Méthodes mathématiques pour physiciens I
Série 9

Echauffement Trouver la solution générale de chacune des équations suivantes :

1. $y' = 2x$,
2. $y' = -y$,
3. $y' = y^2$.

Exercice 1. Trouver par séparation des variables la solution générale des équations suivantes :

1. $y' = \lambda y$,
2. $y' = 2y(5-y)$,
3. $y' = \sqrt{y^2+1}$.

Exercice 2. Trouver la solution générale des équations

1. $y' + y\tan x = 0$,
2. $y' + (y-1)\cos x = 0$.

Exercice 3. En utilisant l'homogénéité de l'équation, trouver la solution générale de l'équation

$$y' = \frac{9x+2y}{2x+y} \, .$$

Exercice 4. Par la méthode de la dérivée totale, trouver la solution générale de l'équation

$$y' \frac{2y(x-1)}{y^2+1} + \ln(y^2+1) = 0 \, .$$

Exercice 5. Montrer que $\mu(x,y) = (1+x^2+y^2)^{-3/2}$ est un facteur intégrant pour l'équation

$$y(1+y^2)\,dx + x(1+x^2)\,dy = 0 \, ,$$

et donner la solution générale de l'équation différentielle correspondante.

Indication : Utiliser l'égalité suivante

$$\int (1+x^2+y^2)^{-3/2} dx = x\,(1+y^2)^{-1}(1+x^2+y^2)^{-1/2} \, .$$

Exercice 6. Vérifier que $\mu_1(x,y) = x^{-2}$ et $\mu_2(x,y) = y^{-2}$ sont des facteurs intégrants de l'équation

$$y\,dx - x\,dy = 0\,.$$

Vérifier également que la courbe donnée par $\mu_1(x,y)/\mu_2(x,y) = C$ est le graphe d'une solution de l'équation différentielle correspondante.

Exercice 7. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'(xy - x^2) + (1 - xy) = 0$$

en cherchant un facteur intégrant ne dépendant que de x.

Exercice Maple. Refaire les exercices 1. et 2. en utilisant Maple.