Méthodes mathématiques pour physiciens I
Corrigé série 5

Echauffement.

1. En prenant les transposées,

$$\sigma_0^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0 \,, \qquad \sigma_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 \,,$$

$$\sigma_2^T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_2 \,, \qquad \sigma_3^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3 \,.$$

2. Ainsi σ_0, σ_1, σ_3 sont symétriques et σ_2 est anti-symétrique.
3. Les produits non triviaux sont donnés par :

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \sigma_0 \,, & \sigma_1\sigma_2\sigma_3 &= i\sigma_0 \,, \\ \sigma_1\sigma_2 &= i\sigma_3 \,, & \sigma_2\sigma_1 &= -i\sigma_3 \,, \\ \sigma_1\sigma_3 &= -i\sigma_2 \,, & \sigma_3\sigma_1 &= i\sigma_2 \,, \\ \sigma_2\sigma_3 &= i\sigma_1 \,, & \sigma_3\sigma_2 &= -i\sigma_1 \,. \end{aligned}$$

En définissant le vecteur $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ayant pour composantes les trois matrices, les produits précédents se résument par :

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})\,(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\sigma_0 + i\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\boldsymbol{\sigma} \,.$$

Remarque : Les matrices σ_i sont appelées matrices de Pauli et jouent un rôle important par exemple en mécanique quantique.

Exercice 1. Les produits sont donnés par :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 45 & 22 \\ 9 & 41 & 58 \\ 1 & 36 & 23 \end{pmatrix}, \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 26 & 31 & 14 \\ 46 & 21 & 22 \\ 25 & 48 & 22 \end{pmatrix},$$

$$[A, B] = \begin{pmatrix} -21 & 14 & 8 \\ -37 & 20 & 36 \\ -24 & -12 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \{A, B\} = \begin{pmatrix} 31 & 76 & 36 \\ 55 & 62 & 80 \\ 26 & 84 & 45 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Pour que le produit de deux matrices existe, il faut que le nombre de colonnes de la première soit égal au nombre de lignes de la seconde. Seuls les produits suivants ont donc un sens :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 24 & 10 & 4 & 38 \\ 49 & 14 & 8 & 44 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot C = \begin{pmatrix} 6 & 17 \\ 16 & 34 \end{pmatrix}, \qquad C \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 5 \\ 0 & 14 & 8 \\ 8 & 55 & 24 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. En calculant le carré de la matrice,

$$X(a)^2 = \begin{pmatrix} -2a^2+16a-30 & a^2-8a+15 \\ -6a^2+52a-110 & 3a^2+26a+55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(a-5)(a-3) & (a-5)(a-3) \\ 2(a-5)(11-3a) & (a-5)(11-3a) \end{pmatrix} .$$

L'équation $X(a)^2 = 0$ est vérifiée uniquement lorsque chacun élément de $X(a)^2$ est nul, *i.e.* si et seulement si $a = 5$.

Remarque : la matrice $X(5)$ constitue donc un exemple de matrice non-nulle nilpotente, c'est-à-dire qui satisfait $X(5)^2 = 0$.

Exercice 4. Il faut distinguer les deux cas suivants :

1. pour tout i et j, $a_{ij} = 0$:
   Dans ce cas le système à une infinité de solutions si $b_1 = b_2 = 0$ et n'a pas de solution sinon.
2. il existe i et j tels que $a_{ij} \neq 0$:
   Soient k et l tels que $k \neq i$ et $l \neq j$. Ainsi le système peut s'écrire

   $$\begin{aligned} a_{ij}x_j + a_{il}x_l &= b_i \ , \\ a_{kj}x_j + a_{kl}x_l &= b_k \ . \end{aligned}$$

   Comme $a_{ij} \neq 0$, alors de la première équation,

   $$x_j = \frac{b_i - a_{il}x_l}{a_{ij}} \ ,$$

   et en remplaçant dans la seconde :

   $$a_{kj}\frac{b_i - a_{il}x_l}{a_{ij}} + a_{kl}x_l = b_k \ ,$$

   c'est-à-dire

   $$(a_{ij}a_{kl} - a_{il}a_{kj})\, x_l = a_{ij}b_k - a_{kj}b_i \ .$$

   Cette dernière équation a une unique solution si et seulement si

   $$a_{ij}a_{kl} - a_{il}a_{kj} \neq 0 \ ,$$

   c'est-à-dire avec les propriétés des indices

   $$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \ .$$

Remarque : Le système admet une unique solution si et seulement si la matrice $A = (a_{ij})$ est inversible. Ainsi on a démontré que la matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul, c'est-à-dire

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \ .$$

Exercice 5. On applique l'algorithme de Gauss en partant de la matrice suivante :

$$(A,b)=\begin{pmatrix}7&1&-2&8\\-2&2&12&0\\3&25&10&6\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \mid\ :(-2)\\ \\ \end{array}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-1&-6&0\\7&1&-2&8\\3&25&10&6\end{pmatrix}\begin{array}{l}\cdot 7\quad \cdot 3\\ -\\ -\end{array}$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-1&-6&0\\0&8&40&8\\0&28&28&6\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \mid\ :8\\ \mid\ :2\end{array}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-1&-6&0\\0&1&5&1\\0&14&14&3\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \cdot 14\\ -\end{array}$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-1&-6&0\\0&1&5&1\\0&0&-56&-11\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \mid\ :(-56)\end{array}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-1&-6&0\\0&1&5&1\\0&0&1&11/56\end{pmatrix}\begin{array}{l}+\\ -\\ \cdot 5\quad \cdot 6\end{array}$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-1&0&66/56\\0&1&0&1/56\\0&0&1&11/56\end{pmatrix}\begin{array}{l}+\\ \cdot 1\\ \\ \end{array}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0&67/56\\0&1&0&1/56\\0&0&1&11/56\end{pmatrix}$$

A strictement parler, l'algorithme de Gauss s'arrête lorsque la matrice est triangulaire supérieure, mais il a ici été continué afin d'obtenir une forme réduite.

Exercice 6. On applique l'algorithme de Gauss en partant du tableau suivant :

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 13 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 13 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \quad \cdot 2 \\ \\ \\ - \\ - \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ \mid \cdot (-1) \\ \\ - \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 2 \quad \cdot 1 \\ - \\ - \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid \cdot (-1) \quad \cdot 2 \\ - \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ + \\ \cdot 1 \quad \cdot 1 \quad \cdot 1 \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ \cdot 1 \quad \cdot 1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot 1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi le système admet la famille de solutions paramétrée par $x \in \mathbf{R}$:

$$y = \frac{29 - x}{2}\,, \qquad z = 14\,, \qquad u = -8\,, \qquad v = -5\,.$$