Méthodes mathématiques pour physiciens I
Corrigé répétitions

Exercice 1. L'équation différentielle

$$xy' + y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

étant linéaire avec second membre, il faut premièrement trouver une solution y_0 de l'équation homogène

$$xy_0' + y_0 = 0\,.$$

Par séparation des variables

$$\frac{dy_0}{y_0} = \frac{-dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y_0| = -\ln|x|\ ,$$

et donc une solution de l'équation homogène est donnée par :

$$y_0(x) = \frac{1}{x}\,.$$

En substituant

$$y_p(x) = \frac{C(x)}{x}$$

dans l'équation inhomogène, nous obtenons

$$C'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,,$$

dont la solution est donnée en intégrant avec le changement de variable $t = x^2$,

$$C(x) = \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin t = \arcsin x^2\,.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation inhomogène est donnée pour $C \in \mathbf{R}$ par :

$$y(x) = y_p(x) + Cy_0(x) = \frac{C}{x} + \frac{\arcsin x^2}{x}\,,$$

sur l'intervalle $|x| < 1$.

Exercice 2. L'équation différentielle

$$(y' + x)\, y' - y = 0$$

peut se réécrire comme une équation de Clairaut

$$y = xy' + (y')^2 \ .$$

La solution générale triviale est donnée pour $C \geq 0$ par :

$$y(x) = Cx + C^2 \ .$$

L'autre solution est donnée par

$$x = -2p \, , \qquad\qquad y = -2p^2 + p^2 = -p^2 \, ,$$

c'est-à-dire en éliminant p,

$$y(x) = -\frac{x^2}{4} \ .$$

Exercice 3. L'équation différentielle

$$y' + \cos(x)y + e^{\sin(x)}y^2 = 0$$

est une équation de Bernoulli, donc il faut effectuer le changement de variable $v = 1/y$. Cela mène à l'équation linéaire suivante

$$v' - \cos(x)v = e^{\sin(x)} \ .$$

Pour résoudre cette dernière, il faut tout d'abord trouver une solution v_0 de l'équation homogène

$$v_0' - \cos(x)v_0 = 0 \, .$$

Par séparation des variables,

$$\frac{dv_0}{v_0} = \cos(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|v_0| = \sin(x) \, ,$$

et donc une solution de l'équation homogène est donnée par

$$v_0(x) = e^{\sin(x)} \ .$$

En substituant

$$v_p(x) = C(x)e^{\sin(x)}$$

dans l'équation inhomogène, nous obtenons

$$C(x) = \int dx = x \, ,$$

et donc la solution générale de l'équation pour v est donnée pour $C \in \mathbf{R}$ par

$$v(x) = v_p(x) + Cv_0(x) = (x + C)\, e^{\sin(x)} \ .$$

Par conséquent la solution générale de l'équation différentielle initiale est

$$y(x) = \frac{1}{v(x)} = \frac{e^{-\sin(x)}}{x + C} \ .$$

Exercice 4. L'équation peut être réécrite sous la forme

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0\,,$$

avec

$$P(x,y) = y\,, \qquad\qquad Q(x,y) = x\,(1+y)\ .$$

Comme

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y\,,$$

alors le facteur intégrant dépend seulement de y et vérifie

$$\frac{\mu'}{\mu} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = e^y\,.$$

Pour s'assurer qu'on ne s'est pas trompé on peut vérifier la condition $\partial_y\,(\mu P) = \partial_x\,(\mu Q)$. Ainsi on cherche une fonction U telle que $\mu P = \partial_x U$ et $\mu Q = \partial_y U$. En intégrant la première équation,

$$U(x,y) = \int \mu(y) P(x,y) dx + q(y) = \int y e^y dx + q(y) = xye^y + q(y)\,,$$

puis en injectant dans $\partial_y U = \mu Q$,

$$q'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad q(y) = -C\,.$$

Par conséquent

$$U(x,y) = xye^y - C\,,$$

et donc la solution générale est donnée sous forme implicite par $U = 0$, c'est-à-dire

$$ye^y = \frac{C}{x}\,.$$

Remarque : La solution peut être exprimée en terme de la fonction W de Lambert,

$$y(x) = W\left(\frac{C}{x}\right)\,.$$

Exercice 5. L'équation peut se réécrire comme

$$y' = F(x,y) \qquad \text{avec} \qquad F(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

et est donc une équation homogène. La substitution $y(x) = xv(x)$ mène à l'équation

$$xv' + v = \frac{2v}{1+v^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v'}{v}\frac{1+v^2}{1-v^2} = \frac{1}{x}\,.$$

Par conséquent en intégrant

$$\ln|x| + C' = \int \frac{1+v^2}{1-v^2}\frac{dv}{v} = \int \left(\frac{1}{v} + \frac{2v}{1-v^2}\right) dv = \ln|v| - \ln\left|1-v^2\right|\,,$$

et donc en faisant la substitution inverse $v(x) = y(x)/x$, la solution générale de l'équation vérifie pour $C \in \mathbf{R}$

$$\frac{x}{2C} = \frac{v}{1-v^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2Cy}{x^2-y^2} = 1\,,$$

et donc la solution générale est donnée pour $C \in \mathbf{R}$ par

$$y(x) = -C \pm \sqrt{x^2+C^2}\,.$$

Exercice 6. En définissant

$$z = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

l'équation différentielle $\ddot{y} - \dot{y} = y$ s'écrit comme $\dot{z} = Az$. L'unique point fixe de cette équation est $z = 0$. Les directions stables et instables correspondent respectivement aux vecteurs propres à valeurs propres dont la partie réelle est respectivement négative ou positive. Les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés sont donnés par

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right), \qquad v_\pm = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \pm \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

La direction stable est alors fixée par le vecteur propre associé à λ_- c'est-à-dire par v_- et la direction instable par v_+. La solution générale est donnée par

$$y(t) = Ae^{\lambda_- t} + Be^{\lambda_+ t} = Ae^{\left(1-\sqrt{5}\right)t/2} + Be^{\left(1+\sqrt{5}\right)t/2},$$

avec $A, B \in \mathbf{R}$.