

Méthodes mathématiques pour physiciens I

Série 1

Echauffement

01. Vérifier que :

$$1. e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i, \quad 2. e^{-i\pi} = -1, \quad 3. \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}.$$

02. Calculer le module de :

$$1. e^{i+1}, \quad 2. e^{-(i+1)}, \quad 3. e^{-(i-1)}, \quad 4. e^{(i-50)}, \quad 5. e^{(1-50i)}.$$

03. Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives :

$$\begin{array}{lll} 1. f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} & 2. f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} & 3. f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto 1, & x \mapsto x, & x \mapsto 1 - x. \end{array}$$

04. Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{64}, \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} (x-4)^3, \quad 3. \lim_{x \rightarrow 4} (x-4)^3.$$

Exercice 1. Trouver la partie imaginaire et la partie réelle des nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{ll} 1. z_1 = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1+3i}, & 3. z_3 = \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i}, \\ 2. z_2 = \frac{2-3i}{2+i} + \frac{1-i}{1+3i}, & 4. z_4 = \frac{3i^{30} - i^{19}}{-1+2i}. \end{array}$$

Exercice 2. Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives :

$$\begin{array}{ll} 1. f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} & 3. f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto x^2, & x \mapsto \ln x, \\ 2. f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} & 4. f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_0^+ \\ x \mapsto e^x, & x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1. \end{array}$$

Pour toutes ces fonctions donner la préimage de l'intervalle $[1, 2]$.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}, \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{2x}, \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Exercice 4. Calculer les limites à gauche et à droite en $x = 1$ de la fonction

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ x^3 + 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Exercice 5. Etudier la continuité (à gauche et à droite) des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = x^n \text{ pour } n \in \mathbf{N}.$$

$$4. f(x) = \ln x \text{ pour } x > 0.$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{\frac{1}{x}-1}, & x \notin \{0, 1\}, \\ 0, & x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

Exercice Maple. Utiliser Maple pour vérifier les exercices.