Méthodes mathématiques pour physiciens I
Corrigé série 11

Exercice 1. Soit l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega > 0$,

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0\,.$$

1. Pour écrire cette équation différentielle sous la forme d'un système dynamique, on définit

$$z = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'équation différentielle devient $\dot{z} = Az$, car

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}, \qquad Az = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\omega^2 y \end{pmatrix},$$

et en comparant composante par composante on retrouve bien l'équation différentielle.

2. La solution générale est donnée par $z(t) = e^{At} z_0$ et donc pour calculer l'exponentielle de At il faut tout d'abord diagonaliser A. Les valeurs propres de A sont données par $\lambda_\pm = \pm i\omega$ avec les vecteurs propres associés $v_\pm = (1, \pm i\omega)$. Ainsi en définissant

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \frac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} \omega & -i \\ \omega & i \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix},$$

alors

$$A = SDS^{-1}\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} e^{At} &= S e^{Dt} S^{-1} \\ &= \frac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & -i \\ \omega & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} \omega \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) & -i \left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) \\ -i\omega^2 \left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) & \omega \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et donc la solution générale est donnée par :

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) y(0) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \dot{y}(0) \\ \cos(\omega t) \dot{y}(0) - \omega \sin(\omega t) y(0) \end{pmatrix}.$$

3. Comme les valeurs propres $\lambda_\pm$ sont purement imaginaires, les solutions ne croissent ni ne décroissent exponentiellement vite. Les solutions sont donc forcément oscillatoires ou statiques.

Exercice 2. Soit l'équation différentielle

$$\ddot{y} + \dot{y} - y = 0\,.$$

En définissant

$$z = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

cette équation différentielle s'écrit comme $\dot{z} = Az$. L'unique point fixe de cette équation est $z = 0$. Les directions stables et instables correspondent respectivement aux vecteurs propres à valeurs propres dont la partie réelle est respectivement négative ou positive. Les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés sont donnés par

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right), \qquad v_\pm = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \pm \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

La direction stable est alors fixée par le vecteur propre associé à λ_- c'est-à-dire par v_- et la direction instable par v_+.

Exercice 3. Comme aux exercices précédents, en définissant

$$z = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2k \end{pmatrix},$$

l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique amorti

$$\ddot{y} + 2k\dot{y} + \omega^2 y = 0\,,$$

est équivalent au système dynamique $\dot{z} = Az$. Les valeurs propres de A sont données par $\lambda_\pm = -k \pm \Delta$ avec $\Delta = \sqrt{k^2 - \omega^2}$ et les vecteurs propres associés par $v_\pm = (1, \lambda_\pm)$. Ainsi en définissant

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} -\lambda_- & 1 \\ \lambda_+ & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix},$$

alors

$$A = SDS^{-1}\,.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} e^{At} &= Se^{Dt}S^{-1} \\ &= \frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\lambda_- & 1 \\ \lambda_+ & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} \lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t} & e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t} \\ \lambda_+\lambda_-\left(e^{\lambda_- t} - e^{\lambda_+ t}\right) & \lambda_+ e^{\lambda_+ t} - \lambda_- e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc la solution générale est donnée par :

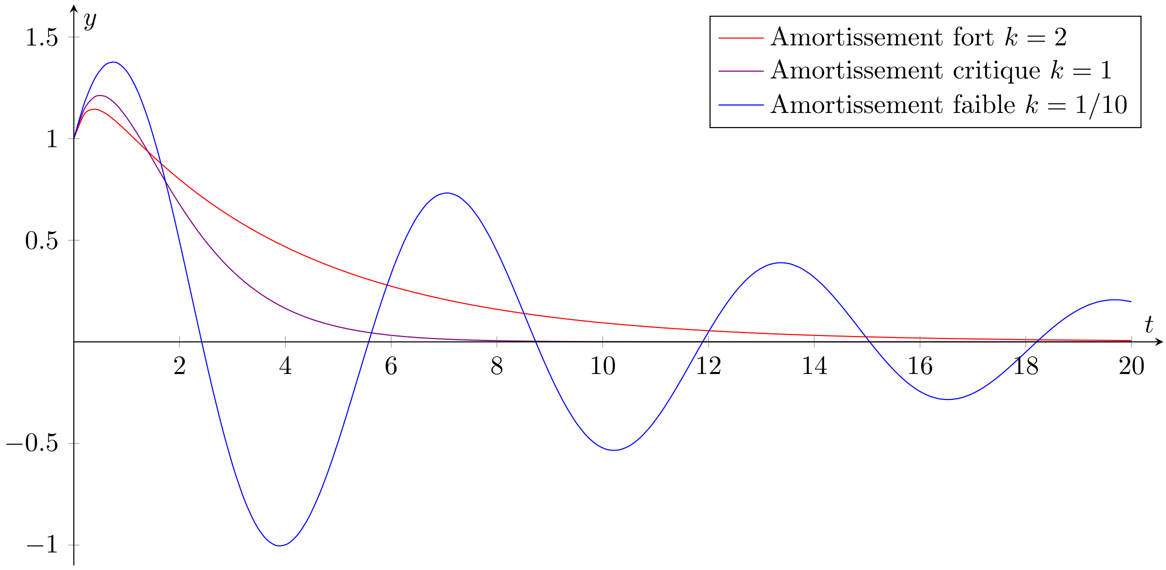
$$y(t) = \frac{1}{2\Delta}\left[\left(\lambda_+ y(0) - \dot{y}(0)\right)e^{\lambda_- t} - \left(\lambda_- y(0) - \dot{y}(0)\right)e^{\lambda_+ t}\right].$$

Il faut maintenant distinguer trois cas :

1. Amortissement fort $k > \omega$:
   Dans ce cas $\Delta = \sqrt{k^2 - \omega^2}$ est réel donc :
   $$y(t) = \frac{1}{2\Delta}\left[(\lambda_+ y(0) - \dot{y}(0))\, e^{\lambda_- t} - (\lambda_- y(0) - \dot{y}(0))\, e^{\lambda_+ t}\right] = Ae^{\lambda_- t} + Be^{\lambda_+ t}\,,$$
   avec
   $$A = \frac{\lambda_+ y(0) - \dot{y}(0)}{2\Delta}\,, \qquad B = \frac{\dot{y}(0) - \lambda_- y(0)}{2\Delta}\,.$$
   La solution décroît donc exponentiellement puisque les valeurs propres sont strictement négatives.
2. Amortissement faible $0 < k < \omega$:
   Dans ce cas $\Delta = \sqrt{k^2 - \omega^2}$ est imaginaire donc en définissant $\omega' = \sqrt{\omega^2 - k^2}$ comme $\Delta = i\omega'$,
   $$y(t) = \frac{e^{-kt}}{2i\omega'}\left[(\lambda_+ y(0) - \dot{y}(0))\, e^{-i\omega' t} - (\lambda_- y(0) - \dot{y}(0))\, e^{i\omega' t}\right] = e^{-kt}\left(A\sin(\omega' t) + B\cos(\omega' t)\right)\,,$$
   avec
   $$A = \frac{1}{\omega'}\left(ky(0) + \dot{y}(0)\right)\,, \qquad B = y(0)\,.$$
   La solution correspond donc à des oscillations amorties, les valeurs propres étant complexes avec partie réelle négative.
3. Amortissement critique $k = \omega$:
   Dans ce cas $\Delta = 0$ et donc la solution générale n'est pas bien définie puisqu'on divise par Δ. Néanmoins la solution s'obtient en prenant la limite $\Delta \to 0$,
   $$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{e^{-kt}}{2\Delta}\left[(\lambda_+ y(0) - \dot{y}(0))\, e^{-\Delta t} - (\lambda_- y(0) - \dot{y}(0))\, e^{\Delta t}\right] \\ &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{e^{-kt}}{\Delta}\left[A\sinh(\Delta t) + B\Delta\cosh(\Delta t)\right] \\ &= e^{-kt}\left[At \lim_{\Delta\to 0}\frac{\sinh(\Delta t)}{\Delta t} + B\lim_{\Delta\to 0}\cosh(\Delta t)\right] \\ &= (At + B)\, e^{-kt}\,, \end{aligned}$$
   avec
   $$A = ky(0) + \dot{y}(0)\,, \qquad B = y(0)\,.$$
   La solution n'oscille pas et est exponentiellement décroissante avec le taux le plus rapide possible puisqu'il s'agit du cas limite.

La figure suivante montre la solution $y(t)$ selon les trois cas avec les valeurs numériques

$$\omega = 1\,, \qquad y(0) = 1\,, \qquad \dot{y}(0) = 1\,.$$



Exercice 4. L'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = \sin x\,,$$

étant inhomogène, il faut commencer par trouver la solution générale de l'équation homogène

$$y'' + 2y' + y = 0\,.$$

Avec l'Ansatz $y_0(x) = \exp(\lambda x)$, nous obtenons le polynôme caractéristique suivant

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2\,,$$

dont l'unique racine $\lambda = -1$ est double. Par le théorème du cours, la solution générale de l'équation différentielle homogène est donc

$$y_0(x) = (A + Bx)\,e^{-x}\,,$$

pour $A, B \in \mathbf{R}$ arbitraires. Ensuite, nous cherchons une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante sous la forme

$$y_p(x) = C(x)e^{-x}\,.$$

En substituant cet Ansatz dans l'équation différentielle inhomogène, nous obtenons

$$C'' = \sin(x)\,e^x\,,$$

dont une solution est donnée en intégrant deux fois par

$$\begin{aligned} C(x) &= \iint \sin(x)e^x\,dx\,dx = \frac{i}{2}\iint \left(e^{(1-i)x} - e^{(1+i)x}\right)\,dx\,dx \\ &= \frac{i}{2}\,(1-i)^{-2}\,e^{(1-i)x} - \frac{i}{2}\,(1+i)^{-2}\,e^{(1+i)x} = \frac{-1}{4}\left(e^{(1-i)x} + e^{(1+i)x}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\cos(x)e^x\,. \end{aligned}$$

Par conséquent la solution générale de l'équation différentielle inhomogène est

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = (A + Bx)\,e^{-x} - \frac{1}{2}\cos(x)\,.$$