Méthodes mathématiques pour physiciens I
Série 13

Exercice 1. Calculer l'intégrale

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy\,,$$

pour

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y} \qquad \text{et} \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le x^2\right\}.$$

Exercice 2.

1. Calculer le centre de masse d'un demi-disque de rayon R et de masse surfacique constante ρ.
2. Calculer le barycentre (c'est-à-dire le centre de gravité pour une masse surfacique constante égale à un) du domaine

$$D = \left\{(x,y) \in [0,2] \times \mathbf{R} : |y| \le \sqrt{1-\frac{x}{2}} \text{ et } \sqrt{1-x} \le |y| \text{ si } x \le 1\right\}.$$

Exercice 3.

1. Calculer l'intégrale

$$\int_D \frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy\,,$$

pour le domaine

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \ge 0 \text{ et } \frac{-2x}{x+2} \le y \le \frac{2x}{x+2}\right\}.$$

2. Calculer l'intégrale de

$$\rho(x,y) = \frac{x\cos\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

sur le domaine

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2,\ -2 \le y \le 0 \text{ et } 0 \le x \le 2\right\}.$$

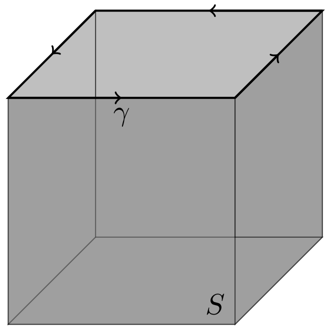
Exercice 4. Calculer l'intégrale

$$\int_D \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,,$$

pour

$$D = \left\{(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le r \le \theta \text{ et } \theta \in [0,2\pi]\right\}.$$

Exercice 5. Soit le cube de côté un défini comme sur la figure. Soit S la surface composée des cinq faces inférieures, dont le bord γ est le chemin dessiné par les flèches. Vérifier explicitement que



$$\int_S \nabla \wedge \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_\gamma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}\,,$$

pour $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, x, z)$.

Exercice 6. Soit $f(x, y, z) = x^2 y + z y^3$.

1. Calculer l'intégrale de chemin
$$\int_\gamma \nabla f \cdot d\mathbf{l}$$
pour
$$\gamma = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = \cos t,\ y = \sin t \text{ et } z = 1 \text{ avec } t \in [0, 2\pi)\right\}\ .$$

2. Vérifier le résultat obtenu en utilisant le théorème de Stokes.

Exercice 7. Calculer
$$\int_S (\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}\,,$$
pour le champ de vecteurs
$$\mathbf{A} = \left(-y, x + 2z, 5x^2 z\right)$$
sur le domaine
$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = f(x, y) \text{ et } \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\right\}$$
avec
$$f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^{150} \ln\left(2 - x^2 - y^2\right)\ .$$

Exercice 8. Exprimer explicitement l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\to \mathbf{R} \\ \mathbf{k} &\mapsto \int_{\mathbf{R}^2} e^{-\mathbf{x}^2 + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, d^2x\,. \end{aligned}$$