Méthodes mathématiques pour physiciens I
Corrigé série 10

Echauffement L'équation

$$y'' = a$$

se résout par intégration directe :

$$y' = \int y'' \, dx = \int a \, dx = ax + v$$

où $v \in \mathbf{R}$. En intégrant une nouvelle fois :

$$y = \int y' \, dx = \int (ax + v) \, dx = \frac{1}{2}ax^2 + vx + y_0$$

où $y_0 \in \mathbf{R}$.

Remarque : Cette solution générale correspond au mouvement unidimensionnel uniformément accéléré.

Exercice 1. L'équation différentielle

$$(y - xy')^2 = -2y'$$

est une équation de Clairaut car en prenant la racine :

$$y = xy' \pm \sqrt{-2y'} \,.$$

La solution générale triviale est donnée pour $C \geq 0$ par :

$$y(x) = -Cx \pm \sqrt{2C} \,,$$

et l'autre solution est donnée par :

$$x = \frac{\pm 1}{\sqrt{-2p}} \,, \qquad y = \frac{\pm p}{\sqrt{-2p}} \pm \sqrt{-2p} \,,$$

c'est-à-dire en éliminant p,

$$2xy = 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2x} \,.$$

Exercice 2.

1. Premièrement il faut trouver une solution y_0 de l'équation homogène

$$y_0' - \tan(x) y_0 = 0\,.$$

Par séparation des variables,

$$\frac{dy_0}{y_0} = \tan(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y_0| = \int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)|\ ,$$

et donc une solution de l'équation homogène est donnée par :

$$y_0(x) = \frac{1}{\cos(x)}\,.$$

La méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution y_p de l'équation inhomogène sous la forme

$$y_p(x) = C(x)y_0(x) = \frac{C(x)}{\cos(x)}\,.$$

En substituant dans l'équation différentielle et en intégrant par parties,

$$\frac{C'(x)}{\cos(x)} = x \quad \Rightarrow \quad C'(x) = x\cos(x) \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int x\cos(x)dx = \cos(x) + x\sin(x)\,,$$

et donc une solution de l'équation inhomogène est donnée par :

$$y_p(x) = 1 + x\tan(x)\,.$$

Par conséquent la solution générale de l'équation inhomogène est donnée pour $C \in \mathbf{R}$ par :

$$y(x) = y_p(x) + Cy_0(x) = 1 + x\tan(x) + \frac{C}{\cos(x)}\,.$$

2. Il faut tout d'abord trouver une solution y_0 de l'équation inhomogène

$$y_0' + y_0\cos(x) = 0\,.$$

Par séparation des variables,

$$\frac{dy_0}{y_0} = -\cos(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y_0| = -\sin(x)\,,$$

et donc une solution est donnée par :

$$y_0(x) = e^{-\sin(x)}\,.$$

En substituant

$$y_p(x) = C(x)e^{-\sin(x)}$$

dans l'équation inhomogène, nous obtenons

$$C'(x)e^{-\sin(x)} = \cos(x)^3 \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int e^{\sin(x)}\cos(x)^3 dx\,.$$

Pour intégrer, il faut effectuer le changement de variables $t = \sin(x)$, puis intégrer par parties :

$$C(x) = \int e^t\left(1-t^2\right)dt = e^t - \int e^t t^2 dt = -\left(1-t^2\right)e^t = -\left(\sin(x)-1\right)^2 e^{\sin(x)}\,.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation inhomogène est donnée pour $C \in \mathbf{R}$ par :

$$y(x) = y_p(x) + Cy_0 = Ce^{-\sin(x)} - \left(\sin(x)-1\right)^2\ .$$

Exercice 3. L'équation
$$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^2 \,,$$
est une équation de Bernoulli et donc il faut effectuer le changement de variable $v = 1/y$ afin d'obtenir une équation linéaire :
$$v' - \frac{v}{x} = -x^2 \,.$$
Par séparation des variables, une solution v_0 de l'équation inhomogène est donnée par :
$$v_0(x) = x \,.$$
En substituant
$$v_p(x) = C(x)v_0(x) = C(x)x$$
dans l'équation inhomogène pour v,
$$C(x) = -\int x\,dx = -\frac{1}{2}x^2 \,.$$
Par conséquent la solution générale est donnée par :
$$v(x) = v_p(x) + C'v_0(x) = \frac{-1}{2}\left(x^3 + Cx\right) \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{-2}{x^3 + Cx} \,.$$

Exercice 4. L'équation différentielle
$$2x^2 y' = (x-1)\left(y^2 - x^2\right) + 2xy \,,$$
est une équation de Ricatti et donc il faut trouver une solution particulière à la main. De manière triviale $y_p(x) = x$ est une solution de l'équation et en substituant
$$y = x + \frac{1}{v} \,,$$
dans l'équation, on obtient une équation linéaire pour v,
$$v' + v = -\frac{x-1}{2x^2} \,.$$
Une solution de l'équation homogène est donnée par
$$v_0(x) = e^{-x} \,,$$
et donc en substituant
$$v_p(x) = C(x)e^{-x}$$
dans l'équation inhomogène,
$$C(x) = \int \frac{1-x}{2x^2} e^x dx = -\int \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{2x}\right) dx = -\frac{e^x}{2x} \,.$$
Ainsi, la solution générale est donnée par :
$$v(x) = v_p(x) + C'v_0(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + Ce^{-x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = x - \frac{2}{\frac{1}{x} + Ce^{-x}} \,,$$
avec $C \in \mathbf{R}$.

Exercice 5. L'équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

est linéaire à coefficients constants. En substituant l'ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

dans l'équation on trouve que

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0\,,$$

c'est-à-dire $\lambda = \pm i\omega$. Par conséquent la solution générale est donnée par :

$$x(t) = C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t}\,,$$

avec $C_\pm \in \mathbf{C}$. En redéfinissant les constantes, la partie réelle de cette solution peut aussi s'écrire sous la forme

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\,.$$

Une autre manière de résoudre le problème est de poser $\dot{x} = p(x)$ et donc l'équation devient

$$p'p + \omega^2 x = 0\,.$$

Par séparation des variables,

$$\int p\,dp + \omega^2 \int x\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}C^2\,,$$

avec $C \in \mathbf{R}$ et ainsi,

$$p(x) = \sqrt{C^2 - \omega^2 x^2}\,.$$

Finalement il reste à résoudre l'équation $\dot{x} = p(x)$ ce qui peut être effectué par séparation des variables :

$$t - t_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{C^2 - \omega^2 x^2}} = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{\omega x}{C}\right)\,,$$

et donc la solution générale est donnée par :

$$x(t) = \frac{C}{\omega}\sin\left(\omega\left(t - t_0\right)\right)\,,$$

avec $C \in \mathbf{R}$ et $t_0 \in \mathbf{R}$.

Remarque : Cette solution générale correspond au mouvement d'un oscillateur harmonique unidimensionnel d'amplitude $A = \frac{C}{\omega}$ et de phase $\varphi = \omega t_0$.