Méthodes mathématiques pour physiciens I
Série 3

Echauffement. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x$,
2. $g(x, y) = y$,
3. $h(x, y) = xy$,
4. $u(x, y) = x^2 y$,
5. $v(x, y) = \ln \dfrac{x}{y}$ pour $xy > 0$.

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial a}$ des fonctions suivantes :

1. $f(x, t, a) = a^2 x^3 \sqrt{t}$,
2. $g(x, t, a) = \sqrt{a^2 - x^2} + \ln\left(\frac{t}{a}\right)$,
3. $h(x, t, a) = a \cos(\omega t - kx)$,
4. $u(x, t, a) = \sin\left(a\left(t + x^3\right)^{1/5}\right)$,
5. $v(x, t, a) = t^2 a^x$.

Exercice 2. Calculer la dérivée directionnelle pour les fonctions suivantes ($\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, commencer par calculer ∂_1 et ∂_2) :

1. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^3 + 2x_1x_2^2$ dans la direction $\mathbf{e} = (1/2, \sqrt{3}/2)$.
2. $g(\mathbf{x}) = 2^{-1/2} \cos(x_1) \sin(2x_2)$ dans la direction $\mathbf{n} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

puis évaluer

3. $\partial_{\mathbf{e}} f(2, 1)$,
4. $\partial_{\mathbf{n}} g|_{x_1=0,\, x_2=\pi/2}$,
5. $\partial_{\mathbf{n}} g|_{(\pi/4, \pi/4)}$.

Exercice 3. Pour la fonction

$$\begin{aligned} r : \mathbf{R}^3 &\to \mathbf{R} \\ (x, y, z) &\mapsto r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} , \end{aligned}$$

calculer pour $r \neq 0$,

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) \qquad \text{et} \qquad \nabla\left(\frac{1}{r}\right) .$$

Exercice 4. Soit $V(x,y)$ une fonction différentiable et

$$W(r,\theta) = V(x(r,\theta), y(r,\theta)) = V(r\cos\theta, r\sin\theta)\ .$$

Appliquer la règle de chaîne pour montrer que

$$(\partial_x V)^2 + (\partial_y V)^2 \Big|_{\substack{x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta}} = (\partial_r W)^2 + \frac{1}{r^2}\,(\partial_\theta W)^2\ .$$

Exercice 5. Soient $\mathbf{x} = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{r}$ pour $r \neq 0$. Calculer :

1. $\nabla \cdot \mathbf{x}$,
2. $\nabla \wedge \mathbf{x}$,
3. $\nabla \cdot \mathbf{n}$ pour $r \neq 0$,
4. $\nabla\,(\ln r)$ pour $r \neq 0$.

Exercice 6. Soient $\mathbf{x} = (x,y) \in \mathbf{R}^2$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{r}$ pour $r \neq 0$. Calculer pour $r \neq 0$,

$$\nabla \cdot \mathbf{x} \qquad \text{et} \qquad \Delta\left(\frac{1}{r}\right)\ .$$

<u>Attention :</u> la dimension n'est pas la même que dans les exercices 3. et 5.

Exercice Maple. Refaire les exercices 3. et 4. avec Maple.