Méthodes mathématiques pour physiciens I
Corrigé série 9

Notation : Dans tout le corrigé, C et C' sont des nombres réels quelconques.

Echauffement

1. En réécrivant l'équation puis en intégrant de chaque côté,

$$dy = 2xdx \quad \Rightarrow \quad y(x) = x^2 + C\,.$$

2. De manière similaire,

$$\frac{dy}{y} = -dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -x + C' \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{C'}e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \pm e^{C'}e^{-x}\,,$$

et comme $y = 0$ est trivialement solution de l'équation la solution générale est donnée par

$$y(x) = Ce^{-x}\,.$$

3. Toujours par séparation des variables,

$$\frac{dy}{y^2} = dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = x + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{-1}{x+C}\,.$$

Exercice 1.

1. En séparant les variables puis en intégrant,

$$\frac{dy}{y} = \lambda dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \lambda x + C' \quad \Rightarrow \quad |y(x)| = e^{C'}e^{\lambda x}\,,$$

et donc comme $y = 0$ est aussi solution

$$y(x) = \pm e^{C'}e^{\lambda x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ce^{\lambda x}\,.$$

2. En séparant les variables, l'équation se réécrit ainsi :

$$\frac{dy}{2y(5-y)} = dx\,.$$

Pour intégrer le membre de gauche, il faut décomposer en fractions simples,

$$\frac{1}{2y(5-y)} = \frac{1}{10y} + \frac{1}{10(5-y)}\,.$$

L'intégrale écrite sous cette forme se calcule facilement et donne

$$\frac{1}{10}\left(\ln|y| - \ln|5-y|\right) = x + C'\,,$$

c'est-à-dire comme $y = 0$ est aussi solution,

$$\frac{y}{5-y} = Ce^{10x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{5Ce^{10x}}{1+Ce^{10x}}\,.$$

3. Par séparation des variables,

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = dx \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsinh}(y) = x + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \sinh(x + C)\,.$$

Exercice 2.

1. Par séparation des variables,

$$\frac{dy}{y} = -\tan(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|\cos(x)| + C' \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{C'}|\cos(x)| \,,$$

et comme $y = 0$ est aussi solution de l'équation alors

$$y(x) = \pm e^{C'} \cos(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = C\cos(x) \,.$$

2. En séparant les variables,

$$\frac{dy}{1-y} = \cos(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad -\ln|1-y| = \sin(x) + C' \quad \Rightarrow \quad |1-y| = e^{-C'}e^{-\sin(x)} \,,$$

et comme $y = 1$ est aussi solution,

$$y = 1 \mp e^{-C'}e^{-\sin(x)} \quad \Rightarrow \quad y(x) = 1 - Ce^{-\sin(x)} \,.$$

Exercice 3. L'équation peut être réécrite sous la forme

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \,,$$

avec P et Q des fonctions homogènes de degré un,

$$P(x,y) = -(9x+2y) \,, \qquad\qquad Q(x,y) = 2x + y \,.$$

Par conséquent, en effectuant la substitution

$$y(x) = x\,v(x) \,,$$

l'équation devient

$$v + xv' = \frac{9x + 2xv}{2x + xv} \quad \Rightarrow \quad \frac{2+v}{9-v^2}dv = \frac{dx}{x} \,.$$

Pour intégrer le membre de gauche, il faut chercher A et B tels que :

$$\frac{2+v}{9-v^2} = \frac{A}{3+v} + \frac{B}{3-v} \,.$$

En mettant au même dénominateur, on obtient l'équation

$$2 + v = A(3-v) + B(3+v) \,.$$

Comme cette relation doit être vraie pour tout v, on la calcule en particulier pour $v = 3$ et $v = -3$, ce qui donne $B = 5/6$ et $A = -1/6$, donc

$$\frac{2+v}{9-v^2} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{3-v} - \frac{1}{3+v}\right) \,.$$

Par conséquent en intégrant les deux côtés de l'équation,

$$-\frac{1}{6}\left(5\ln|3-v| + \ln|3+v|\right) = \ln|x| + C' \,,$$

c'est-à-dire

$$|3-v|^5 \cdot |3+v| = e^{-6C'} \cdot |x|^{-6} \,.$$

Finalement, il faut effectuer la substitution inverse $v(x) = x^{-1}y(x)$ pour obtenir la solution générale de l'équation différentielle sous forme implicite :

$$(3x - y(x))^5 \cdot (3x + y(x)) = C \,,$$

puisque $y(y) = \pm 3x$ est aussi solution.

Exercice 4. L'équation peut être réécrite sous la forme

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0\,,$$

avec

$$P(x,y) = \ln\left(y^2+1\right)\,, \qquad\qquad Q(x,y) = \frac{2y(x-1)}{y^2+1}\,.$$

Alors l'équation est le cas d'une dérivée totale puisque

$$\partial_y P = \frac{2y}{1+y^2} = \partial_x Q\,,$$

et donc il faut chercher une fonction U telle que $P = \partial_x U$ et $Q = \partial_y U$. En intégrant l'équation $P = \partial_x U$ par rapport à x, on trouve

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx + q(y) = x\ln(y^2+1) + q(y)\,.$$

Pour déterminer $q(y)$, on impose $\partial_y U = Q$, ce qui donne en réinjectant la dernière équation

$$\frac{2xy}{1+y^2} + q'(y) = \frac{2y(x-1)}{1+y^2} \quad \Rightarrow \quad q'(y) = \frac{-2y}{1+y^2} \quad \Rightarrow \quad q(y) = -\ln\left(y^2+1\right) - C\,.$$

Par conséquent

$$U(x,y) = (x-1)\ln\left(y^2+1\right) - C\,,$$

et donc la solution générale est donnée par la condition $U = 0$, *i.e.*

$$y_\pm(x) = \pm\sqrt{e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)} - 1}\,.$$

Exercice 5. En multipliant toute l'équation par $(1+x^2+y^2)^{-3/2}$, on obtient une équation de la forme

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0\,,$$

avec

$$P(x,y) = \frac{y(1+y^2)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,, \qquad\qquad Q(x,y) = \frac{x(1+x^2)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,.$$

Comme $\partial_y P = \partial_x Q$ alors il s'agit bien d'un facteur intégrant, et donc il faut chercher une fonction U telle que $P = \partial_x U$ et $Q = \partial_y U$. Comme dans l'exercice précédent, en intégrant la première équation,

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx + q(y) = y(1+y^2)\int \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} + q(y)\,.$$

Pour trouver une primitive, il faut effectuer les changements de variable $z = \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}$ puis $z = \sinh(v)$ ou alors utiliser l'indication pour trouver finalement

$$U(x,y) = \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{1/2}} + q(y)\,.$$

En injectant ce U dans la seconde équation, on trouve $q'(y) = 0$ donc $q(y)$ est une constante. La solution générale de l'équation différentielle est finalement

$$\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{1/2}} = C \quad \Rightarrow \quad y_\pm(x) = \pm\sqrt{\frac{C^2(1+x^2)}{x^2-C^2}}\,.$$

Exercice 6. En multipliant l'équation par l'un ou l'autre des facteurs intégrants proposés on obtient des équations de la forme

$$P_i(x,y)\,dx + Q_i(x,y)\,dy = 0\,,$$

avec respectivement pour μ_1 et μ_2,

$$P_1(x,y) = \frac{y}{x^2}\,, \qquad Q_1(x,y) = -\frac{1}{x}\,, \qquad P_2(x,y) = \frac{1}{y}\,, \qquad Q_2(x,y) = -\frac{x}{y^2}\,.$$

Pour s'assurer qu'on a bien obtenu une dérivée totale, on vérifie que

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial P_2}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial Q_2}{\partial x}\,.$$

Comme vu au cours, la connaissance de deux facteurs intégrants donne directement la solution

$$u(x) = \frac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)} = \frac{y^2}{x^2} = C'\,.$$

La solution donnée par la méthode est donc $y(x) = C\,x$, comme on peux aisément le vérifier.

Exercice 7. L'équation se réécrit sous la forme

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0\,,$$

avec

$$P(x,y) = 1 - xy\,, \qquad Q(x,y) = xy - x^2\,.$$

Un facteur intégrant qui ne dépend que de x doit satisfaire

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\partial_y P(x,y) - \partial_x Q(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{-x-(y-2x)}{x(y-x)} = -\frac{1}{x}\,.$$

En intégrant de chaque côté de cette dernière équation,

$$\ln|\mu| = -\ln|x| + C\,,$$

et donc une solution est donnée par :

$$\mu(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Pour s'assurer qu'on ne s'est pas trompé on peut vérifier la condition $\partial_y(\mu P) = \partial_x(\mu Q)$. Ainsi on cherche une fonction U telle que $\mu P = \partial_x U$ et $\mu Q = \partial_y U$. En intégrant la première équation,

$$U(x,y) = \int \mu(x)\,P(x,y)dx + q(y) = \int\left(\frac{1}{x} - y\right)dx + q(y) = \ln|x| - xy + q(y)\,,$$

puis en injectant dans $\partial_y U = \mu Q$,

$$-x + q'(y) = y - x \quad \Rightarrow \quad q(y) = \frac{1}{2}y^2 - C\,.$$

Par conséquent

$$U(x,y) = \ln|x| - xy + \frac{1}{2}y^2 - C\,,$$

et donc la solution générale est donnée sous forme implicite par $U = 0$, ou en résolvant l'équation du second degré en y,

$$y_\pm(x) = x \pm \sqrt{x^2 - 2\left(\ln|x| - C\right)}\,.$$