Méthodes mathématiques pour physiciens I
Corrigé série 15

Echauffement En utilisant les relations

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) , \qquad \sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) ,$$

nous obtenons :

1.

$$\begin{aligned}\sin(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{4i}\left(e^{imx} - e^{-imx}\right)\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)\\ &= \frac{1}{4i}\left(e^{i(m+n)x} - e^{-i(m+n)x} + e^{i(m-n)x} - e^{-i(m-n)x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\sin\left((m+n)x\right) + \sin\left((m-n)x\right)\right] ,\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sin(mx)\sin(nx) &= \frac{-1}{4}\left(e^{imx} - e^{-imx}\right)\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)\\ &= \frac{-1}{4}\left(e^{i(m+n)x} + e^{-i(m+n)x} - e^{i(m-n)x} - e^{-i(m-n)x}\right)\\ &= \frac{-1}{2}\left[\cos\left((m+n)x\right) - \cos\left((m-n)x\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\cos\left((m-n)x\right) - \cos\left((m+n)x\right)\right] ,\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\cos(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{4}\left(e^{imx} + e^{-imx}\right)\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)\\ &= \frac{1}{4i}\left(e^{i(m+n)x} + e^{-i(m+n)x} + e^{i(m-n)x} + e^{-i(m-n)x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\cos\left((m+n)x\right) + \cos\left((m-n)x\right)\right] .\end{aligned}$$

Exercice 1. Premièrement pour $n \in \mathbf{N}$, nous avons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\; dx = \frac{-1}{2\pi n}\cos(nx)\Big|_0^{2\pi} = 0\,,$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nx)\; dx = \frac{1}{2\pi n}\sin(nx)\Big|_0^{2\pi} = \delta_{n,0}\,.$$

Par conséquent, pour $l \geq 1$, nous avons

$$(c_0, c_l) = \frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nx)\, dx = \delta_{n,0}\,,$$

et

$$(c_0, s_l) = \frac{1}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\, dx = 0\,.$$

Pour $k, l \geq 1$, nous avons pour les cosinus

$$(c_k, c_l) = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}lx\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(kx)\cos(lx)\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\cos\left((k+l)x\right) + \cos\left((k-l)x\right)\Big]dx = \delta_{k+l,0} + \delta_{k-l,0} = \delta_{k,l}\,,$$

pour les sinus

$$(s_k, s_l) = \frac{2}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}lx\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(kx)\sin(lx)\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\cos\left((k-l)x)\right) - \cos\left((k+l)x\right)\Big]dx = \delta_{k-l,0} - \delta_{k+l,0} = \delta_{k,l}\,,$$

et enfin pour les produits croisés,

$$(c_k, s_l) = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}lx\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(kx)\sin(lx)\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\sin((k+l)x) + \sin((k-l)x)\Big]dx = 0\,.$$

Donc finalement en résumé, nous obtenons pour les valeurs d'indices où sont définies les fonctions

$$(c_k, c_l) = \delta_{k,l}\,, \qquad (s_k, s_l) = \delta_{k,l}\,, \qquad (c_k, s_l) = 0\,.$$

Remarque : cela prouve que les fonctions $\{c_k\}_{k=0}^{\infty} \cup \{s_l\}_{l=1}^{\infty}$ sont orthonormées.

Exercice 2. Il s'agit de calculer explicitement les produits scalaires (c_n, f) et (s_n, f) avec c_n et s_n définis à l'exercice précédent, avec $T = 2\pi$. De manière générale, pour une fonction générale 2π-périodique f, les coefficients de Fourier s'expriment comme

$$a_n = (c_n, f) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} f(-x)\cos(-nx)\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} [f(x) + f(-x)]\cos(nx)\,dx\,,$$

et

$$b_n = (s_n, f) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} f(-x)\sin(-nx)\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} [f(x) - f(-x)]\sin(nx)\,dx\,.$$

En particulier, ces deux dernières expressions montrent que si f est impaire, alors $a_n = 0$ et que si f est paire, alors $b_n = 0$.

1. La fonction f étant impaire, il suffit de calculer les coefficients b_n,

$$b_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}(-1)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\sqrt{\pi}n}\left[(-1)^n - 1\right]\,.$$

Par conséquent les seuls coefficients de Fourier non-nuls sont

$$b_{2n+1} = \frac{-4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2n+1}\,.$$

2. La fonction g est paire, donc il reste à calculer les coefficients a_n. Par intégration directe, nous obtenons

$$a_0 = (c_0, g) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi g(x)\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi (\pi - 2x)\; dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\pi x - x^2\right]_0^\pi = 0\,,$$

et pour $n \geq 1$, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} a_n = (c_n, g) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi g(x) \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi (\pi - 2x) \cos(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{(\pi - 2x)}{n} \sin(nx)\right]_0^\pi + \frac{4}{\sqrt{\pi} n} \int_0^\pi \sin(nx)\, dx = \frac{-4}{n\sqrt{\pi}} \left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi} n^2} \left[1 - (-1)^n\right]\,. \end{aligned}$$

Ainsi les seuls coefficients de Fourier non-nuls de g sont

$$a_{2n+1} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

Exercice 3. Soit f la fonction 2π-périodique donnée par $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Comme f est paire, alors $b_n = 0$ et donc il reste à calculer les coefficients a_n. On a

$$a_0 = (c_0, f) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi f(x)\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi x^2\, dx = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi^{5/2}\,,$$

et en intégrant deux fois par parties,

$$a_n = (c_n, g) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{4\sqrt{\pi}}{n^2} (-1)^n\,.$$

La fonction f est étant continue, elle est égale à son développement de Fourier,

$$f(x) = a_0 c_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n c_n = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)\,.$$

En évaluant cette dernière expression en $x = \pi$, nous obtenons la valeur de la série demandée

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Exercice 4.

1. Pour $\alpha \in \mathbf{C}$, soit f_α la fonction 2π-périodique paire égale à $e^{\alpha x}$ sur $(0, \pi)$. Comme f_α est paire, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $b_n = 0$. Pour $\alpha \neq 0$, nous avons

$$a_0 = (c_0, f_\alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi e^{\alpha x}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{\alpha\pi} - 1}{a}\,,$$

et pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$a_n = (c_n, f_\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi e^{\alpha x} \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi e^{\alpha x} \left(e^{inx} + e^{-inx}\right) dx\,.$$

Ainsi pour $n \in \mathbf{N}^*$, lorsque $\alpha^2 + n^2 \neq 0$, nous avons

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^{(\alpha + in)\pi} - 1}{\alpha + in} + \frac{e^{(\alpha - in)\pi} - 1}{\alpha - in}\right) = \frac{(-1)^n e^{\alpha\pi} - 1}{\sqrt{\pi}} \frac{2\alpha}{n^2 + \alpha^2}\,,$$

et lorsque $\alpha = \pm in$,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \left(1 + e^{\pm 2inx}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\pi + \frac{e^{\pm 2in\pi} - 1}{\pm 2in}\right) = \sqrt{\pi}\,.$$

Par conséquent lorsque $\alpha = 1$, la série de Fourier de f_α est donnée par

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi} - 1\right) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}\left[(-1)^n e^{\pi} - 1\right]\cos(nx)\,,$$

et lorsque $\alpha = i$, par

$$f_i(x) = \frac{2i}{\pi} + \cos(x) - \frac{4i}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx)\,.$$

2. Pour $\alpha \in \mathbf{C}$, soit g_α fonction 2π-périodique impaire égale à $e^{\alpha x}$ sur $(0,\pi)$. Comme g_α est impaire, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$b_n = (s_n, g_\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} e^{\alpha x}\sin(nx)\,dx = \frac{1}{i\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} e^{\alpha x}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)dx\,.$$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, lorsque $\alpha^2 + n^2 \neq 0$, nous avons

$$b_n = \frac{1}{i\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{(\alpha+in)\pi} - 1}{\alpha + in} - \frac{e^{(\alpha-in)\pi} - 1}{\alpha - in}\right) = \frac{1-(-1)^n e^{\alpha\pi}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{2n}{n^2+\alpha^2}\,,$$

et lorsque $\alpha = \pm in$,

$$b_n = \frac{\pm 1}{i\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\left(e^{\pm 2inx} - 1\right)dx = \frac{\pm 1}{i\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{\pm 2in\pi} - 1}{\pm 2in} - \pi\right) = \pm i\sqrt{\pi}\,.$$

Par conséquent, pour $\alpha = 1$,

$$g_1(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{1+n^2}\left[1-(-1)^n e^{\pi}\right]\sin(nx)\,,$$

et pour $\alpha = i$,

$$g_i(x) = i\sin(x) + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin(2nx)\,.$$

Exercice 5. Les coefficients de Fourier complexes de f' sont donnés, en intégrant par parties, par

$$\begin{aligned} c_n' &= \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T e^{-2\pi inx/T} f'(x)dx = \frac{1}{\sqrt{T}}\left[e^{-2\pi inx/T} f(x)\right]_{x=0}^{T} - \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T\left(\frac{-2\pi in}{T}\right)e^{-2\pi inx/T} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}}\left[f(T) - f(0)\right] + \frac{2\pi in}{T}\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T e^{-2\pi inx/T} f(x)dx = \frac{2\pi in}{T}c_n\,, \end{aligned}$$

où c_n sont les coefficients de Fourier complexes de f,

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T e^{-2\pi inx/T} f(x)dx\,.$$