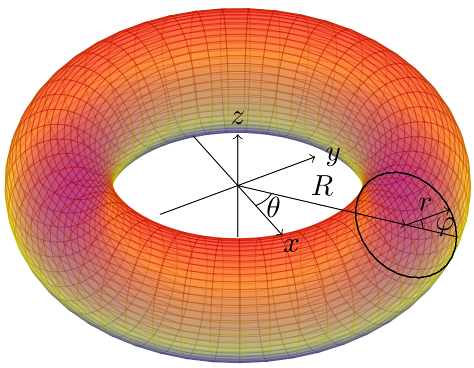
Méthodes mathématiques pour physiciens I
Série 14

Echauffement

1. Calculer le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h, en coordonnées cylindrique.
2. Calculer le volume d'une sphère de rayon R, en coordonnées sphérique.
3. Calculer le volume d'une sphère de rayon R, en coordonnées cylindrique.

Exercice 1. Soit T le tore caractérisé par ses deux rayons R et r avec $0 < r < R$ tel que montré sur la figure ci-dessous.



1. D'après les définitions des angles θ et φ données sur la figure, trouver une paramétrisation $\mathbf{p} : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$ de la surface du tore.
2. En chaque point du tore, calculer les deux vecteurs tangents, $\partial_\theta \mathbf{p}$ et $\partial_\varphi \mathbf{p}$, ainsi que le vecteur normal, $\mathbf{S} = \partial_\theta \mathbf{p} \wedge \partial_\varphi \mathbf{p}$.
3. Calculer l'aire du tore,

$$A = \int_T da = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\mathbf{S}\| \, d\varphi \, d\theta \, .$$

Exercice 2. Soit γ le cercle de rayon r et S la demi-sphère supérieure appuyée sur γ. Vérifier le théorème de Stokes

$$\int_\gamma \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} \, ,$$

pour les deux fonctions de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ définies par

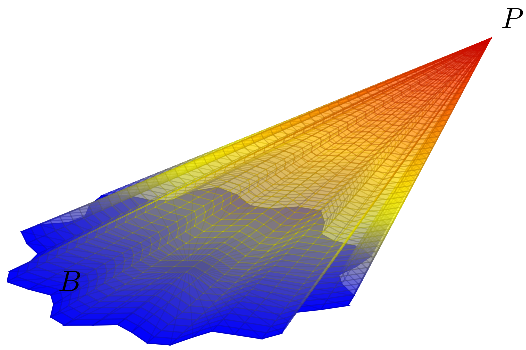
$$\mathbf{g}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{f}(x, y, z) = \nabla \wedge \mathbf{g}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Exercice 3. Montrer que le volume de la pyramide de base B et de hauteur h est donnée par

$$V = \frac{1}{3} h S\,, \qquad S = \int_B da\,.$$

Pour cela déterminer une paramétrisation $\mathbf{p} : B \times [0,1] \to \mathbf{R}^3$ en utilisant la figure suivante, *i.e.* chercher une application multi-linéaire telle que

$$\mathbf{p}(x,y,0) = (x,y,0)\,, \qquad \mathbf{p}(x,y,1) = P\,.$$



Exercice 4.

1. Donner une paramétrisation du cylindre C de hauteur 6 et de rayon 1 centré à l'origine.
2. Calculer l'intégrale

$$I = \int_C f dV\,,$$

pour

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^3 &\to \mathbf{R} \\ (x,y,z) &\mapsto z^2 e^{-z\left(x^2+y^2\right)}\,. \end{aligned}$$

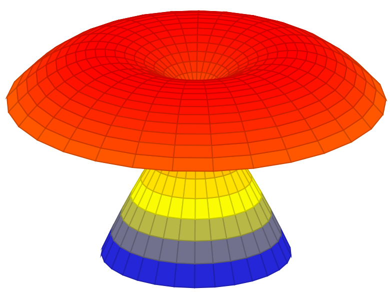
Exercice 5. Soit S la surface dans $\mathbf{R}^3$ paramétrisée par

$$\begin{aligned} \mathbf{p} : [0,R] \times [0,2\pi] &\to \mathbf{R}^3 \\ (r,\varphi) &\mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r)\,. \end{aligned}$$

Esquisser cette surface et calculer son aire.

Exercice 6. Calculer l'aire du champignon dessiné sur la figure, dont une paramétrisation est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{p} : [-1,2] \times [0,2\pi] &\to \mathbf{R}^3 \\ (r,\theta) &\mapsto \left(r\cos\theta, r\sin\theta, -(r-1)^2\right)\,. \end{aligned}$$



Indication : le résultat peut s'exprimer sous la forme d'une primitive, mais l'expression explicite n'est pas très aisée à obtenir.