Méthodes mathématiques pour physiciens I
Corrigé série 8

Echauffement

01 En utilisant les lois définies aux cours :

1. Pour $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, en notant $z = (x, y)$,

$$z \cdot \frac{1}{z} = (x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}, \frac{yx-xy}{x^2+y^2}\right) = (1, 0) = 1\,.$$

2. Comme par notation $i = (0, 1)$, alors

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0-1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1\,.$$

3. Pour $z = (x, y)$, comme $\overline{z} = (x, -y)$, alors

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{1}{2}\big((x,y)+(x,-y)\big) = \frac{1}{2}(2ax, 0) = (x, 0) = \Re z\,.$$

4. De manière équivalente :

$$\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{1}{2}\big((x,y)-(x,-y)\big) \cdot (0,-1) = \frac{1}{2}(0, 2y) \cdot (0,-1) = (y, 0) = \Im z\,.$$

02 Les développements en série de sin et cos étant donnés par

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\,, \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\,,$$

en prenant uniquement les premiers termes :

$$\sin(1) \approx 1 - \frac{1}{6} \approx 0.84\,, \qquad \cos(1) \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \approx 0.54\,.$$

Exercice 1. D'une part

$$|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 = (1 - \bar{z}_1 z_2)(1 - z_1 \bar{z}_2) = 1 - \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 + |z_1|^2 |z_2|^2\,,$$

et d'autre part

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 - z_2 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2 + |z_2|^2\,.$$

Ainsi,

$$|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 + |z_1|^2 |z_2|^2 = \left(1 - |z_1|^2\right)\left(1 - |z_2|^2\right)\,.$$

Exercice 2.

1. $\arg(1+I) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $|1+i| = \sqrt{2}$ donc $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
2. $\arg\left(-1-\sqrt{3}i\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) - \pi = \frac{-2\pi}{3}$ et $\left|-1-\sqrt{3}i\right| = 2$ donc $-1-\sqrt{3}i = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.
3. $\arg\left(3\sqrt{3}+3i\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ et $\left|3\sqrt{3}+3i\right| = 6$ donc $3\sqrt{3}+3i = 6e^{\frac{\pi}{6}i}$.
4. $2e^{\frac{\pi}{3}i} = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}i$.
5. $4e^{\frac{3\pi}{2}i} = 4\left(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})\right) = -4i$.
6. $e^{-i} = \cos(-1) + i\sin(-1) \approx 0.54 - 0.84i$.

Exercice 3.

1. En simplifiant

$$z_1 = \left(\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{2e^{-\frac{\pi}{3}i}}\right)^{10} = \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^{10} = e^{\frac{20\pi}{3}i} = e^{6\pi i}e^{\frac{2\pi}{3}i} = e^{\frac{2\pi}{3}i}\,,$$

   et donc

$$\Re(z_1) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\,, \qquad \Im(z_1) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

2. En simplifiant les exponentielles puis en multipliant par le conjugué

$$z_2 = \frac{e^{3\pi i}e^{\frac{\pi}{6}i}}{e^{\frac{\pi}{6}i}(1+2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i})} = e^{3\pi i}\frac{(1+2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i})}{(1+2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i})(1+2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i})} = e^{3\pi i}\frac{(1+2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i})}{1+2\sqrt{3}(e^{\frac{\pi}{6}i}+e^{-\frac{\pi}{6}i})+12}\,.$$

   Comme

$$e^{3\pi i} = -1\,, \qquad e^{\pm\frac{\pi}{6}i} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i\,,$$

   alors

$$\Re(z_2) = \frac{-4}{19}\,, \qquad \Im(z_2) = \frac{\sqrt{3}}{19}\,.$$

3. Premièrement il faut essayer de simplifier l'expression pour avoir des angles remarquables :

$$z_3 = \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}\,,$$

   et ensuite en multipliant par le conjugué :

$$z_3 = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+i\left(4+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{2\left(4+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}+i\right] = \frac{1}{2}\left[-2+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}+i\right]\,.$$

4. En écrivant i comme $e^{i\frac{\pi}{2}}$,

$$z_4 = i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{ii\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}\,.$$

5. En utilisant l'inverse de l'exponentielle,

$$z_5 = (-5i)^{(-i)} = e^{-i\log(-5i)} = e^{-i\log(5e^{-i\frac{\pi}{2}})} = e^{-i\log(5)-\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}e^{-i\log(5)}\,,$$

   et donc

$$\Re(z_5) = \cos\left(\log(5)\right)e^{-\frac{\pi}{2}}\,, \qquad \Im(z_5) = -\sin\left(\log(5)\right)e^{-\frac{\pi}{2}}\,.$$

6. En réécrivant la base sous forme exponentielle puis en utilisant la propriété du logarithme,

$$\begin{aligned} z_6 = (\sqrt{3}+i)^{1+i} &= \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{(1+i)} = e^{(1+i)\log\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)} = e^{(1+i)\left(\log(2)+i\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= e^{\log(2)-\frac{\pi}{6}+i\left(\log(2)+\frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{-\frac{\pi}{6}}e^{i\left(\log(2)+\frac{\pi}{6}\right)}\,, \end{aligned}$$

   et donc

$$\Re(z_6) = 2\cos\left(\log(2)+\frac{\pi}{6}\right)e^{-\frac{\pi}{6}}\,, \qquad \Im(z_6) = 2\sin\left(\log(2)+\frac{\pi}{6}\right)e^{-\frac{\pi}{6}}\,.$$

Exercice 4. Tout d'abord, comme

$$z^2 + bz + c = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(z + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}\,,$$

alors les solutions de l'équation sont

$$z_\pm = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}\,.$$

1. Pour que l'équation admette au moins une solution réelle, il faut que la racine soit réelle, *i.e.* que

   $$b^2 - 4c \geq 0\,.$$

   A remarquer qu'alors les deux solutions sont réelles.
2. Pour que l'équation admette au moins une solution purement imaginaire, il faut que la racine soit imaginaire et que la partie réelle s'annule, *i.e.* que

   $$b^2 - 4c < 0 \text{ et } b = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 0 \text{ et } c > 0\,.$$

Exercice 5. Tout d'abord, il faut remarquer que $z = 0$ est solution de l'équation pour tout $n \in \mathbf{N}$, et donc il ne reste plus qu'à déterminer les solutions non-nulles.

Pour tout $z \in \mathbf{C}^*$, il existe $r > 0$ et $\varphi \in [0, 2\pi)$ tels que

$$z = re^{i\varphi}\,.$$

Ainsi, l'équation de l'énoncé s'écrit

$$\overline{z} = z^{n-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad re^{-i\varphi} = r^{n-1}e^{i\varphi(n-1)} \qquad \Leftrightarrow \qquad r^{n-2}e^{in\varphi} = 1\,.$$

Ceci fournit le système d'équations suivant :

$$r^{n-2} = 1\,, \qquad\qquad e^{in\varphi} = 1\,.$$

La solution de la première équation est

$$n = 2 \qquad \text{ou} \qquad r = 1\,,$$

et la solution de la seconde

$$\varphi \in \left\{\frac{2\pi k}{n}\,,\ k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}\,.$$

1. Dans le cas $n = 2$, il n'y a pas de contrainte sur $r > 0$ et les solutions sont données par $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$, ce qui correspond à $z \in \mathbf{R}^*$.
2. Dans le cas $n \neq 2$, alors $r = 1$ et les solutions sont données par :

   $$z \in \left\{\exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right)\,,\ k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}\,.$$

Finalement pour obtenir l'ensemble des solutions il faut rajouter $z = 0$ dans les deux cas.

Exercice 6. Comme

$$\log^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n},$$

alors la série du logarithme en $z = 1$ est donnée par :

$$\log(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n .$$

Ensuite le rayon de convergence de cette série est

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_n}{f_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1\,,$$

et donc la série converge pour tout $z \in D(1,1)$.

Exercice 7. Tout d'abord, en utilisant la série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\left(e^{-i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}\right)} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} .$$

Ainsi avec l'aide de l'indication,

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \Re\left(e^{ikx}\right) = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,,$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \Im(e^{ikx}) = \Im\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} .$$

Exercice 8. Pour calculer, le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n$, il faut utiliser la définition

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} |f_n|^{1/n} .$$

Or pour le f_n donné, on obtient

$$|f_n|^{1/n} = \begin{cases} a\,, & n \in 2\mathbf{N}\,, \\ b\,, & n \in 2\mathbf{N}+1\,, \end{cases}$$

et donc comme $0 < a < b$, la limite supérieure de cette suite est donnée par b. Par conséquent le rayon de convergence est

$$\rho = \frac{1}{b} .$$