Méthodes mathématiques pour physiciens I
Corrigé série 13

Exercice 1. En intégrant d'abord sur y puis sur x,

$$\begin{aligned}\int_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1\int_0^{x^2}\frac{1}{x^2+y}\,dy\,dx = \int_0^1\Big[\ln(x^2+y)\Big]_{y=0}^{y=x^2}dx\\ &= \int_0^1\left(\ln\left(2x^2\right)-\ln\left(x^2\right)\right)\,dx = \int_0^1 \ln(2)\,dx = \ln(2)\,.\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. Une paramétrisation du demi-disque est donnée en coordonnées polaires par

$$D = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbf{R}^2 : 0\le r\le R \text{ et } 0\le\theta\le\pi\right\}\,.$$

En coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, la mesure est

$$dx\,dy = \left|\det\begin{pmatrix}\partial_r x & \partial_\theta x\\ \partial_r y & \partial_\theta y\end{pmatrix}\right| dr\,d\theta = \left|\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\right| dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta\,,$$

et donc les coordonnées du centre de masse sont

$$\mathbf{x}_{\text{CM}} = \frac{1}{m}\int_D \rho\mathbf{x}\,dx\,dy = \frac{1}{|D|}\int_D \mathbf{x}\,dx\,dy = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^\pi \mathbf{x}\,r\,d\theta\,dr\,.$$

Ainsi, la première coordonnée du centre de masse est

$$x_{\text{CM}} = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^\pi r^2\cos\theta\,d\theta\,dr = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2\big[\sin\theta\big]_0^\pi\,dr = 0\,,$$

et la seconde

$$y_{\text{CM}} = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^\pi r^2\sin\theta\,d\theta\,dr = -\frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2\big[\cos\theta\big]_0^\pi\,dr = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R r^2\,dr = \frac{4R}{3\pi}\,.$$

2. Tout d'abord, le domaine D peut se réécrire de manière équivalente comme

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : -1\le y\le 1 \text{ et } 1-y^2\le x\le 2-2y^2\right\}.$$

L'aire de D est alors donnée par

$$|D| = \int_D dx\,dy = \int_{-1}^1\int_{1-y^2}^{2-2y^2} dx\,dy = \int_{-1}^1\left(1-y^2\right)\,dy = \left[y-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}\,.$$

L'abscisse du barycentre est donc donnée par

$$\begin{aligned}x_{\text{CM}} &= \frac{1}{|D|}\int_D x\,dx\,dy = \frac{3}{4}\int_{-1}^1\int_{1-y^2}^{2-2y^2} x\,dx\,dy = \frac{3}{4}\int_{-1}^1\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1-y^2}^{2-2y^2}dy\\ &= \frac{3}{8}\int_{-1}^1 3\left(1-y^2\right)^2\,dy = \frac{9}{8}\int_{-1}^1\left(1-2y^2+y^4\right)\,dy = \frac{9}{8}\left[y-\frac{2y^3}{3}+\frac{y^5}{5}\right] = \frac{6}{5}\,.\end{aligned}$$

Par symétrie, l'ordonnée du barycentre est nulle, et donc le barycentre de D se trouve en $\left(\frac{6}{5},0\right)$.

Exercice 3.

1. L'intégrale à calculer s'écrit

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy &= \int_0^\infty \int_{\frac{-2x}{x+2}}^{\frac{2x}{x+2}} \frac{y^2}{x^2} dy\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\left(\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{\frac{-2x}{x+2}}^{\frac{2x}{x+2}}\right) dx \\
&= \frac{16}{3}\int_0^\infty \frac{x}{(x+2)^3}\,dx = \frac{16}{3}\left(-\frac{1}{2}\,\frac{x}{(x+2)^2}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(x+2)^2} dx\right) \\
&= \frac{16}{3}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+2)}\bigg|_0^\infty\right) = \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

2. La paramétrisation la plus simple de ce domaine est donnée en coordonnées polaires,

$$T = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq r \leq 2 \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0\right\}\,.$$

Comme dans l'exercice 1, nous avons $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$, et donc l'intégrale de ρ sur T est

$$\begin{aligned}
\int_T \rho(x,y)\,dx\,dy &= \int_1^2 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 r\cos\theta \frac{\cos\left(r^2\right)}{r}\,d\theta\right) r\,dr = \int_1^2 \cos\left(r^2\right) r\,dr \\
&= \frac{1}{2}\sin\left(r^2\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(\sin 4 - \sin 1\right)
\end{aligned}$$

Exercice 4. A nouveau, le domaine admet une paramétrisation simple en coordonnées polaires, et donc comme $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$, pour toute fonction f,

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^\theta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) r\,dr\,d\theta\,.$$

Ainsi pour la fonction f donnée, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^\theta \left(\frac{-r\sin(\theta)}{r^2}\right) r\,dr\,d\theta = -\int_0^{2\pi} \sin(\theta)\int_0^\theta dr\,d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \theta\sin(\theta)\,d\theta = -\Big[-\theta\cos(\theta) + \sin(\theta)\Big]_0^{2\pi} = 2\pi\,.
\end{aligned}$$

Exercice 5. Comme $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, x, z)$, nous avons tout d'abord

$$\nabla \wedge \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \partial_y z - \partial_z x \\ \partial_z y - \partial_x z \\ \partial_x x - \partial_y y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\int_S \nabla \wedge \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0\,.$$

Le chemin γ peut se paramétriser par

$$\gamma = \{(t, 0, 1) : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(1, t, 1) : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(1 - t, 1, 1) : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(0, 1 - t, 1) : 0 \leq t \leq 1\}\ ,$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &\quad + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 - t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Exercice 6. Soient

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^3 &\to \mathbf{R} & \qquad \gamma : [0, 2\pi) &\to \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 y + z y^3\,, & t &\mapsto (\cos t, \sin t, 1)\ . \end{aligned}$$

1. Le gradient de f est

   $$\nabla f = \left(2xy, x^2 + 3y^2 z, y^3\right)\ ,$$

   et donc évalué le long du chemin γ,

   $$\nabla f = \left(2 \cos t\ \sin t, \cos^2 t + 3 \sin^2 t, \sin^3 t\right)\ .$$

   Ensuite,

   $$\dot\gamma = (-\sin t, \cos t, 0)\ ,$$

   de sorte que

   $$\int_\gamma \nabla f \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \nabla f \cdot \dot\gamma\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t\ \cos t + \cos^3 t\right)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0\,.$$

2. Par le théorème de Stokes, nous avons

   $$\int_\gamma \nabla f \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_\gamma} (\nabla \times \nabla f) \cdot d\mathbf{S}$$

   où S_γ est une surface ayant γ pour contour. Comme $\nabla \times \nabla f = 0$, cela montre directement que l'intégrale est nulle.

Exercice 7. En utilisant le théorème de Stokes :

$$\int_S (\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

où C est le cercle

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \text{ et } z = 0\right\} .$$

En utilisant la paramétrisation suivante de C

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi) &\to \mathbf{R}^2 \\ \theta &\mapsto (\cos\theta, \sin\theta, 0) \ , \end{aligned}$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\gamma(\theta)) \cdot \dot{\gamma}(\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

Exercice 8. La première chose à faire est de compléter le carré

$$-\mathbf{x}^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = -\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2 + \frac{\mathbf{k}^2}{4} ,$$

ainsi

$$f(\mathbf{k}) = e^{\frac{\mathbf{k}^2}{4}} \int_{\mathbf{R}^2} e^{-\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2} dx_1 dx_2 .$$

Ensuite, il faut effectuer le changement de variable

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{k}}{2} ,$$

dont le Jacobien est

$$\left|\det \begin{pmatrix} \partial_{y_1} x_1 & \partial_{y_1} x_2 \\ \partial_{y_2} x_1 & \partial_{y_2} x_2 \end{pmatrix}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1 .$$

Ainsi la mesure ne change pas et nous avons

$$f(\mathbf{k}) = e^{\frac{\mathbf{k}^2}{4}} \int_{\mathbf{R}^2} e^{-\mathbf{y}^2}\, dy_1\, dy_2 .$$

Comme l'intégrant ne dépend que de $\mathbf{y}^2$, nous passons en coordonnées polaires $y_1 = r\cos\theta$, $y_2 = r\sin\theta$, donc $dy_1\, dy_2 = r\, dr\, d\theta$. Maintenant,

$$\mathbf{R}^2 = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le r \le \infty,\ 0 \le \theta \le 2\pi\right\} ,$$

d'où

$$f(\mathbf{k}) = e^{\frac{\mathbf{k}^2}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta = -e^{\frac{\mathbf{k}^2}{4}}\, 2\pi \frac{1}{2} \left[e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi e^{\frac{\mathbf{k}^2}{4}} .$$