Méthodes mathématiques pour physiciens I
Corrigé série 4

Echauffement. Calculer les intégrales et primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^\pi dx = x\Big|_0^\pi = \pi\,,$
2. $\displaystyle\int_0^\pi x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}\,,$
3. $\displaystyle\int \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) dx = f(x,y) + C(y)\,,$
4. $\displaystyle\int \frac{d^2}{dx^2} f(x) dx = \frac{d}{dx} f(x) + C\,,$
5. $\displaystyle\int \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) dx = \text{il n'y a rien à faire}\,,$
6. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^0 f(t)dt = -\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = -\frac{d}{dx}\left(F(x) - F(0)\right) = -f(x)$ où F est une primitive de f.

Exercice 1. Calculer les intégrales et primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x) dx = -\cos(x)\Big|_0^\pi = 2\,,$
2. $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = -e^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_0^\infty = 1\,,$
3. La première chose à faire est de décomposer l'intégrant en fractions primitives :
$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\,.$$
Ainsi
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) &= \Big[\ln(x+1) - \ln(x+2)\Big]_0^\infty = \left[\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right]_0^\infty \\ &= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1) + \ln(2) = \ln(2)\,.\end{aligned}$$
4. Soit le changement de variable :
$$x = \sin(y)\,, \qquad y = \arcsin(x)\,, \qquad dx = \cos(y) dy\,.$$
Ainsi,
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos(y)dy}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \int dy = y + C = \arcsin(x) + C\,.$$
5. Soit le changement de variable :
$$x = \sinh(y)\,, \qquad y = \text{arcsinh}(x)\,, \qquad dx = \cosh(y) dy\,.$$
Alors,
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\cosh(y)dy}{\sqrt{1+\sinh^2(y)}} = \int dy = y + C = \text{arcsinh}(x) + C\,.$$

6. Avec les changements de variables suivants

$$\begin{aligned}
&y = x+1\,, && x = y-1\,, && dx = dy\,,\\
&t = \frac{y}{\sqrt{3}}\,, && y = \sqrt{3}\,t\,, && dy = \sqrt{3}\,dt\,,\\
&u = \operatorname{arctanh} t\,, && t = \tanh u\,, && dt = \frac{du}{\cosh^2 u}\,,
\end{aligned}$$

on obtient

$$\int \frac{dx}{x^2+2x-2} = \int \frac{dy}{y^2-3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int du = -\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctanh}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C\,.$$

7. Soit le changement de variable :

$$y = \ln(1-x)\,, \qquad x = 1-e^y\,, \qquad dx = -e^y dy\,.$$

Ainsi en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
\int \ln(1-x)\,dx &= -\int ye^y dy = -\int y\,(e^y)'\,dy = -\left(ye^y - \int 1e^y\right)\\
&= (1-y)\,e^y + C = (1-\ln(1-x))\,(1-x) + C\,.
\end{aligned}$$

8. Avec les changements de variables suivants

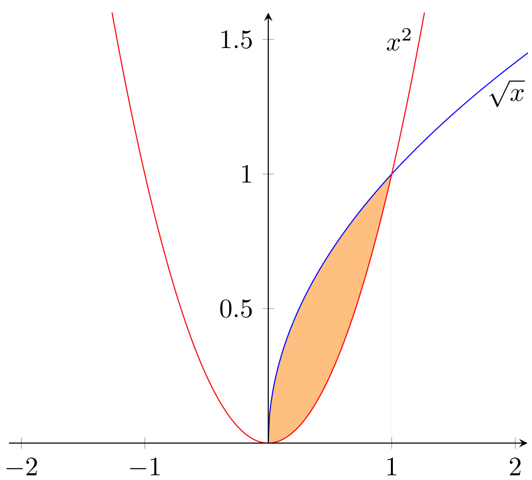
$$\begin{aligned}
&y = \sin x\,, && x = \arcsin y\,, && dx = \frac{dy}{\cos x}\,,\\
&t = \frac{y}{2}\,, && y = 2t\,, && dy = 2dt\,,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos(x)}{(2+\sin(x))(2-\sin(x))}dx &= \int \frac{dy}{(2+y)(2-y)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t^2}\\
&= \frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{1-t} + C = \frac{1}{4}\ln\frac{2+\sin(x)}{2-\sin(x)} + C\,.
\end{aligned}$$

Exercice 2. Pour $x \in [0,1]$, $\sqrt{x} \geq x^2$ et donc l'aire A cherchée est donnée par :

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\,.$$



Exercice 3.

1. Pour tout $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ et pour tout $\lambda > 1$,

$$\int_1^\lambda \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_1^\lambda = \frac{\lambda^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} .$$

   Pour que l'intégrale converge, il faut que $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{1-\alpha}$ existe, ce qui est le cas pour $1-\alpha < 0$, *i.e.* $\alpha > 1$.
   Finalement, pour $\alpha = 1$ et pour tout $\lambda > 1$,

$$\int_1^\lambda \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^\lambda \frac{dx}{x} = \ln(x)\Big|_1^\lambda = \ln(\lambda) .$$

   Comme la limite $\lim_{\lambda \to +\infty} \ln(\lambda)$ n'existe pas, l'intégrale diverge pour $\alpha = 1$.

2. Pour tout $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ et pour tout $\lambda \in (0,1)$,

$$\int_\lambda^1 x^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha} x^{1+\alpha}\Big|_1^\lambda = \frac{1}{1+\alpha}\left(1 - \lambda^{1+\alpha}\right) .$$

   Pour que l'intégrale converge, il faut que $\lim_{\lambda \to 0^+} \lambda^{1+\alpha}$ existe, ce qui est le cas pour $1+\alpha > 0$, *i.e.* $\alpha > -1$.
   Finalement, pour $\alpha = -1$ et pour tout $\lambda \in (0,1)$,

$$\int_\lambda^1 x^\alpha \; dx = \int_\lambda^1 \frac{1}{x} \; dx = \ln(x)\Big|_\lambda^1 = -\ln(\lambda) .$$

   Comme la limite $\lim_{\lambda \to 0^+} \ln(\lambda)$ n'existe pas, l'intégrale diverge pour $\alpha = -1$.

Exercice 4.

1. Une primitive de $xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ est $-e^{-\frac{1}{2}x^2}$, donc

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = -\int_0^\infty x\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)' dx = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{\pi/2} .$$

2. Soit

$$I = \int_0^{\pi/\beta} e^{\alpha x} \sin(\beta x) dx .$$

   En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi/\beta} (e^{\alpha x})' \sin(\beta x) dx = \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\sin(\beta x)\Big|_0^{\pi/\beta} - \beta \int_0^{\pi/\beta} e^{\alpha x}\cos(\beta x) dx \right] \\ &= -\frac{\beta}{\alpha}\int_0^{\pi/\beta} e^{\alpha x}\cos(\beta x) dx . \end{aligned}$$

   En intégrant à nouveau par parties,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\beta}{\alpha^2}\int_0^{\pi/\beta} (e^{\alpha x})' \cos(\beta x) dx = -\frac{\beta}{\alpha^2}\left[e^{\alpha x}\cos(\beta x)\Big|_0^{\pi/\beta} + \beta \int_0^{\pi/\beta} e^{\alpha x}\sin(\beta x) dx \right] \\ &= \frac{\beta}{\alpha^2}\left[\left(e^{\alpha\pi/\beta} + 1\right) - \beta I\right] . \end{aligned}$$

   Ainsi on obtient une équation pour I qui peut être résolue,

$$I = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\left(e^{\alpha\pi/\beta} + 1\right) .$$

3. Pour simplifier l'intégration, on considère le changement de variable $y = ax$,

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^n dx = \frac{1}{a^{n+1}} \lim_{b\to\infty} \int_0^{b/a} e^{-y} y^n dy = \frac{1}{a^{n+1}} \int_0^\infty e^{-y} y^n dy \,.$$

Il suffit donc de calculer

$$I_n = \int_0^\infty e^{-y} y^n dy \,.$$

Pour $n = 0$,

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-y} dy = -\lim_{\lambda\to\infty} e^{-y}\Big|_0^\lambda = -\lim_{\lambda\to\infty} \left[e^{-\lambda} - 1\right] = 1 \,.$$

Pour $n > 0$ et en intégrant par parties,

$$I_n = -\int_0^\infty \left(e^{-y}\right)' y^n dy = -\lim_{\lambda\to\infty} \Big[e^{-y} y^n\Big]_0^\lambda + n\int_0^\infty e^{-y} y^{n-1} = nI_{n-1} \,,$$

car $e^{-\lambda}$ décroît plus vite que n'importe quel polynôme donc la limite est nulle. Pour résumer, on a donc montré que

$$I_0 = 1 \,, \qquad\qquad I_n = nI_{n-1} \,.$$

Par conséquent, en appliquant la seconde égalité plusieurs fois,

$$I_n = n \cdot I_{n-1} = n \cdot (n-1) \cdot I_{n-2} = \ldots = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1 \cdot I_0 = n! \,,$$

donc finalement

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^n \quad = \quad \frac{I_n}{a^{n+1}} = \frac{n!}{a^{n+1}} \,.$$

4. Soit

$$I_{m,n} = \int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!} \frac{(x-a)^n}{n!} dx \,.$$

Pour $n = 0$,

$$I_{m,0} = \int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!} dx = -\left.\frac{(b-x)^{m+1}}{(m+1)!}\right|_a^b = \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!} \,.$$

Pour $n > 0$ et en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= -\int_a^b \left(\frac{(b-x)^{m+1}}{(m+1)!}\right)' \frac{(x-a)^n}{n!} dx \\ &= -\left.\frac{(b-x)^{m+1}}{(m+1)!} \frac{(x-a)^n}{n!}\right|_a^b + \int_a^b \frac{(b-x)^{m+1}}{(m+1)!} \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} dx \\ &= I_{m+1,n-1} \,. \end{aligned}$$

Pour résumer

$$I_{m,0} = \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!} \,, \qquad\qquad I_{m,n} = I_{m+1,n-1} \,,$$

et donc en appliquant plusieurs fois la deuxième identité,

$$I_{m,n} = I_{m+1,n-1} = I_{m+2,n-2} = \ldots = I_{m+n,0} = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \,.$$