Méthodes mathématiques pour physiciens I
Série 5

Echauffement. Soient les matrices

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les transposées de ces matrices.
2. Quelles matrices sont symétriques ?
3. Calculer un certain nombre de produits $\sigma_i \sigma_j$ avec $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Exercice 1. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 9 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits $A \cdot B$ et $B \cdot A$, le commutateur $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$ ainsi que l'anti-commutateur $\{A, B\} = A \cdot B + B \cdot A$.

Exercice 2. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Parmi les expressions suivantes, calculer celles qui ont un sens :

$$A \cdot B\,, \qquad B \cdot A\,, \qquad A \cdot C\,, \qquad C \cdot A\,, \qquad B \cdot C\,, \qquad C \cdot B\,.$$

Exercice 3. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, soit

$$X(a) = \begin{pmatrix} 6 - 2a & a - 3 \\ -6a + 22 & 3a - 11 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de a a-t-on $X(a)^2 = 0$?

Exercice 4. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les nombres a_{ij} pour que le système d'équations suivant possède exactement une solution :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \,,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \,.$$

Exercice 5. Appliquer l'algorithme de Gauss au système (A, b), où

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 12 \\ 3 & 25 & 10 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Appliquer l'algorithme de Gauss au système suivant :

$$\begin{aligned} z + u + v &= 1 \\ -u + v &= 3 \\ x + 2y - z + u + v &= 2 \\ 3x + 6y - 3z + 5u &= 5 \\ 2x + 4y + 5u + v &= 13 \,. \end{aligned}$$

Exercice Maple. Vérifier les exercices avec Maple.