Méthodes mathématiques pour physiciens I
Corrigé série 14

Echauffement

1. Le cylindre de rayon R et de hauteur h est paramétrisé en coordonnées cylindriques par

$$\{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) : 0 \le r \le R\,, 0 \le \theta < 2\pi \text{ et } 0 \le z \le h\}\ ,$$

si bien que son volume est

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h r\, dz\, d\theta\, dr = \pi R^2 h\,.$$

2. La sphère de rayon R est paramétrisé en coordonnées sphériques par

$$\{(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi) : 0 \le r \le R\,, 0 \le \theta < 2\pi \text{ et } 0 \le \phi \le \pi\}\ ,$$

si bien que son volume est

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta\, dr = \frac{4}{3}\pi R^3\,.$$

3. En coordonnées cylindrique la sphère de rayon R est donnée par

$$\left\{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) : 0 \le r \le R\,, 0 \le \theta < 2\pi \text{ et } |z| \le \sqrt{R^2 - r^2}\right\}\ ,$$

et donc son volume est

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{+\sqrt{R^2-r^2}} r\, dz\, d\theta\, dr = 4\pi \int_0^R r\sqrt{R^2 - r^2} dr = 2\pi \int_0^{R^2} \sqrt{u} du = \frac{4}{3}\pi R^3\,.$$

Exercice 1.

1. En regardant la figure de l'énoncé, une paramétrisation est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{p} : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] &\to \mathbf{R}^3 \\ (\theta, \varphi) &\mapsto ((R + r\cos\varphi)\cos\theta, (R + r\cos\varphi)\sin\theta, r\sin\varphi)\ . \end{aligned}$$

2. Les deux vecteurs tangents sont donc

$$\partial_\theta \mathbf{p} = (-\,(R + r\cos\varphi)\sin\theta, (R + r\cos\varphi)\cos\theta, 0)\ , \qquad \partial_\varphi \mathbf{p} = (-r\sin\varphi\cos\theta, -r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\ ,$$

si bien que le vecteur normal est

$$\mathbf{S} = \partial_\theta \mathbf{p} \wedge \partial_\varphi \mathbf{p} = ((R + r\cos\varphi)\, r\cos\theta\cos\varphi, (R + r\cos\varphi)\, r\sin\theta\cos\varphi, (R + r\cos\varphi)\, r\sin\varphi)\ .$$

3. L'aire de tore est donnée par

$$A = \int_T da = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \|S\|\, d\varphi\, d\theta = 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r\cos\varphi)\, d\varphi = 4\pi^2 r R\,.$$

Exercice 2.

1. Une paramétrisation de γ est

$$\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$$
$$\theta \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \ ,$$

et donc

$$\gamma'(\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) \ ,$$

si bien que

$$\int_\gamma \mathbf{g}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \mathbf{g}\cdot\gamma'\, d\theta = \int_0^{2\pi} r^2\cos^2\theta\, d\theta = \pi r^2 \,.$$

L'intégrale de $\cos^2$ peut être obtenue en remplaçant $\cos\theta$ par $\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)$ où en utilisant la formule pour l'angle double, $\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\theta)\right)$.

2. Une paramétrisation de la calotte sphérique supérieure est donnée par

$$\mathbf{q} : [0, 2\pi) \times \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}^3$$
$$(\theta, \phi) \mapsto (r\cos\theta\cos\phi, r\sin\theta\cos\phi, r\sin\phi) \ ,$$

et comme

$$\partial_\theta\mathbf{q} = (-r\sin\theta\cos\phi, r\cos\theta\cos\phi, 0) \ , \qquad \partial_\phi\mathbf{q} = (-r\cos\theta\sin\phi, -r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi) \ ,$$

alors le vecteur normal est

$$\mathbf{S} = \partial_\theta\mathbf{q}\wedge\partial_\phi\mathbf{q} = \left(r^2\cos\theta\cos^2\phi, r^2\sin\theta\cos^2\varphi, r^2\cos\phi\sin\phi\right) \ .$$

Par conséquent, l'intégrale cherchée est

$$\int_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \mathbf{f}\cdot\mathbf{S}\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} r^2\cos\phi\sin\phi\, d\phi\, d\theta = \pi r^2\int_0^{\pi/2}\sin(2\phi)\, d\phi = \pi r^2 \,.$$

Exercice 3.

1. Une paramétrisation de la pyramide est donnée par

$$\mathbf{p} : B \times [0, 1] \to \mathbf{R}^3$$
$$(x, y, \lambda) \mapsto (1-\lambda)\,(x, y, 0) + \lambda P \,,$$

où P est le point qui définit le sommet de la pyramide

$$P = (a, b, h) \ .$$

2. Ensuite le Jacobien est

$$|\det\nabla\mathbf{p}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & a-x \\ 0 & 1-\lambda & b-y \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} = h\,(1-\lambda)^2 \ ,$$

si bien que le volume de la pyramide est

$$V = \int_B\int_0^1 h\,(1-\lambda)^2\, d\lambda\, da = \frac{h}{3}\int_B da = \frac{1}{3}hS \,.$$

Exercice 4.

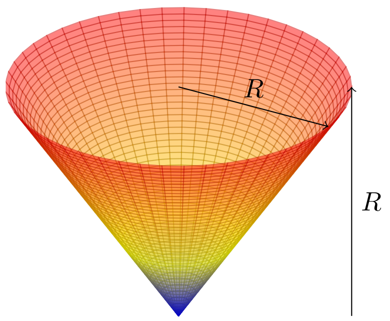
1. La paramétrisation la plus simple du cylindre C est donnée en coordonnées cylindriques

$$C = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) : 0 \le r \le 1\,, 0 \le \theta < 2\pi \text{ et } |z| \le 3\}\ .$$

2. Ainsi l'intégrale de f sur C est donnée par

$$\begin{aligned} I &= \int_C f\,dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-3}^{+3} f\,r\,dz\,d\theta\,dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-3}^{+3} z^2 e^{-zr^2}\,r\,dr\,d\theta\,dz = 2\pi \int_{-3}^{+3} \left[-\frac{z}{2}e^{-zr^2}\right]_{r=0}^1 dz \\ &= \pi \int_{-3}^{+3} z\left(1-e^{-z}\right) dz = \pi \left[(z+1)\,e^{-z} + \frac{1}{2}z^2\right]_{z=-3}^3 \\ &= \pi\left(4e^{-3} + 2e^3\right)\ . \end{aligned}$$

Exercice 5. La trace de la surface paramétrisée par $\mathbf{p}$ est un cône de rayon R et de hauteur R. Les vecteurs tangents sont



$$\partial_r \mathbf{p} = (\cos\phi, \sin\phi, 1)\ , \qquad \partial_\phi \mathbf{p} = (-r\sin\phi, r\cos\phi, 0)\ ,$$

et donc

$$\mathbf{S} = \partial_r \mathbf{p} \wedge \partial_\phi \mathbf{p} = (-r\cos\phi, -r\sin\phi, r)\ .$$

Ainsi l'aire du cône est

$$\begin{aligned} A &= \int_C da = \int_0^R \int_0^{2\pi} \|S\|\,d\phi\,dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,r\,d\phi\,dr \\ &= 2\sqrt{2}\pi \int_0^R r\,dr = \sqrt{2}\pi R^2\,. \end{aligned}$$

Exercice 6. En utilisant la paramétrisation donnée, le vecteur normal à la surface est

$$\mathbf{S} = \partial_r \mathbf{p} \wedge \partial_\theta \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -2\,(r-1) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r\,(r-1)\cos\theta \\ 2r\,(r-1)\sin\theta \\ r \end{pmatrix}\ .$$

Ainsi l'aire du champignon est donnée par

$$\begin{aligned} A &= \int_C da = \int_{-1}^2 \int_0^{2\pi} \|\mathbf{S}\|\,d\theta\,dr = \int_{-1}^2 \int_0^{2\pi} |r|\,\sqrt{4\,(r-1)^2+1}\,d\theta\,dr \\ &= 2\pi\left(-\int_{-1}^0 r\sqrt{4\,(r-1)^2+1}\,dr + \int_0^2 r\sqrt{4\,(r-1)^2+1}\,dr\right) \\ &= 2\pi\left(F(-1) + F(2) - 2F(0)\right)\ , \end{aligned}$$

où F est une primitive vérifiant

$$F'(r) = r\sqrt{4\,(r-1)^2+1}\,.$$

Finalement, nous allons trouver une expression pour F, mais pour cela il est important de maîtriser les fonctions hyperboliques et l'intégration par changement de variable. Avec le changement de variable $s = 2\,(r-1)$, nous obtenons

$$F(r) = \int r\sqrt{4\,(r-1)^2 + 1}\,dr = \frac{1}{4}\int (s+2)\,\sqrt{s^2+1}\,ds\,.$$

Ensuite le nouveau changement de variable $s = \sinh t$, permet d'intégrer cette dernière expression

$$\begin{aligned}
\int (s+2)\,\sqrt{s^2+1}\,ds = \int (\sinh t + 2)\cosh^2 t\,dt &= \frac{1}{3}\cosh^3 t + \int (1+\cosh(2t))\,dt \\
&= \frac{1}{3}\cosh^3 t + t + \frac{1}{2}\sinh(2t) = \frac{1}{3}\cosh^3 t + t + \sinh t\cosh t \\
&= \frac{1}{3}\left(1+s^2\right)^{3/2} + \operatorname{arcsinh} s + s\sqrt{1+s^2} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{1+s^2}\left(s^2+3s+1\right) + \operatorname{arcsinh} s\,,
\end{aligned}$$

où nous avons utiliser les relations suivantes

$$\cosh(2t) = 2\cosh^2 t - 1\,, \qquad\qquad \sinh(2t) = 2\cosh t\sinh t\,.$$

Par conséquent en revenant avec la variable r, nous obtenons la sublime expression suivante

$$F(r) = \frac{1}{12}\sqrt{1+4\,(r-1)^2}\left(4r^2-2r-1\right) + \frac{1}{4}\operatorname{arcsinh}\left(2\,(r-1)\right)\,.$$

Ainsi, l'aire du champignon est donnée après quelques simplifications par

$$A = 2\pi\left(F(-1)+F(2)-2F(0)\right) = \frac{\pi}{6}\left(13\sqrt{5}+5\sqrt{17}+9\operatorname{arcsinh} 2 - 3\operatorname{arcsinh} 4\right) \approx 29.53\,.$$