\right| > 1$.

3. La fonction f se simplifie pour $x \notin \{0, 1\}$,

$$f(x) = \frac{x+1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{x+1}{\frac{1-x}{x}} = x\frac{x+1}{1-x} ,$$

et comme $f(0) = 0$ l'expression précédente est égale à f pour tout $x \neq 1$. La fonction f est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ comme multiplication d'un polynôme qui est continu sur $\mathbf{R}$ par le point 1. et de la fonction $\frac{1}{x-1}$ continue sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ par le point 2. Le point précédent montre aussi que f n'est pas continue en $x = 1$.

4. La fonction f est continue sur $\mathbf{R}^+$: Soit $x_0 > 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \frac{\varepsilon x_0}{2+\varepsilon}$ tel que pour tout $|x - x_0| < \delta$,

$$|\ln(x) - \ln x_0| = \left|\int_{x_0}^{x} \frac{1}{y} dy\right| < \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{1}{y} dy \leq \frac{2\delta}{x_0 - \delta} \leq \varepsilon \,.$$

5. La fonction f est continue sur $\mathbf{R}_-$ et continue à gauche en zéro. La fonction f est continue sur $\mathbf{R}_+$ comme composition de la fonction $\frac{1}{x}$ continue sur $\mathbf{R}_0$ et de la fonction sin continue sur $\mathbf{R}$. La fonction n'est pas continue à droite en zéro, car pour tout $\delta > 0$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que si $x = \frac{2}{n\pi}$ alors $|x| < \delta$ et $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0\right| = 1$.

6. La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$. La seule chose à vérifier est la continuité à droite en zéro qui provient de l'inégalité $\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$.