Méthodes mathématiques pour physiciens I
Série 7

Exercice 1.

1. Calculer le noyau et l'image (*i.e.* donner une base de ces sous-espaces vectoriels) de l'endomorphisme $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ représenté par la matrice

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} .$$

   Vérifier que $\text{rang}(f) = \text{codim}\,(\text{Ker}\, f)$.

2. Calculer l'image de l'application linéaire $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ représentée par la matrice

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 15 \\ -2 & -4 & -10 \end{pmatrix} .$$

3. Montrer que $f \circ g = 0$ (*i.e.* $A_f A_g = 0$) sans faire de calculs supplémentaires.

Exercice 2. Calculer A^{-1} par l'algorithme de Gauss pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} .$$

Exercice 3. La matrice suivante est-elle définie positive :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice est donnée dans la base canonique $\{e_1, e_2\}$ par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} .$$

Calculer la matrice B de f dans la base suivante :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 + e_2)\ , \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(e_2 - e_1)\ .$$

Exercice 5. Soit f une application linéaire. Soient v un vecteur propre de f à valeur propre λ et w un vecteur propre de f à valeur propre μ, avec $\mu \neq \lambda$. Les vecteurs $x = 2v$ et $y = v + w$ sont-ils des vecteurs propres de f ?

Exercice 6. Calculer le polynôme caractéristique de A ainsi que ses valeurs propres et vecteurs propres associés, avec

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soient q_1 le produit scalaire donné par la matrice T et q_2 la forme bilinéaire symétrique donnée par la matrice V,

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 0.328 & 0.116 \\ 0.116 & 0.102 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base de $\mathbf{R}^2$ dans laquelle q_1 est donné par la matrice identité et q_2 par une matrice diagonale.

Indication : L'application T ressemble à la fonction f de l'exercice 6. de la série 6.