Méthodes mathématiques pour physiciens I
Corrigé série 16

Exercice 1. Les vecteurs orthogonaux, mais non-normalisés, intervenant dans la méthode de Gram-Schmidt pour notés par X_k pour $k \in \mathbb{N}$.

1. Premièrement, le carré de la norme du vecteur $X_0(x) = 1$ est

$$(X_0, X_0) = \int_{-1}^{1} dx = 2\,,$$

si bien que le premier vecteur de base normalisé est

$$p_0(x) = \frac{X_0(x)}{\sqrt{(X_0, X_0)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Ensuite,

$$X_1(x) = x - (x, p_0)\, p_0 = x - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x dx = x$$

dont la norme est

$$(X_1, X_1) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}\,,$$

si bien que le second vecteur de base normalisé est

$$p_1(x) = \frac{X_1(x)}{\sqrt{(X_1, X_1)}} = \sqrt{\frac{3}{2}}x\,.$$

Finalement

$$X_2(x) = x^2 - \left(x^2, p_1\right) p_1 - \left(x^2, p_0\right) p_0 = x^2 - \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{1} x^2 x\, dx\right) x - \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} x^2\, dx\right) = x^2 - \frac{1}{3}\,,$$

donc

$$(X_2, X_2) = \int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1}\left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{45}\,,$$

et par conséquent le troisième vecteur de base normalisé est

$$p_2(x) = \frac{X_2(x)}{\sqrt{(X_2, X_2)}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}} = \sqrt{\frac{5}{8}}\left(3x^2 - 1\right)\,.$$

<u>Remarque :</u> Nous obtenons bien

$$p_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}}P_n(x)$$

tels que définis dans le cours.

2. Le carré de la norme du vecteur $X_0(x) = 1$ est

$$(X_0, X_0) = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx = \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbf{R}} e^{-y^2} dy\right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy\right)^{1/2}$$
$$= \left(\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\, r\, drd\theta\right)^{1/2} = \left(2\pi\, \frac{-1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}\right)^{1/2} = \sqrt{\pi}\,,$$

si bien que le premier vecteur de base normalisé est

$$h_0(x) = \frac{X_0(x)}{\sqrt{(X_0, X_0)}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}\,.$$

Ensuite,

$$X_1(x) = x - (x, h_0)\, h_0 = x - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} x e^{-x^2} dx = x\,,$$

donc en intégrant par parties

$$(X_1, X_1) = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,,$$

si bien que

$$h_1(x) = \frac{X_1(x)}{\sqrt{(X_1, X_1)}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{\frac{1}{4}}} x\,.$$

Remarque : Nous retrouvons bien

$$h_n(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} H_n(x)$$

tels que définis dans le cours.

Exercice 2.

1. En utilisant la définition des polynômes de Hermite,

$$H_n = (-1)^n \, e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\,,$$

alors

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} H_{n-1}\right) = (-1)^{n-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2}\right) = -(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = -e^{-x^2} H_n\,.$$

2. En utilisant la formule pour la dérivée d'un produit,

$$H_n' = (-1)^n \frac{d}{dx}\left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right) = (-1)^n \, 2x e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + (-1)^n \, e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} = 2xH_n - H_{n+1}\,.$$

3. En utilisant la règle de Leibnitz,

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x e^{-x^2}\right) = x \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2}\,,$$

et donc

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d}{dx} e^{-x^2}\right) = 2\,(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(x e^{-x^2}\right) \\ &= 2\,(-1)^n e^{x^2}\left(x \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2}\right) = 2xH_n - 2nH_{n-1}\,. \end{aligned}$$

4. Finalement en combinant les propriétés 2. et 3. nous obtenons directement

$$H_n' = 2xH_n - H_{n+1} = 2nH_{n-1}\,.$$

Exercice 3. De manière générale, nous montrons tout d'abord, que pour une fonction f infiniment différentiables et telles que toutes ses dérivées décroissent plus vite à l'infini que $x^n e^{-x^2}$ pour tout n alors

$$(f, H_n) = \big(f^{(n)}, H_0\big) = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} f^{(n)}(x)\, dx\,.$$

En particulier, cela montre que si les coefficients du développement de f en polynômes de Hermite

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n$$

sont donnés par

$$c_n = \frac{(f, H_n)}{(H_n, H_n)} = \frac{(f, H_n)}{2^n n! \sqrt{\pi}} = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} f^{(n)}(x)\, dx\,,$$

en utilisant la normalisation donnée dans le cours. En utilisant le première relation de l'exercice précédent, et en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
(f, H_n) &= \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-x^2} H_n(x)\, dx = -\int_{\mathbf{R}} f(x) \frac{d}{dx}\Big(e^{-x^2} H_{n-1}(x)\Big)\, dx \\
&= -\Big[f(x) e^{-x^2} H_{n-1}(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbf{R}} f'(x) e^{-x^2} H_{n-1}(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} f'(x) e^{-x^2} H_{n-1}(x)\, dx = (f', H_{n-1})\ ,
\end{aligned}$$

puisque par hypothèse $f(x)e^{-x^2}$ décroît plus vite à l'infini que n'importe quel polynôme, les termes de bords sont nuls. Ainsi par récurrence nous obtenons la relation annoncée

$$(f, H_n) = \big(f^{(n)}, H_0\big) = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} f^{(n)}(x)\, dx\,.$$

1. Dans le cas où $f(x) = e^{2x}$ alors $f^{(n)} = 2^n f$ et donc en utilisant le résultat montré ci-dessus,

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} f^{(n)}(x)\, dx = \frac{1}{n! \sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} f(x)\, dx = \frac{1}{n! \sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-(x-1)^2+1} dx = \frac{e}{n!}\,,$$

   et donc le développement en série est donné par

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{n!}\,.$$

2. Les coefficients de la série

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n h_n$$

   en terme des polynômes de Hermite normalisés sont donnés par

$$f_n = c_n \sqrt{(H_n, H_n)} = \sqrt{\frac{e^2 2^n \sqrt{\pi}}{n!}}\,,$$

   si bien que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2 = \sqrt{\pi} e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \sqrt{\pi} e^4\,.$$

   D'un autre côté,

$$(f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-2)^2+4} dx = \sqrt{\pi} e^4\,,$$

   si bien que la relation de Parseval est vérifiée.

Exercice 4. Tout d'abord, remarquons que la fonction x^2-1 étant paire, il suit directement de la définition des polynômes de Legendre que P_n est pair si n est pair et impair si n est impair.

1. Puisque $f = P_1$, il n'y a pas de calculs à faire, la série a simplement un seul terme, *i.e.*

$$c_n = \delta_{n,1}\,.$$

2. Comme g est une fonction paire alors pour n impair,

$$(P_n, g) = \int_{-1}^{1} g(x)P_n(x)\,dx = 0\,,$$

puisque la fonction gP_n est impaire. De plus, si n est pair, alors comme P_n est pair,

$$(P_n, g) = \int_{-1}^{1} g(x)P_n(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} g(x)P_n(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} xP_n(x)\,dx = \frac{2}{2^n\,n!}\int_{0}^{1} x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n\,dx\,.$$

Pour $n=0$, le produit scalaire est

$$(P_0, g) = 2\int_{0}^{1} x\,dx = 1\,.$$

Pour $n \in 2\mathbf{N}^*$, en intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n\,dx &= \left[x\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n\right]_0^1 - \int_{0}^{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n\,dx\\ &= \left.\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n\right|_{x=1} - \left.\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^2-1\right)^n\right|_{x=1} + \left.\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^2-1\right)^n\right|_{x=0}\,.\end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont nuls, car il y a n facteurs $\left(x^2-1\right)$ sur lequel se distribuent $n-1$ en $n-2$ dérivées donc il reste forcément un facteur $\left(x^2-1\right)$ qui est nul en $x=1$. Pour le troisième, en développant à l'aide du binôme de Newton,

$$\left(x^2-1\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{2k}\left(-1\right)^{n-k}\,,$$

et le seul facteur qui contribue au troisième terme est celui d'ordre $n-2$ c'est-à-dire pour $k=n/2-1$, car en prenant $n-2$ dérivée il reste le coefficient d'ordre $n-2$ multiplié par $(n-2)!$. Par conséquent,

$$\left.\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^2-1\right)^n\right|_{x=0} = \left(-1\right)^{n/2+1}(n-2)!\binom{n}{n/2-1}\,,$$

et donc nous obtenons en résumé que

$$(P_n, g) = \frac{2}{2^n\,n!}\left.\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^2-1\right)^n\right|_{x=0} = \frac{\left(-1\right)^{n/2+1}}{2^{n-1}}\frac{(n-2)!}{(n/2-1)!\,(n/2+1)!}\,,$$

et ce pour $n \in 2\mathbf{N}^*$.

Exercice 5. En utilisant le résultat montré à l'exercice 3. pour $f = H_m$, nous avons

$$(H_m, H_n) = \left(H_m^{(n)}, H_0\right) = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} H_m^{(n)}(x) dx\,.$$

En utilisant la dernière relation de l'exercice 2. qui donne la dérivée des polynômes de Legendre, il est aisé de monter par récurrence sur n que

$$H_m^{(n)} = \frac{2^n m!}{(m-n)!} H_{m-n}\,,$$

si $n \leq m$. Comme H_m est un polynôme de degré m, alors que $n > m$,

$$H_m^{(n)} = 0\,.$$

Par conséquent, et par symétrie entre m et n, si $n \neq m$, alors $(H_m, H_n) = 0$ et si $m = n$,

$$(H_n, H_n) = 2^n n! \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} H_0(x) dx = \sqrt{\pi}\, 2^n\, n!\,,$$

ce qui prouve bien le résultat demandé.

Exercice 6. On définit les fonctions $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ et $f_3(x) = x^2$. Grâce au facteur $3/4$ dans la définition du produit scalaire, on voit que f_1 est déjà normalisé, donc $e_1 = 1$. Ainsi par Gram-Schmidt,

$$a_2 = f_2 - (f_2, e_1)\, e_1 = x - \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} x \left(1 - x^2\right) dx = x\,,$$

donc sa norme est

$$(a_2, a_2) = \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} x^2 \left(1 - x^2\right) dx = \frac{1}{5}\,,$$

si bien que le deuxième vecteur de base normalisé est $e_2 = \sqrt{5}x$. Finalement,

$$a_3 = f_3 - (f_3, e_2)\, e_2 - (f_3, e_1)\, e_1 = x^2 - \frac{1}{5}\,,$$

qui a une norme

$$(a_3, a_3) = \frac{3}{100} \int_{-1}^{1} \left(5x^2 - 1\right)^2 \left(1 - x^2\right) dx = \frac{8}{175}\,,$$

et donc le dernier vecteur normalisé est

$$e_3 = \frac{\sqrt{14}}{4} \left(5x^2 - 1\right)\,.$$