Méthodes mathématiques pour physiciens I
Série 16

Exercice 1.

1. Déterminer les trois premiers polynômes de Legendre normalisés en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille de fonctions $\{1, x, x^2\}$, avec le produit scalaire

$$(p,q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx\,.$$

2. Déterminer les deux premiers polynômes d'Hermite normalisés en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille de fonctions $\{1, x\}$, avec le produit scalaire

$$(p,q) = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} p(x)q(x)\,dx\,.$$

Exercice 2. Propriétés des polynômes de Hermite

1. En utilisant la définition des polynômes de Hermite, montrer qu'ils satisfont

$$e^{-x^2} H_n + \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} H_{n-1}\right) = 0\,.$$

2. Démontrer la relation de récurrence suivante

$$H_n' = 2xH_n - H_{n+1}\,.$$

3. En utilisant la règle générale de Leibnitz pour la dérivée n-ième,

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\,,$$

montrer que

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}\,.$$

4. Déduire des propriétés précédentes la relation donnant la dérivée des polynômes de Hermite,

$$H_n' = 2nH_{n-1}\,.$$

Exercice 3.

1. Calculer les coefficients du développement en polynômes d'Hermite de la fonction $f(x) = e^{2x}$ définie sur $\mathbf{R}$.
2. Pour cette fonction, vérifier la relation de complétude de Parseval.

Exercice 4. Calculer le développement en polynômes de Legendre des fonctions suivantes définies sur $[-1, 1]$ par

1. $f(x) = x\,,$
2. $g(x) = |x|\,.$

Indication : Pour la seconde partie, intégrer par parties et utiliser la formule du binôme de Newton.

Exercice 5. Montrer que les polynômes d'Hermite satisfont

$$(H_n, H_m) = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = \sqrt{\pi}\, 2^n\, n!\, \delta_{n,m}\,.$$

Indication : En utilisant les propriétés de l'exercice 2, montrer que

$$(H_n, H_m) = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} H_m^{(n)}(x)\, dx\,,$$

puis en déduire le résultat.

Exercice 6. Utiliser la méthode de Gram-Schmidt pour orthonormaliser la famille de fonctions $\{1, x, x^2\}$ par rapport au produit scalaire

$$(f, g) = \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \left(1 - x^2\right)\, dx\,.$$