Méthodes mathématiques pour physiciens I
Corrigé série 2

Echauffement

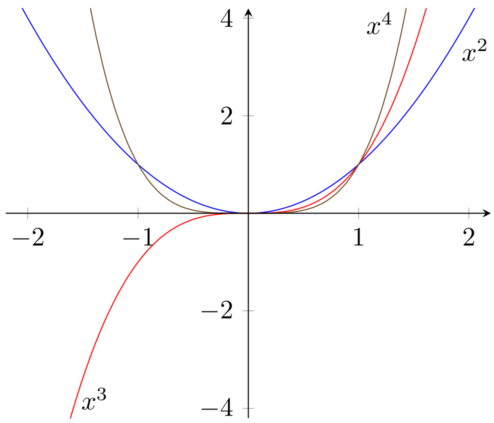
01. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f'(x) = 1\,,$
2. $f'(x) = 1 + 1 = 2\,,$
3. $f'(x) = 2 \times 1 = 2\,.$

02. Tracer le graphe et calculer la première et deuxième dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2,\ \ f'(x) = 2x\ ,\ \ f''(x) = 2,$
2. $f(x) = x^3,\ \ f'(x) = 3x^2,\ \ f''(x) = 6x,$
3. $f(x) = x^4,\ \ f'(x) = 4x^3,\ \ f''(x) = 12x^2.$

Le signe de la deuxième dérivée montre que seul $f(x) = x^3$ a un point d'inflection en $x = 0$.



Exercice 1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $\tan'(x) = \dfrac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}\,,$
2. $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$
3. $f'(x) = (ax^2+b)'\,e^{ax^2+b} = 2ax\,e^{ax^2+b}\,,$
4. $f'(x) = \ln'\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{(2x)}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,,$
5. $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\left(x^2+a^2\right)^{-3/2}\cdot 2x = -\dfrac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,.$
6. Par définition des fonctions hyperboliques
$$\cosh'(x) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)\,.$$
7. De manière équivalente au point précédent, $\sinh' = \cosh$ et donc
$$f'(x) = \left(\sinh^{-1}x\right)' = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arcsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh}(x))}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arcsinh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,,$$
avec l'aide de l'identité $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

8. Comme
$$\tanh'(x) = \frac{\sinh'(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cosh'(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) ,$$
alors
$$f'(x) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{arctanh}(x))} = \frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{arctanh}(x))} = \frac{1}{1-x^2} .$$

9. Pour calculer, il faut écrire $f(x) = e^{x\ln a}$ et ainsi
$$f'(x) = (x\ln a)'\, e^{x\ln a} = \ln(a)e^{x\ln a} = \ln(a)a^x .$$

10. De manière analogue, il faut écrire $f(x) = e^{a\ln x}$ et ainsi
$$f'(x) = (a\ln x)'\, e^{a\ln x} = \frac{a}{x}e^{a\ln x} = ax^{a-1} .$$

Exercice 2.

1. Tout d'abord, rappelons la relation trigonométrique :
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) .$$
Ceci étant,
$$\begin{aligned}\cos'(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos(x+\varepsilon)-\cos(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\sin\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right] \\ &= -\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\sin\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right] = -\sin(x)\cdot 1 = -\sin x .\end{aligned}$$

2. Il suffit de regarder ce qui a été fait à l'exercice 1.6 pour obtenir :
$$f'(x) = \sinh(x) \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \cosh(x) .$$

3. La dérivée d'ordre m d'un monôme est
$$(x^n)^{(m)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-m)!}x^{n-m} , & n \geq m \\ 0 , & n < m . \end{cases} ,$$
et donc
$$f^{(n+1)}(x) = 0 , \qquad f^{(n)}(x) = a_n n! , \qquad f^{(n-1)}(x) = a_n\, n!\, x + a_{n-1}(n-1)! .$$

Exercice 3. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f'(x) = 1\cdot(\ln x - 1) + x\cdot\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x$,
2. $f'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2} = \sqrt{x}$,
3. $f'(x) = 1\cdot\arcsin(x) + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$,
4. $$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(-2x)}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{1}{2}\left(a^2-x^2\right) = \sqrt{a^2-x^2} .\end{aligned}$$

5. Tout d'abord, il faut réécrire la valeur absolue,

$$|\cos x| = \cos x \cdot \mathrm{sgn}\left(\cos x\right) \ ,$$

où $\mathrm{sgn}(x)$ est le signe de x. Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\ln\left[\cos x \cdot \mathrm{sgn}(\cos x)\right]' \\ &= -\frac{1}{\cos x \cdot \mathrm{sgn}(\cos x)} \cdot \left[\cos'(x) \cdot \mathrm{sgn}(\cos x) + \cos x \cdot \mathrm{sgn}'(\cos x) \cdot (-\sin x)\right] \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos x} = \tan x \ , \end{aligned}$$

car $\mathrm{sgn}'(x) = 0$ pour $x \neq 0$.

Exercice 4. Le calcul de la dérivée donne :

$$f'(x) = 3(x-3)^2(x+2)^2 + (x-3)^3 \cdot 2(x+2) = 5x(x-3)^2(x+2) \ .$$

Par conséquent, il y a trois extremums,

$$x_1 = -2 \ , \qquad x_2 = 0 \ , \qquad x_3 = 3 \ .$$

Pour savoir si il s'agit de maxima ou de minima, il faut calculer la deuxième dérivée :

$$f''(x) = 5(x-3)^2(x+2) + 5x \cdot 2(x-3)(x+2) + 5x(x-3)^2 \cdot 1 = 10(x-3)(2x^2-3) \ .$$

Ainsi,

$$f''(x_1) < 0 \ , \qquad f''(x_2) > 0 \ , \qquad f''(x_3) = 0 \ .$$

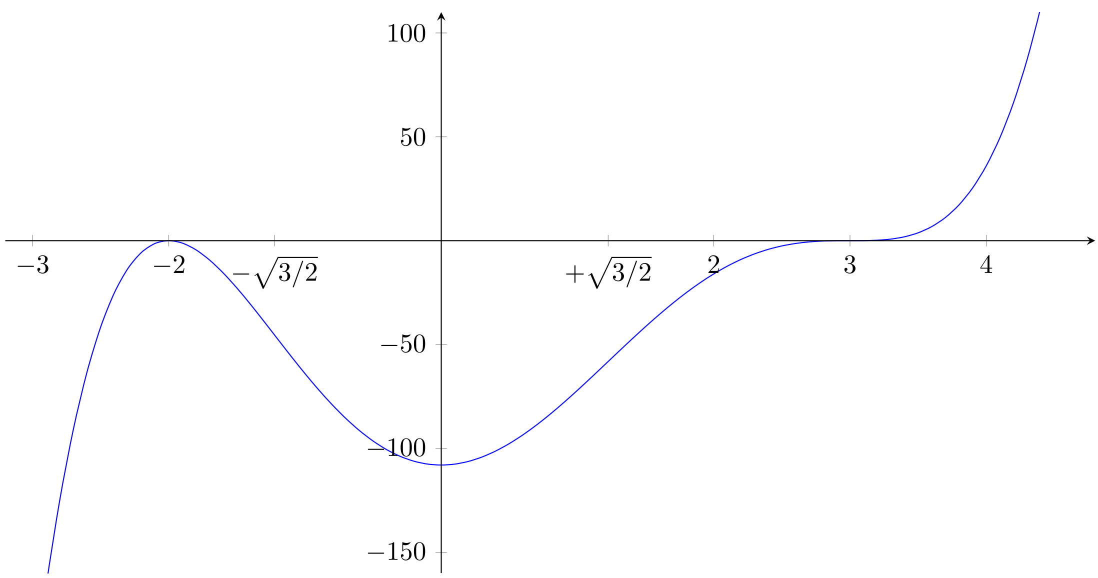
Donc x_1 est un maximum local et x_2 un minimum local. Pour savoir si x_3 est un point d'inflexion, il faut évaluer $f'''(x_3)$. On a :

$$f'''(x) = 10(2x^2-3) + 10(x-3) \cdot 4x = 30(2x^2-4x-1) \ ,$$

donc $f'''(x_3) > 0$ et x_3 est un point d'inflexion.

Les éventuels autres points d'inflexion sont donnés par $f''(x) = 0$ et $f'''(x) \neq 0$ c'est-à-dire

$$x_\pm = \pm\sqrt{3/2} \ .$$



Exercice 5. Pour obtenir le développement de Taylor de f à l'ordre deux, il faut calculer les dérivées :

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} , \qquad f''(x) = -\frac{1}{3}\frac{2}{3}x^{-5/3} ,$$

ce qui permet de calculer :

$$f(27) = 3 , \qquad f'(27) = \frac{1}{3^3} , \qquad f''(27) = -\frac{2}{3^7} .$$

Ainsi, le développement de Taylor de f en $x = 27$ est :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(27) + f'(27)\,(x-27) + \frac{1}{2!}f''(27)\,(x-27)^2 + R_3(f, 27, x) \\ &= 3 + \frac{1}{3^3}\,(x-27) - \frac{1}{3^7}\,(x-27)^2 + R_3(f, 27, x) \ . \end{aligned}$$

En prenant $x = 26$, nous obtenons l'approximation :

$$26^{1/3} \approx 3 + \frac{1}{3^3}(-1) - \frac{1}{3^7}(-1)^2 = 2.962506\ldots$$

Un calcul direct donne $26^{1/3} = 2.962496\ldots$ ce qui fait un écart relatif de 0.0003% !

Exercice 6. Pour $n \in \mathbf{N}$ soit la fonction plus générale suivante :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x}}{x^n} , & x > 0 , \\ 0 , & x \leq 0 , \end{cases} \end{aligned}$$

qui est continue car $e^{-1/x}$ décroit plus vite que n'importe quel polynôme en zéro,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^n} = 0 .$$

Pour $x > 0$, la dérivée de f_n est donnée par :

$$f_n'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^{n+2}} - n\frac{e^{-1/x}}{x^{n-1}} = f_{n+2}(x) - nf_{n-1}(x) \ ,$$

et donc

$$f_n' = f_{n+2} - nf_{n-1} .$$

Par conséquent les dérivées successives de f_n peuvent toutes s'écrire en termes des f_n, par exemple

$$f_n'' = f_{n+2}' - nf_{n-1}' = f_{n+4} - (n+2)\,f_{n+1} - n\,(f_{n+1} - (n-1)\,f_{n-2}) \ .$$

Comme f_n est continue et $f_n(0) = 0$ alors cela implique que $f_n^{(m)}(0) = 0$ pour tout $m, n \in \mathbf{N}$. Ainsi la série de Taylor de $f = f_0$ est donnée par :

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 .$$

Remarque : La fonction f est un exemple de fonction non-nulle pour laquelle sa série de Taylor en zéro est nulle. Cela veut dire que le reste R_n dans la formule de Taylor ne décroit pas lorsque $n \to \infty$. Par conséquent la série de Taylor est d'aucune utilité pour approximer f au voisinage de zéro. Ce phénomène provient du fait que la fonction f est négligable par rapport à tout polynôme en zéro.