Méthodes mathématiques pour physiciens I
Série 15

Echauffement Montrer que

1. $\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin\left((m+n)x\right) + \sin\left((m-n)x\right)\right]$,
2. $\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos\left((m-n)x\right) - \cos\left((m+n)x\right)\right]$,
3. $\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos\left((m+n)x\right) + \cos\left((m-n)x\right)\right]$.

Exercice 1. Pour $n \geq 1$, soient

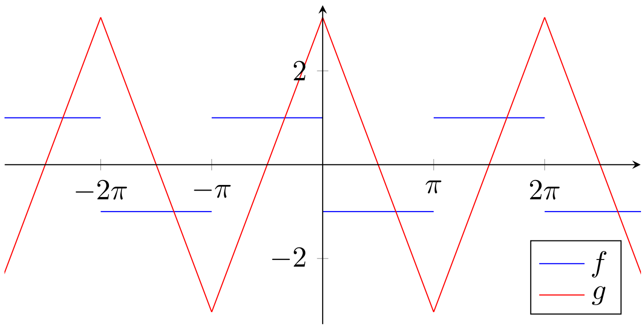
$$c_n(x) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) , \qquad s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) , \qquad c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} .$$

Calculer (c_k, c_l), (s_k, s_l) et (c_k, s_l) pour le produit scalaire défini par

$$(f,g) = \int_0^T f(x)g(x)\,dx .$$

Exercice 2. Calculer les coefficients de Fourier des fonctions 2π-périodiques données sur $[-\pi,\pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 , & x \in [0,\pi] , \\ +1 , & x \in [-\pi, 0) , \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \pi - 2x , & x \in [0,\pi] , \\ \pi + 2x , & x \in [-\pi, 0) . \end{cases}$$



Exercice 3. Calculer le développement en série de Fourier du prolongement 2π-périodique de la fonction donnée par x^2 sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$. En déduire la valeur de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$.

Exercice 4. Calculer le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique paire, respectivement impaire, dont la restriction à $(0,\pi)$ est e^x. Faire de même pour e^{ix}.

Exercice 5. Pour une fonction f périodique de période T et différentiable par morceaux, exprimer les coefficients de Fourier complexes de f' en fonction de ceux de f.