Méthodes mathématiques pour physiciens I
Corrigé série 6

Echauffement

1. On cherche trois nombres réels x, y et z tels que

$$v_1 = x\,a_1 + y\,a_2 + z\,a_3 .$$

Ceci revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) = 200 , \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) = 125 , \qquad z = 3930 ,$$

et ainsi

$$v_1 = \frac{325}{\sqrt{2}}\,a_1 + \frac{75}{\sqrt{2}}\,a_2 + 3930\,a_3 .$$

2. Le produit scalaire est

$$(v_1, v_2) = (-1) + 2 + (-3) = -2 ,$$

et le produit vectoriel est

$$v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-2 \\ -(3-1) \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Exercice 1.

1. Les vecteurs $\{v_1, v_2, v_3\}$ ne sont linéairement indépendants, car $3v_1 - v_2 + 2v_3 = 0$ ou $v_2 = 3v_1 + 2v_3$.
2. On voit facilement que les vecteurs v_1 et v_3 sont linéairement indépendants, c'est-à-dire que

$$\alpha v_1 + \beta v_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \beta = 0 .$$

Ainsi, comme v_2 peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de v_1 et v_3 par le premier point, il suit que l'ensemble $\{v_1, v_3\}$ forme une base de E. La dimension de E est donc deux.

3. L'ensemble des vecteurs de E forme un plan.
4. On cherche un vecteur $u \in \mathbf{R}^3$ qui soit orthogonal à E, *i.e.* tel que

$$\forall v \in E\, ,\ (u, v) = 0 .$$

Il faut et il suffit pour cela que u soit orthogonal aux deux vecteurs d'une base de E, car, par bilinéarité du produit scalaire, u sera alors orthogonal à tout vecteur de E. Avec la base trouvée au point 2.,

$$0 = (u, v_1) = u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 0 + u_3 \cdot 1 = u_1 + u_3 ,$$
$$0 = (u, v_2) = u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 1 + u_3 \cdot 0 = u_1 + u_2 .$$

Les solutions de ce système d'équations s'écrivent, en termes d'un paramètre $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$u_1 = \lambda , \qquad u_2 = -\lambda , \qquad u_3 = -\lambda .$$

Autrement dit, tout vecteur de la forme $(\lambda, -\lambda, -\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$ est orthogonal à E.
Remarque : En fait on a ainsi déterminé l'ensemble des vecteurs orthogonaux à E, qui est donc le sous-espace vectoriel de dimension un de $\mathbf{R}^3$ engendré par le vecteur $(1, -1, -1)$,

$$E^{\perp} = \langle (1, -1, -1) \rangle .$$

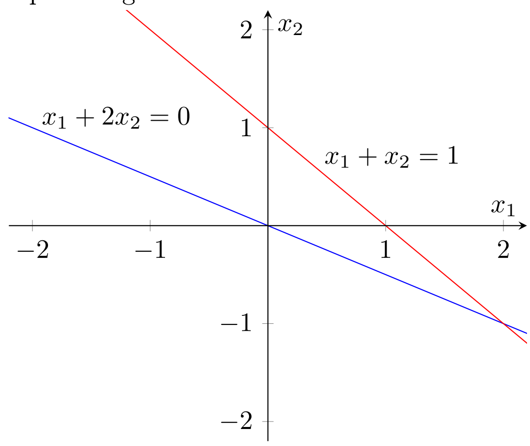
Exercice 2.

1. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^n$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

   a) $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, \sum_{i=1}^n i x_i = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. En effet, pour tout $x, y \in A$ et $\lambda \in \mathbf{R}$,
   $$\sum_{i=1}^n i\,(x_i + \lambda y_i) = \sum_{i=1}^n i x_i + \lambda \sum_{i=1}^n i y_i = 0\,,$$
   et donc $x + \lambda y \in A$.

   b) $B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. En effet, B ne contient pas le vecteur nul $(0, \ldots, 0)$.

2. Le sous-espace vectoriel A correspond à une droite passant par zéro alors que le sous-espace B est aussi une droite mais ne passant pas par l'origine.



Remarque : Le sous-espace B est un espace affine car il s'agit de l'espace vectoriel

$$B' = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, \sum_{i=1}^n x_i = 0\right\}\,,$$

qui est translaté du vecteur $(1, 0, \ldots, 0)$ par rapport à l'origine, comme le montre la figure précédente. Ainsi B peut s'écrire comme somme d'un point de B plus de l'espace vectoriel B' :

$$B = (1, 0, \ldots, 0) \oplus B'\,.$$

Exercice 3. Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille orthonormale de vecteurs de E. Supposons que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0\,.$$

Il faut montrer que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Comme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une famille orthonormale, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$0 = (v_j, 0) = \left(v_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\,(v_j, v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ji} = \lambda_j\,.$$

Exercice 4.

1. Pour exprimer x dans la nouvelle base il faut résoudre le système

$$\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},$$

   dont il est aisé de voir que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = 3$ est une solution. Ainsi $x = 4v_2 + 3v_3$.

2. Par le procédé de Gram-Schmidt :

$$a_1 = b_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \hat{a}_1 = \frac{\hat{a}_1}{\sqrt{(a_1,a_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$a_2 = b_2 - (b_2,\hat{a}_1)\,\hat{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \hat{a}_2 = \frac{\hat{a}_2}{\sqrt{(a_2,a_2)}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$a_3 = b_3 - (b_3,\hat{a}_1)\,\hat{a}_1 - (b_3,\hat{a}_2)\,\hat{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad \hat{a}_3 = \frac{\hat{a}_3}{\sqrt{(a_3,a_3)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

   et donc $\{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3\}$ forme une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$.

3. Comme

$$(x,\hat{a}_1) = \frac{9}{\sqrt{2}}, \qquad (x,\hat{a}_2) = 4, \qquad (x,\hat{a}_3) = \frac{3}{\sqrt{2}},$$

   alors

$$x = \frac{9}{\sqrt{2}}\hat{a}_1 + 4\hat{a}_2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\hat{a}_3 .$$

<u>Remarque :</u> Au point 1. les coefficients ne sont pas donnés pas les produits scalaires (x, b_i) puisque la base $\{b_1, b_2, b_3\}$ n'est pas orthonormée.

Exercice 5.

1. Soient $p = (-1, 1, 2)$ le vecteur déterminant l'origine du plan et $b_1 = (1, 1, 3)$ et $b_2 = (0, 1, -1)$ les vecteurs générateurs du plan. Pour obtenir un vecteur perpendiculaire au plan Ω il suffit de trouver un vecteur non-nul $b_3 \in \mathbf{R}^3$ qui ne soit pas engendré par $\{b_1, b_2\}$ et d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base $\{b_1, b_2, b_3\}$ de $\mathbf{R}^3$. En choisissant $b_3 = (1, 0, 0)$, on obtient :

$$a_1 = b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \qquad \hat{a}_1 = \frac{a_1}{\sqrt{(a_1,a_1)}} = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},$$

$$a_2 = b_2 - (b_2,\hat{a}_1)\,\hat{a}_1 = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}2\\13\\-5\end{pmatrix}, \qquad \hat{a}_2 = \frac{a_2}{\sqrt{(a_2,a_2)}} = \frac{1}{\sqrt{198}}\begin{pmatrix}2\\13\\-5\end{pmatrix},$$

$$a_3 = b_3 - (b_3,\hat{a}_1)\,\hat{a}_1 - (b_3,\hat{a}_2)\,\hat{a}_2 = \frac{2}{9}\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}, \qquad \hat{a}_3 = \frac{a_3}{\sqrt{(a_3,a_3)}} = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Alors le plan Ω est caractérisé par :

$$\Omega = \{p + \mu \hat{a}_1 + \nu \hat{a}_2,\ \mu, \nu \in \mathbf{R}\} ,$$

et comme $\{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3\}$ forme une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ alors le vecteur normal au plan Ω de norme 1 est donnée par $\hat{a}_3$.

2. Le vecteur $b_1 \times b_2$ est perpendiculaire au plan Ω, c'est-à-dire :

$$b_1 \times b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{18}\, \hat{a}_3 .$$

Exercice 6.

1. Comme f et g sont représentées par des matrices symétriques, les deux applications sont bilinéaires et symétriques. De plus f est définie positive car pour tout $x \neq 0$,

$$f(x, x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 > 0 .$$

L'application g n'est pas définie positive puisque pour $x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ par exemple,

$$g(x, x) = -2 .$$

Par conséquent f est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$ mais pas g.

2. En appliquant Gram-Schmidt :

$$a_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{a}_1 = \frac{a_1}{\sqrt{f(a_1, a_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$a_2 = e_2 - f(e_2, \hat{a}_1)\, \hat{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{a}_2 = \frac{a_2}{\sqrt{f(a_2, a_2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

et ainsi $\{\hat{a}_1, \hat{a}_2\}$ est une base orthonormée relativement à f de $\mathbf{R}^2$, comme il est possible de le voir explicitement en montrant que $f(\hat{a}_i, \hat{a}_j) = \delta_{ij}$.