Méthodes mathématiques pour physiciens I
Série 8

Echauffement

01 En utilisant les lois définies aux cours, vérifier que

1. $z \cdot \dfrac{1}{z} = 1\,,$
2. $i^2 = -1\,,$
3. $\Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}\,,$
4. $\Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}\,.$

02 A l'aide du développement en série des fonctions analytiques, sinus et cosinus, donner une valeur approchée à la seconde décimale près de sin(1) et cos(1).

Exercice 1. Montrer que

$$|1-\bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = \left(1-|z_1|^2\right)\left(1-|z_2|^2\right)\,.$$

Exercice 2. Trouver la forme exponentielle des trois premières expressions et la forme cartésienne des trois dernières :

1. $1+i\,,$
2. $-1-\sqrt{3}i\,,$
3. $3\sqrt{3}+3i\,,$
4. $2e^{\frac{\pi}{3}i}\,,$
5. $4e^{\frac{3\pi}{2}i}\,,$
6. $e^{-i}\,.$

Exercice 3. Trouver la partie imaginaire et la partie réelle des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}\,,$
2. $z_2 = \dfrac{e^{3\pi i}e^{\frac{\pi}{6}i}}{e^{\frac{\pi}{6}i} + 2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}i}}\,,$
3. $z_3 = \dfrac{e^{\frac{2\pi}{3}i}}{e^{\frac{\pi}{6}i} + e^{\frac{\pi}{4}i}}\,,$
4. $z_4 = i^i\,,$
5. $z_5 = (-5i)^{(-i)}\,,$
6. $z_6 = (\sqrt{3}+i)^{1+i}\,.$

Exercice 4. Pour $b, c \in \mathbf{R}$, soit l'équation du deuxième degré :

$$z^2 + bz + c = 0\,.$$

Quelles sont les conditions sur b et c pour que :

1. l'équation admette au moins une solution réelle.
2. l'équation admette au moins une solution purement imaginaire.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbf{N}$, trouver les solutions de l'équation

$$\overline{z} = z^{n-1}\,.$$

Exercice 6. Trouver la série de la fonction logarithme en $z = 1$ ainsi que son rayon de convergence.

Exercice 7. Calculer les sommes suivantes :

1. $1 + \cos(x) + \cdots + \cos(nx)\,,$
2. $\sin(x) + \cdots + \sin(nx)\,.$

<u>Indication :</u> Utiliser le fait que $\cos(x) = \Re(e^{ix})$ et $\sin(x) = \Im(e^{ix})$.

Exercice 8. Calculer le rayon de convergence de la série

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n\,, \qquad f_n = \begin{cases} a^n\,, & n \in 2\mathbf{N}\,, \\ b^n\,, & n \in 2\mathbf{N}+1\,, \end{cases}$$

sachant que

$$0 < a < b\,.$$