Méthodes mathématiques pour physiciens I
Corrigé série 12

Echauffement

1. Une paramétrisation du cercle de rayon r est donnée par :

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi) &\to \mathbf{R}^2 \\ \theta &\mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)\ . \end{aligned}$$

2. Tout d'abord,

$$f'(\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta) \qquad \Rightarrow \qquad \|f'(\theta)\| = \sqrt{f_1'(\theta)^2 + f_2'(\theta)^2} = r\,,$$

et donc la longueur du cercle de rayon r est

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|f'(\theta)\|\, d\theta = r\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r\,.$$

Exercice 1.

1. Une paramétrisation de la courbe ABOCDOA est donnée par :

$$\begin{aligned} h : [0, 2\pi+4] &\to \mathbf{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{cases} h_1(t) = (1+\cos(t), \sin(t))\,, & t \in [0,\pi]\ , \quad \text{(segment ABO)} \\ h_2(t) = (-1-\cos(t), \sin(t))\,, & t \in [\pi, 2\pi]\ , \quad \text{(segment OCD)} \\ h_3(t) = (-2-2\pi+t, 0)\,, & t \in [2\pi, 2\pi+4]\ . \quad \text{(segment DOA)} \end{cases} \end{aligned}$$

2. La longueur ℓ de la courbe ABOCDOA est donc

$$\ell = \int_0^{2\pi+4} \|h'(t)\|\, dt = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3\,,$$

avec

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \int_0^{\pi} \|h_1'(t)\|\, dt = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{\pi} dt = \pi\,, \\ \ell_2 &= \int_\pi^{2\pi} \|h_2'(t)\|\, dt = \int_\pi^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{\pi} dt = \pi\,, \\ \ell_3 &= \int_{2\pi}^{2\pi+4} \|h_3'(t)\|\, dt = \int_{2\pi}^{2\pi+4} \sqrt{1}\, dt = \int_0^{4} dt = 4\,, \end{aligned}$$

d'où $\ell = 2\pi + 4$.

Exercice 2.

1. Une paramétrisation du pas de vis infini est donnée par :

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\to \mathbf{R}^3 \\ \theta &\mapsto \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{a}{2\pi}\theta\right) . \end{aligned}$$

   Ensuite

$$f'(\theta) = \left(-r\sin\theta, r\cos\theta, \frac{a}{2\pi}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \|f'(\theta)\| = \sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2} ,$$

   et donc la longueur du pas de vis avec n tours est

$$\ell = \int_0^{2\pi n} \|f'(\theta)\| d\theta = \int_0^{2\pi n} \sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2}\, d\theta = 2\pi n \sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2} .$$

2. Comme

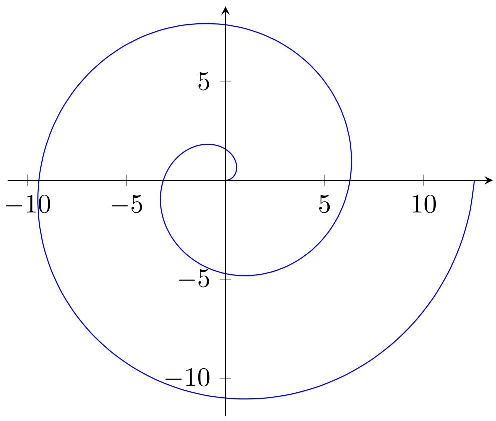
$$f(t) = (t, \cosh t) \qquad \Rightarrow \qquad f'(t) = (1, \sinh t) ,$$

   alors la longueur du chemin f est

$$\ell = \int_0^{\ln 2} \|f'(t)\| = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + \sinh^2 t}\, dt = \int_0^{\ln 2} \cosh t\, dt = \sinh(\ln 2) = \frac{3}{4} .$$

Exercice 3.

1. La trace de ce chemin est :



2. Comme la courbe est donnée en coordonnées polaires, en appliquant la formule du cours, la longueur de la courbe est

$$\ell = \int_0^{4\pi} \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}\, dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{t^2 + 1}\, dt .$$

   L'intégrale s'effectue en faisant le changement de variable $t = \sinh(u)$,

$$\ell = \int_0^b \cosh^2(u) du = \frac{1}{2} \int_0^b (1 + \cosh(2u))\, du = \frac{1}{4} \left.(2u + \sinh(2u))\right|_0^b ,$$

   avec $b = \operatorname{arcsinh}(4\pi)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{b}{2} + \frac{1}{4}\sinh(2b) = \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\cosh(b)\sinh(b) = \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \sinh^2(b)}\sinh(b) \\ &= 2\pi\sqrt{1 + (4\pi)^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(4\pi) = 2\pi\sqrt{1 + (4\pi)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(4\pi + \sqrt{(4\pi)^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

   Pour le dernier pas, nous avons utilisé une relation qui peut être trouvée dans les tables numériques : $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

Exercice 4. La courbe donnée en coordonnées polaires par

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 2\pi) &\to \mathbf{R}^+ \times [0, 2\pi) \\ t &\mapsto (\sin(t)\cos(t)h(t), t)\ ,\end{aligned}$$

devient, en coordonnées cartésiennes,

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 2\pi) &\to \mathbf{R}^2 \\ t &\mapsto (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))\ ,\end{aligned}$$

avec

$$r(t) = \sin(t)\cos(t)h(t)\,.$$

Comme

$$\gamma'(t) = (r'(t)\cos(t) - r(t)\sin(t), r'(t)\sin(t) + r(t)\cos(t))\ ,$$

et

$$f(\gamma(t)) = \left(-\frac{\sin(t)}{r(t)}, \frac{\cos(t)}{r(t)}\right)\ ,$$

alors

$$\begin{aligned}I = \int_\gamma f \cdot ds &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\sin(t)}{r(t)}\left(r'(t)\cos(t) - r(t)\sin(t)\right) + \frac{\cos(t)}{r(t)}\left(r'(t)\sin(t) + r(t)\cos(t)\right)\right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\sin^2(t) + \cos^2(t) - \frac{r'(t)}{r(t)}\sin(t)\cos(t) + \frac{r'(t)}{r(t)}\cos(t)\sin(t)\right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,.\end{aligned}$$

<u>Remarque :</u> De manière générale, pour se simplifier la vie et surtout éviter des fautes de calcul, il faut calculer uniquement les expressions nécessaires pour obtenir le résultat. Par exemple ici, on aurait pu calculer explicitement $r'(t)$ et l'écrire à chaque ligne, mais comme cette expression n'intervient pas dans le résultat, cela aurait été inutile.

Exercice de mécanique. Soit

$$\begin{aligned}x : [t_1, t_2] &\to \mathbf{R}^3 \\ t &\mapsto x(t)\,,\end{aligned}$$

la trajectoire de la particule. Le travail de la force f est donnée par

$$W = \int_x f \cdot ds = \int_{t_1}^{t_2} f\left(x(t)\right) \cdot \dot{x}(t)dt\,.$$

Par la loi de Newton,

$$f\left(x(t)\right) = m\ddot{x}(t)\,,$$

et ainsi le travail de f est égal à la variation d'énergie cinétique :

$$W = m\int_{t_1}^{t_2} \ddot{x}(t) \cdot \dot{x}(t)dt = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2(t)\right) dt = \frac{m}{2}\ \dot{x}^2(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2(t_2) - \dot{x}^2(t_1)\right)\ .$$